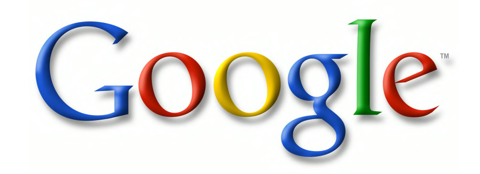


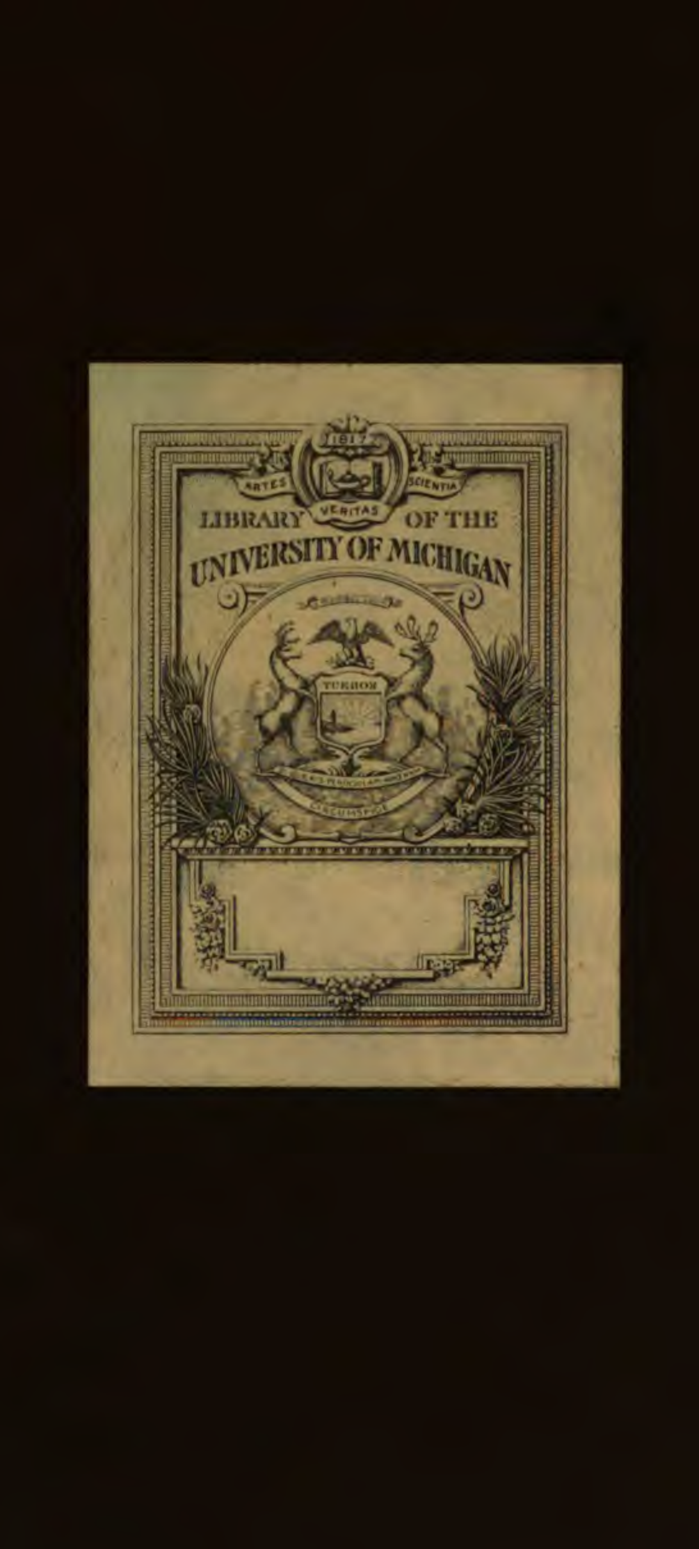
Theorie der Beobachtungsfehler

und die

Methode der kleinsten Quadrate

von

Otto Koll


1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR



Die

Theorie der Beobachtungsfehler

und die

Methode der kleinsten Quadrate

mit ihrer

Anwendung auf die Geodäsie und die Wassermessungen.

Von

Otto Koll
Professor und etatsmäfsigem Lehrer der Geodäsie an der
Landwirthschaftlichen Akademie Poppelsdorf.

Mit in den Text gedruckten Figuren.



Berlin.
Verlag von Julius Springer.
1893.

Druck von G. Bernstein in Berlin.

Vorwort.

Das vorliegende Werk ist verfaſst worden zur Benutzung beim Studium und in der Praxis. Es soll den Studirenden die theoretischen Entwicklungen in klarer übersichtlicher Fassung übermitteln und ihnen an zahlreichen Beispielen zeigen, wie das durch die theoretischen Entwicklungen gewonnene praktisch anzuwenden ist und zwar in gröſserm Umfange, als dies allein durch Vorlesungen geschehen kann. Es soll aber auch als Führer in der Praxis dienen, und deſshalb ist das Verfahren, wo es nur möglich und nützlich war, bis zur Aufstellung mechanischer Rechenregeln und einfacher Formulare entwickelt. Die Fassung des Werkes ist so einfach gehalten, daſs es jedem Fachmanne ohne weitere Anleitung gelingen dürfte, daraus das für ihn brauchbare zu gewinnen.

Das Werk enthält, neben manchem andern, die theoretischen Grundlagen der weit verbreiteten Preuſsischen Anweisung IX vom 25. Oktober 1881 für die trigonometrischen und polygonometrischen Arbeiten bei Erneuerung der Karten und Bücher des Grundsteuerkatasters und ähnlicher Anweisungen, sowie der bei Landestriangulationen und Landes-Nivellements vorkommenden wichtigsten Ausgleichungsrechnungen. Es sind deſshalb auch in den Formeln Bezeichnungen gewählt, die sich an die in der Anweisung IX und in den Veröffentlichungen über Landesaufnahmen vorkommenden anschlieſsen, soweit es bei einer einheitlichen Durchführung der Bezeichnungen in dem ganzen Werke möglich war.

Die Entwicklung des Verfahrens bis zur Aufstellung mechanischer Regeln und einfacher Formulare und die dadurch in vielen Fällen erzielte bedeutende Vereinfachung der gesamten Rechnungen wird es ermöglichen, auch oft nach der Methode der kleinsten Quadrate zu rechnen, wo dies bisher nicht geschah. Es wird dadurch die Anwendung von Näherungsverfahren weiter beschränkt werden können, die meistens ebenso viel Rechenarbeit erfordert, wie das zweckmäſsig geordnete Verfahren nach der Methode der kleinsten Quadrate und wobei überdies nur dann unter allen Umständen brauchbare Ergebnisse gewonnen werden, wenn der Rechner weit mehr Erfahrung und Geschick hat, als die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate erfordert.

Daſs durch die Aufstellung mechanischer Regeln und von Formularen das verständnislose Arbeiten auch bei solchen befördert werde, bei denen

die Kenntnis des theoretischen Zusammenhangs des Verfahrens erwartet werden mufs, ist nicht zu befürchten; denn man kann in der Praxis vielfach die Erfahrung machen, dafs grade die, die zunächst nur die mechanische Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate kennen lernen, nachher das regste Interesse zeigen, sie eingehend zu studiren. Auch wird es nur vortheilhaft sein, dafs der in der Praxis stehende Geodät nach den mechanischen Regeln und Formularen in vereinzelt vorkommenden Fällen arbeiten kann, ohne erst alle zu benutzenden Formeln zu entwickeln, und dafs er bei umfangreichen Arbeiten leicht Gehülfen nach dem angegebenen Verfahren zur mechanischen Ausführung mancher Rechnungen ausbilden kann.

Für die Wassermessungen ist in den Beispielen des I. Teils eine Berechnung der mittleren Fehler durchgeführt, um zu zeigen, wie bei diesen Messungen ein Anhalt für die Genauigkeit der Ergebnisse gewonnen werden kann. Wenn in der Praxis häufiger die mittleren Fehler der einzelnen Messungen festgestellt und danach die mittleren Fehler der Endergebnisse berechnet würden, würde sehr oft ein ganz anderes Urteil über die Zuverläfsigkeit der berechneten Geschwindigkeiten und Wassermengen erlangt werden, als es jetzt geschieht. Die im übrigen bei den Wassermessungen vorkommenden und zur Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate geeigneten Rechnungen werden nach ähnlichen im II. Teil behandelten Beispielen ohne weiteres durchgeführt werden können.

Für das Studium der geschichtlichen Entwicklung der Theorie der Beobachtungsfehler und der Methode der kleinsten Quadrate, sowie der vielen zu ihrer tiefergehenden Begründung gemachten Versuche, die nicht aufgenommen werden konnten, sei auf die Theorie der Beobachtungsfehler von Emanuel Czuber und die in diesem Werke nachgewiesene umfangreiche Original-Litteratur verwiesen.

Die Hauptformeln sind in den Druckbogen a und b übersichtlich zusammengestellt. Beim Binden des Werkes werden diese beiden Bogen zweckmäfsig für sich geheftet.

Beim Abschlufs des Druckes sage ich dem Herrn Verleger für die vorzügliche Ausstattung des Werkes und für das bereitwillige Eingehen auf alle meine Wünsche meinen verbindlichsten Dank.

Ebenso danke ich auch der Druckerei für die musterhafte Ausführung des Satzes, wodurch nur aufserordentlich wenig Korrekturen erforderlich wurden.

Bonn, Februar 1893.

Otto Koll.

Inhalts-Verzeichnis.

I. TEIL.

Theorie der Beobachtungsfehler.

II. TEIL.

Methode der kleinsten Quadrate.

I. Abschnitt. Einleitung.

II. Abschnitt. Direkte Beobachtungen.

Seite

III. Abschnitt. Direkte Beobachtungen mehrerer Gröfsen, deren Summe einen bestimmten Sollbetrag erfüllen mufs.

IV. Abschnitt. Vermittelnde Beobachtungen.

1. Kapitel. Allgemeine Entwicklung des Verfahrens.

2. Kapitel. Beispiele zu dem im 1. Kapitel entwickelten Verfahren.

V. Abschnitt. Bedingte Beobachtungen.

1. Kapitel. Allgemeine Entwicklung des Verfahrens.

Berichtigungen.

Seite 6, Hauptsatz III, 3. Zeile: Nach $w_1, w_2, w_3, \ldots$ ist „der Wahrscheinlichkeiten" zu streichen.

Seite 50: In Zeile 21 ist „bedingte direkte" statt „direkte bedingte", und in Zeile 22 ist „bedingte vermittelnde" statt „vermittelnde bedingte" zu setzen.

Seite 190: In der 7. Spalte der Tabelle ist im Kopfe $\frac{\lambda}{D-a}$ statt $\frac{1}{D-a}$ zu setzen.

Seite 226, Figur 22: In den kleinen Dreiecken sind die aus den Grundlinien berechneten Seiten stark auszuziehen und zwar im Δe die der Seite $P_a\,P_c$, im Δg die der Seite $P_a\,P_d$ und im Δh die der Seite $P_a\,P_b$ parallele Seite.

I. TEIL.

Theorie der Beobachtungsfehler.

§ 1. Einleitung.

1. Die Ergebnisse aller unserer Messungen sind, wenn wir die Messungen auch mit aller erforderlichen Sorgfalt ausführen, stets mit Messungs- oder Beobachtungsfehlern behaftet. Diese Fehler sind im allgemeinen mehr oder minder grofs, je nachdem bei der Messung gröbere oder feinere Instrumente verwendet werden und je nachdem dies oder jenes Messungsverfahren eingeschlagen wird.

Die Messungs- oder Beobachtungsfehler gehen über auf alle Gröfsen, die aus den Messungsergebnissen abgeleitet werden; demnach sind auch diese Gröfsen im allgemeinen mit mehr oder minder grossen Fehlern behaftet. Damit die aus den Messungsergebnissen abgeleiteten Gröfsen aber dennoch für einen bestimmten Zweck verwendet werden können, müssen die Fehler innerhalb gewisser Grenzen liegen, die für verschiedene Zwecke in der Regel verschieden sein werden.

Soll beispielsweise die Karte eines hochwerthigen städtischen Grundstückes benutzt werden, um danach die Pläne für die Bebauung des Grundstückes zu fertigen und soll die Flächengröfse des Grundstückes benutzt werden, um danach und nach dem vereinbarten Preis für die Flächeneinheit den Kaufpreis zu berechnen, so müssen die Grenzen, zwischen denen die Fehler aller Mafse liegen müssen, weit enger sein, als wenn die Karte von einem Wiesengrundstück und dessen Flächengröfse lediglich benutzt werden soll, um einen Plan für die Bewässerung des Grundstückes zu entwerfen und den Preis für die Ausführung der geplanten Anlage zu ermitteln.

Defshalb ist nach dem Zweck, der durch die Messungen erreicht werden soll, zu bestimmen, wie grofs die Fehler sein dürfen, womit die zu bestimmenden Gröfsen behaftet sein können und wie grofs dementsprechend auch die Beobachtungsfehler sein dürfen, oder kürzer ausgedrückt, welcher Grad von Genauigkeit erreicht werden mufs.

2. Von dem Grade der Genauigkeit ist weiter auch der zu dessen Erreichung erforderliche Arbeits- und Kostenaufwand abhängig. Je genauer die Arbeiten aus-

geführt werden, desto gröfser wird im allgemeinen auch der Arbeits- und Kostenaufwand sein. Nun wird aber stets verlangt, diesen Aufwand auf ein Minimum zu beschränken; und somit ist in jedem Falle die Aufgabe zu lösen, für die auszuführende Messung die Instrumente und das Verfahren so zu wählen, dafs mit einem möglichst geringen Arbeits- und Kostenaufwand der Genauigkeitsgrad erreicht wird, der für den Zweck der Arbeit erforderlich ist.

Um diese Aufgabe lösen zu können, müssen wir uns eingehend mit den Beobachtungsfehlern beschäftigen und Regeln zu gewinnen suchen, denen diese, scheinbar ganz regellos auftretenden, Fehler folgen.

§ 2. Verschiedene Arten der Beobachtungsfehler.

1. Wir unterscheiden drei verschiedene Arten der Beobachtungsfehler, nämlich grobe Fehler, konstante Fehler und zufällige Fehler.

Als grobe Fehler bezeichnen wir solche Fehler, die in Folge eines groben Versehens auftreten, also, beispielsweise bei Längenmessungen, Fehler von 1^m, 2^m, 5^m, 10^m, 20^m u. s. w., die durch unrichtige Ablesung oder in Folge unrichtigen Zählens der ganzen Latten- oder Mefsbandlängen entstehen.

Unsere Messungen müssen stets so angeordnet werden, dafs die auftretenden groben Fehler als solche erkannt werden können; die mit groben Fehlern behafteten Messungsergebnisse müssen verworfen und durch andere, durch Nachmessung gewonnene, nicht mit groben Fehlern behaftete Messungsergebnisse ersetzt werden. Die Erörterung darüber, wie die Messungen zweckmäfsig anzuordnen sind, damit die auftretenden groben Fehler als solche erkannt werden können, und wie die Messungsergebnisse herausgefunden werden können, die mit groben Fehlern behaftet sind, gehört in das Gebiet der Landmefskunde und bleibt im folgenden unberücksichtigt.

2. Als konstante Fehler bezeichnen wir solche Fehler, die die Messungsergebnisse stets in demselben Sinne beeinflussen oder durch die die Messungsergebnisse entweder stets zu grofs oder stets zu klein werden. Die konstanten Fehler entstehen meistens durch Unvollkommenheiten der von uns bei den Messungen benutzten Instrumente und dadurch, dafs wir einzelne Messungsoperationen regelmäfsig in gleicher Weise unvollkommen ausführen. Beispielsweise entstehen bei Längenmessungen konstante Fehler dadurch, dafs die benutzten Mefslatten u. s. w. nicht genau ihre richtige Länge haben, dafs sie nicht genau in die zu messende Linie gelegt werden u. s. w.. Je nachdem die Latten zu lang oder zu kurz sind, wird sich ein zu kleines oder ein zu grofses Längenmafs ergeben, und in Folge des Ausweichens aus der zu messenden Linie wird das Längenmafs jedesmal zu grofs.

Die konstanten Messungsfehler müssen in ihrer Gröfse durch möglichst genaue Berichtigung der Instrumente beschränkt werden. Ferner müssen die Messungen, wenn irgend thunlich, so angeordnet werden, dafs die konstanten Fehler unschädlich gemacht werden, indem solche Messungsergebnisse, die die konstanten Messungsfehler in entgegengesetztem Sinne enthalten, zu einem von den konstanten Fehlern freien Endergebnis vereinigt werden. Endlich müssen solche Messungsergebnisse, die nicht von konstanten Fehlern befreit werden können, bei der Berechnung der daraus abzuleitenden Gröfsen thunlichst derart verwerthet werden, dafs diese Gröfsen so wenig wie möglich dadurch beeinflufst

werden. Wie dies alles auszuführen ist, ist ebenfalls nicht im folgenden, sondern in der Landmefskunde zu erörtern.

3. Die zufälligen Fehler sind die unvermeidlichen, das Messungsergebnis rein zufällig bald im positiven, bald im negativen Sinne beeinflussenden, nach Ausscheidung der groben und konstanten Fehler übrigbleibenden Beobachtungsfehler. Die zufälligen Fehler setzen sich zusammen aus sehr vielen Einzelfehlern. Wenn wir beispielsweise mit einem Theodoliten einen Winkel messen, so setzt sich der zufällige Beobachtungsfehler zusammen aus den kleinen Fehlern, die bei der Aufstellung des Instruments über dem Winkelpunkte, bei der Centrirung der anzuvisirenden Signale, bei der Horizontalstellung des Theilkreises, bei der Einstellung der Signale zwischen den Fäden des Fadenkreuzes, bei der Ablesung am Theilkreise u. s. w. entstehen. Alle die angeführten Fehler sind wieder zusammengesetzt aus sehr vielen kleineren Fehlern; und wenn uns unsere Sinne erlaubten, auch die kleinsten Fehler wahrzunehmen und festzustellen, so würden wir erkennen, dafs der bei einer Winkelmessung vorkommende und auch jeder andere vorkommende Beobachtungsfehler zusammengesetzt ist aus sehr vielen sehr kleinen Einzelfehlern.

Da nun, wie wir bereits besprochen haben, unsere Messungen so angeordnet werden müssen, dafs etwa auftretende konstante oder einseitig wirkende Fehler nicht in das Endergebnis der Messung übergehen, der hier allein zu betrachtende zufällige Beobachtungsfehler des Endergebnisses also nur die zufälligen Einzelfehler umfafst, die bald positiv, bald negativ sind, so können wir, wenn wir noch die Annahme machen, dafs alle sehr kleinen Einzelfehler gleich grofs sind, die Hypothese aufstellen:

Der zufällige Beobachtungsfehler eines Messungsergebnisses ist gleich der algebraischen Summe der in sehr grofser Zahl auftretenden, sehr kleinen, gleich grofsen, positiven und negativen zufälligen Einzelfehler.*)

Um, von dieser Hypothese ausgehend, weitere Regeln zu gewinnen, müssen wir zunächst einige allgemeine Sätze über zufällige Ereignisse entwickeln.

§ 3. Wahrscheinlichkeit zufälliger Ereignisse.

1. Als zufällige Ereignisse bezeichnen wir solche, die durch Ursachen herbeigeführt werden, deren Zusammenhang oder deren Wirkung wir nicht in solcher Weise zu erkennen vermögen, dafs wir das durch sie bedingte Ereignis voraus bestimmen können.

Werfen wir z. B. einen richtig konstruirten Würfel auf eine Platte, so sagen wir, dafs es zufällig ist, welche Seite des Würfels oben erscheint. Die Ursachen, die es bedingen, dafs eine bestimmte Seite des Würfels nach oben kommt, sind: die Lage des Würfels in unserer Hand, die Kraft, mit der wir den Würfel werfen, die Entfernung der Hand von der Platte, die Richtung des Würfels gegen die Platte, die Beschaffenheit der Platte u. s. w.. Die Wirkung aller dieser Ursachen ist aber so wenig sicher voraus bestimmbar, dafs wir nicht sagen können, welches das durch sie bedingte Ereignis sein wird, welche Seite nach oben kommen wird. Ebenso werden wir es als zufällig gelten lassen müssen, welche

*) Vergleiche die Grundzüge der Wahrscheinlichkeits-Rechnung von G. Hagen, Berlin, Ernst & Korn.

Karte gezogen wird, wenn wir jemand aus einer Reihe von Karten eine ziehen lassen.

2. Wenn wir nun eine Reihe gleichartiger zufälliger Ereignisse und das Vorkommen eines der zufälligen Ereignisse aus dieser Reihe ins Auge fassen, so werden wir weiter sagen können, dafs es gleich wahrscheinlich ist, ob dies oder jenes Ereignis vorkommt.

Wenn wir also einen Würfel einmal aufwerfen, dessen Seiten 1, 2, 3, 4, 5, 6 Augen aufweisen, so werden wir sagen können, dafs es gleich wahrscheinlich ist, ob wir 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 werfen.

Werfen wir zwei solcher Würfel zusammen auf, so können die folgenden Würfe vorkommen:

Es zeigt:											
Würfel I	Würfel II	W. I	W. II	W. I	W. II	W. I	W. II	W. I	W. II	W. I	W. II
1 Auge	1 Auge	2 A.	1 A.	3 A.	1 A.	4 A.	1 A.	5 A.	1 A.	6 A.	1 A.
1 „	2 Augen	2 „	2 „	3 „	2 „	4 „	2 „	5 „	2 „	6 „	2 „
1 „	3 „	2 „	3 „	3 „	3 „	4 „	3 „	5 „	3 „	6 „	3 „
1 „	4 „	2 „	4 „	3 „	4 „	4 „	4 „	5 „	4 „	6 „	4 „
1 „	5 „	2 „	5 „	3 „	5 „	4 „	5 „	5 „	5 „	6 „	5 „
1 „	6 „	2 „	6 „	3 „	6 „	4 „	6 „	5 „	6 „	6 „	6 „

Auch in diesem Falle werden wir sagen können, dafs das Vorkommen eines jeden dieser Würfe beim einmaligen Aufwerfen der beiden Würfel gleich wahrscheinlich ist.

3. Betrachten wir aber weiter das Ergebnis, das aus dem Zusammentreffen mehrerer zufälligen und gleich wahrscheinlichen Ereignisse folgt, so erkennen wir leicht, dafs das Vorkommen der verschiedenen möglichen Ergebnisse nicht gleich wahrscheinlich ist, weil unter den überhaupt möglichen Ergebnissen die verschiedenen Ergebnisse nicht in gleicher Anzahl vorkommen.

Betrachten wir beispielsweise die vorstehend aufgeführten Würfe, die aus dem Zusammentreffen aller mit zwei einzelnen Würfeln möglichen Würfe folgen und stellen die Augenzahlen fest, die diese Würfe ergeben, so finden wir, dafs unter den überhaupt möglichen 36 Würfen sich

1 Wurf befindet, der die Augenzahl 2,
2 Würfe befinden, die die Augenzahl 3,
3 „ „ „ „ „ 4,
4 „ „ „ „ „ 5,
5 „ „ „ „ „ 6,
6 „ „ „ „ „ 7,
5 „ „ „ „ „ 8,
4 „ „ „ „ „ 9,
3 „ „ „ „ „ 10,
2 „ „ „ „ „ 11,
1 Wurf befindet, der die Augenzahl 12

ergiebt.

Hiernach sehen wir, dafs unter den überhaupt möglichen die die verschiedenen Augenzahlen ergebenden Würfe nicht gleich oft vorkommen und wir können

daraus schliefsen, dafs es nicht gleich wahrscheinlich ist, beim Werfen mit zwei Würfeln diese oder jene Augenzahl zu erhalten. Wir finden, dafs es am wahrscheinlichsten ist, die Augenzahl 7 zu werfen, schon weniger wahrscheinlich, die Augenzahlen 6 und 8, noch weniger wahrscheinlich, die Augenzahlen 5 und 9, 4 und 10, 3 und 11 zu werfen, und dafs es am unwahrscheinlichsten ist, die Augenzahlen 2 und 12 zu werfen. Wir erinnern uns auch daran, dafs bei den kindlichen Würfelspielen diesem Verhältnis Rechnung getragen wird, indem die Gewinne für die verschiedenen Würfe abgestuft und namentlich auf die Würfe 2 und 12 immer die höchsten Gewinne gesetzt werden.

Wenn wir in ähnlicher Weise die Ergebnisse betrachten, die wir beim Werfen mit 3 oder mehr Würfeln erhalten, so finden wir, dafs sich bei Hinzunahme eines weiteren Würfels die Zahl der möglichen Würfe jedesmal auf die 6fache Zahl erhöht, so dafs für n Würfel die Zahl der möglichen Würfe gleich 6^n ist. Ferner finden wir, dafs in jedem Falle die am meisten vorkommende Augenzahl gleich $3\frac{1}{2}\,n$ ist, wenn die durchschnittliche Zahl der Augen eines Würfels $\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3\frac{1}{2}$, und n die Anzahl der Würfel ist. Beachten wir dann noch, dafs es für die Erlangung einer bestimmten Augenzahl ganz gleich ist, ob n Würfel einmal, oder ob 1 Würfel n mal aufgeworfen wird, so können wir weiter schliefsen, dafs es am wahrscheinlichsten ist, bei n maligem Aufwerfen eines Würfels $3\frac{1}{2}\,n$ Augen zu werfen.

In ähnlicher Weise, wie wir hier für das Würfelspiel schon einigen Anhalt für das Vorkommen bestimmter zufälliger Ereignisse gewonnen haben, können wir auch für andere Fälle solchen Anhalt gewinnen. Wir erkennen also schon, dafs sich in der That für das Vorkommen zufälliger Ereignisse gewisse Regeln aufstellen lassen. Damit wir diese aber in bestimmtere Form fassen können, müssen wir uns zunächst einige Hauptsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung aneignen.

§ 4. Hauptsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Hauptsatz I: Die Wahrscheinlichkeit W für das Eintreffen eines Ereignisses ist, wenn alle in Betracht kommenden Fälle gleich wahrscheinlich sind, das Verhältnis der Anzahl n derjenigen Fälle, die für das Ereignis günstig sind, zur Anzahl N aller möglichen Fälle; es ist also:

$$W = \frac{n}{N}. \tag{1}$$

Die Wahrscheinlichkeit W_n dafür, dafs das Ereignis nicht eintrifft, ist:

$$W_n = \frac{N-n}{N}. \tag{2}$$

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten W und W_n ist:

$$W + W_n = \frac{n}{N} + \frac{N-n}{N} = \frac{N}{N} = 1 = \text{der Gewifsheit.} \tag{3}$$

Wenn ein Würfel aufgeworfen wird, so sind die 6 Fälle möglich, 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 Augen zu werfen, und alle diese Fälle sind gleich wahrscheinlich. Für das Ereignis, mit dem Würfel z. B. 2 Augen zu werfen, ist einer dieser 6 Fälle günstig. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit dafür, mit einem Würfel 2 Augen

zu werfen: $W=\frac{1}{6}$, ferner die Wahrscheinlichkeit dafür, nicht 2 Augen zu werfen: $W_n=\frac{6-1}{6}=\frac{5}{6}$ und endlich die Wahrscheinlichkeit dafür, entweder 2 oder nicht 2 zu werfen:

$$W+W_n=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=\frac{6}{6}=1=\text{der Gewifsheit.}$$

Hauptsatz II: Die Wahrscheinlichkeit W für das Eintreffen eines Ereignisses ist, wenn die in Betracht kommenden Fälle **nicht** gleich wahrscheinlich sind, gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten $w_1, w_2, w_3, \ldots\ldots$ der für das Ereignis günstigen Fälle; es ist also:

$$W=w_1+w_2+w_3+\ldots\ldots \tag{4}$$

Sind in einem Haufen Karten 5 Treffs, 4 Piques, 8 Coeurs und 7 Carreaus, also zusammen 24 Karten gemischt, so ist nach Formel (**1**) die Wahrscheinlichkeit dafür, aus diesem Haufen Treff zu ziehen: $w_1=\frac{5}{24}$, die Wahrscheinlichkeit dafür, Pique zu ziehen: $w_2=\frac{4}{24}$ und demnach die Wahrscheinlichkeit dafür, aus dem Haufen eine schwarze Karte zu ziehen, nach Formel (**4**):

$$W=w_1+w_2=\frac{5}{24}+\frac{4}{24}=\frac{3}{8}.$$

Diese Wahrscheinlichkeit erhalten wir auch nach dem Hauptsatz I; denn unter den 24 Karten sind im ganzen 9 schwarze Karten und demnach ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine schwarze Karte zu ziehen, nach Formel (**1**):

$$W=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}.$$

Hauptsatz III: Die Wahrscheinlichkeit W_z für das Zusammentreffen mehrerer von einander unabhängigen Ereignisse ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten $w_1, w_2, w_3, \ldots\ldots$ der Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen dieser Ereignisse; es ist also:

$$W_z=w_1\cdot w_2\cdot w_3\cdot\ \ldots\ldots \tag{5}$$

Sind in einer Urne 13 weifse und 3 schwarze Kugeln, in einer zweiten Urne 7 weifse und 5 schwarze Kugeln, so ist nach Formel (**1**) die Wahrscheinlichkeit dafür, aus der ersten Urne eine schwarze Kugel zu ziehen: $w_1=\frac{3}{16}$, und die Wahrscheinlichkeit dafür, aus der zweiten Urne eine schwarze Kugel zu ziehen: $w_2=\frac{5}{12}$. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei je einem Zuge aus beiden Urnen nur schwarze Kugeln zu ziehen, nach Formel (**5**):

$$W_z=w_1\cdot w_2=\frac{3}{16}\cdot\frac{5}{12}=\frac{15}{192}=\frac{5}{64}.$$

Denken wir uns die Kugeln in der Urne I mit den Nummern 1, 2, 3, ... 16, in der Urne II mit den Nummern 1, 2, 3, ... 12 so bezeichnet, dafs die schwarzen Kugeln in beiden Urnen die ersten Nummern haben, so sind folgende Fälle möglich, worin aus beiden Urnen nur schwarze Kugeln gezogen werden:

Es wird gezogen aus:									
Urne I	Urne II	U. I	U. II	U. I	U. II	U. I	U. II	U. I	U. II
Kugel 1	Kugel 1	K. 1	K. 2	K. 1	K. 3	K. 1	K. 4	K. 1	K. 5
„ 2	„ 1	„ 2	„ 2	„ 2	„ 3	„ 2	„ 4	„ 2	„ 5
„ 3	„ 1	„ 3	„ 2	„ 3	„ 3	„ 3	„ 4	„ 3	„ 5

Die Anzahl dieser für das Ereignis, nur schwarze Kugeln zu ziehen, günstigen Fälle ist: $n = 3 \cdot 5 = 15$, und die Anzahl aller überhaupt möglichen Züge ist, wie leicht zu übersehen ist,: $N = 16 \cdot 12 = 192$. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei je einem Zuge aus beiden Urnen nur schwarze Kugeln zu ziehen, nach Formel (**1**): $W = \frac{15}{192} = \frac{5}{64}$, übereinstimmend mit der oben nach Formel (**5**) erhaltenen Wahrscheinlichkeit W_2.

Hauptsatz IV: Die Wahrscheinlichkeit W_2 für das Zusammentreffen zweier von einander abhängigen Ereignisse ist gleich der Wahrscheinlichkeit w für das Eintreffen des ersten Ereignisses mal der Wahrscheinlichkeit ω dafür, dafs nach dem Eintreffen des ersten Ereignisses, das zweite Ereignis eintreffen wird; es ist also:

$$W_2 = w \cdot \omega. \tag{6}$$

Liegen in 2 von 3 Urnen nur weifse Kugeln, in der dritten Urne nur schwarze Kugeln, und ist es unbekannt, in welchen von den 3 Urnen die weifsen oder schwarzen Kugeln liegen, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, aus Urne I eine weifse Kugel zu ziehen, nach Formel (**1**): $w = \frac{2}{3}$. Ist dies Ereignis eingetreten, ist also thatsächlich aus Urne I eine weifse Kugel gezogen, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, nun ebenfalls aus Urne II eine weifse Kugel zu ziehen, nach Formel (**1**): $\omega = \frac{1}{2}$. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs die Urnen I und II die weifsen Kugeln enthalten, nach Formel (**6**):

$$W_2 = w \cdot \omega = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Diese Wahrscheinlichkeit erhalten wir auch direkt nach Formel (**1**); denn es sind überhaupt nur die 3 Fälle möglich, dafs Urne I und II, dafs Urne I und III oder dafs Urne II und III die weifsen Kugeln enthalten, und unter diesen 3 Fällen ist nur der erste Fall für das von uns ins Auge gefafste Ereignis, dafs die Urnen I und II die weifsen Kugeln enthalten, günstig; somit ist nach Formel (**1**): $W = \frac{1}{3}$.

§ 5. Beziehung zwischen der Gröfse der Beobachtungsfehler und der Wahrscheinlichkeit ihres Vorkommens.

1. Kehren wir nun zur Betrachtung der Beobachtungsfehler zurück, so können wir die am Schlusse des § 2 aufgestellte Hypothese noch durch den Zusatz erweitern, dafs die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen positiver und negativer Einzelfehler gleich ist, was unmittelbar aus dem Charakter der zufälligen Einzelfehler folgt. Hiernach lautet die Hypothese:

(**7**) Der zufällige Beobachtungsfehler eines Messungsergebnisses ist gleich der algebraischen Summe der in sehr grofser Anzahl auf-

tretenden, sehr kleinen, gleich grofsen, positiven und negativen zufälligen Einzelfehler, und die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen positiver und negativer Einzelfehler ist gleich.

2. Verfolgen wir nun die Bildung eines Beobachtungsfehlers aus positiven und negativen zufälligen Einzelfehlern, die mit $+\varepsilon$ und $-\varepsilon$ bezeichnet werden mögen, so ergiebt sich folgendes:

Der erste auftretende Einzelfehler kann sein	Jeder neu auftretende Einzelfehler kann $+\varepsilon$ oder $-\varepsilon$ sein, und der Beobachtungsfehler kann anwachsen durch den auftretenden						
	2ten,	3ten,	4ten,	5ten,	6ten,		2νten Einzelfehler
in 1 Fall: $+\varepsilon$, 1 Fall: $-\varepsilon$,	in 1 Fall auf: $+2\varepsilon$, 2 Fällen auf: 0, 1 Fall auf: -2ε,	in 1 F. a.: $+3\varepsilon$, 3 „ „: $+\varepsilon$, 3 „ „: $-\varepsilon$, 1 „ „: -3ε,	in 1 F. a.: $+4\varepsilon$, 4 „ „: $+2\varepsilon$, 6 „ „: 0, 4 „ „: -2ε, 1 „ „: -4ε,	in 1 F. a.: $+5\varepsilon$, 5 „ „: $+3\varepsilon$, 10 „ „: $+\varepsilon$, 10 „ „: $-\varepsilon$, 5 „ „: -3ε, 1 „ „: -5ε,	in 1 F. a.: $+6\varepsilon$, 6 „ „: $+4\varepsilon$, 15 „ „: $+2\varepsilon$, 20 „ „: 0, 15 „ „: -2ε, 6 „ „: -4ε, 1 „ „: -6ε,	....	in 1 F. a.: $+2\nu\varepsilon$, 2ν „ „: $+2(\nu-1)\varepsilon$, $\binom{2\nu}{2}$ „ „: $+2(\nu-2)\varepsilon$, ..., $\binom{2\nu}{n}$ „ „: 0, ..., $\binom{2\nu}{2}$ „ „: $-2(\nu-2)\varepsilon$, 2ν „ „: $-2(\nu-1)\varepsilon$, 1 „ „: $-2\nu\varepsilon$,
	Die Gesammtzahl aller möglichen Fälle ist gleich						
2,	$4=2^2$,	$8=2^3$,	$16=2^4$,	$32=2^5$,	$64=2^6$,	....	$2^{2\nu}$.

Die Zahlen, die angeben, in wie vielen Fällen der Beobachtungsfehler auf ε, 2ε, 3ε, ... anwächst, sind Binomialkoeffizienten, also ist:

$$\binom{2\nu}{2} = \frac{2\nu\,(2\nu-1)}{1.2}, \ldots, \quad \binom{2\nu}{\nu} = \frac{2\nu\,(2\nu-1)\,(2\nu-2)\ldots(\nu+1)}{1.2.3.\ldots\nu}.$$

Die Gesamtzahl aller möglichen Fälle ist allgemein $2^{2\nu}$; denn beim Auftreten eines Einzelfehlers sind 2 Fälle möglich und mit jedem neu auftretenden Einzelfehler ergeben sich aus jedem möglichen Falle immer zwei neue mögliche Fälle.

3. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs sich aus einer Reihe von zufälligen Einzelfehlern ein bestimmter Beobachtungsfehler bildet, ist nach dem Hauptsatz I der Wahrscheinlichkeitsrechnung gleich der Anzahl der für dies Ereignis günstigen Fälle dividirt durch die Anzahl aller möglichen Fälle.

Demnach ist die Wahrscheinlichkeit W_0, $W_{2\varepsilon}$, $W_{4\varepsilon}$ dafür, dafs sich beim Auftreten von 4 zufälligen Einzelfehlern die Beobachtungsfehler 0, $\pm 2\varepsilon$, $\pm 4\varepsilon$ bilden, nach der vorstehenden Tabelle:

$$W_0 = \frac{6}{16}, \qquad W_{2\varepsilon} = \frac{4}{16}, \qquad W_{4\varepsilon} = \frac{1}{16}.$$

Ferner ist allgemein die Wahrscheinlichkeit W_0, $W_{2\varepsilon}$, $W_{4\varepsilon}$, ... $W_{2\rho\varepsilon}$, $W_{2(\rho+1)\varepsilon}$, $W_{2(\nu-2)\varepsilon}$, $W_{2(\nu-1)\varepsilon}$, $W_{2\nu\varepsilon}$ dafür, dafs sich beim Auftreten von 2ν zufälligen Einzelfehlern die Beobachtungsfehler $0, \pm 2\varepsilon, \pm 4\varepsilon, \ldots \pm 2\rho\varepsilon, \pm 2(\rho+1)\varepsilon, \ldots \pm 2(\nu-2)\varepsilon$, $2(\nu-1)\varepsilon$, $2\nu\varepsilon$ bilden:

$$(1^*) \begin{cases} W_0 = \binom{2\nu}{\nu} 2^{-2\nu}, & W_{2\varepsilon} = \binom{2\nu}{\nu-1} 2^{-2\nu}, \quad W_{4\varepsilon} = \binom{2\nu}{\nu-2} 2^{-2\nu}, \ldots, \\ W_{2\rho\varepsilon} = \binom{2\nu}{\nu-\rho} 2^{-2\nu}, & W_{2(\rho+1)\varepsilon} = \binom{2\nu}{\nu-(\rho+1)} 2^{-2\nu}, \ldots, \\ W_{2(\nu-2)\varepsilon} = \binom{2\nu}{2} 2^{-2\nu}, & W_{2(\nu-1)\varepsilon} = 2\nu\, 2^{-2\nu}, \quad W_{2\nu\varepsilon} = 2^{-2\nu}. \end{cases}$$

Der Zahlenwerth von $2^{-2\nu}$ nimmt sehr rasch ab mit zunehmendem ν. Er ist $\frac{1}{4}$ für $\nu = 1$, $\frac{1}{1024}$ für $\nu = 5$, $\frac{1}{1\,048\,576}$ für $\nu = 10$ u. s. w.. Somit wird beim Auftreten einer gröfseren Zahl zufälliger Einzelfehler auch die Wahrscheinlichkeit $W_{2\nu\varepsilon}$, $W_{2(\nu-1)\varepsilon}$, $W_{2(\nu-2)\varepsilon}$, ... für das Vorkommen der sehr grofsen Beobachtungsfehler $\pm 2\nu\varepsilon$, $\pm 2(\nu-1)\varepsilon$, $\pm 2(\nu-2)\varepsilon$, ... sehr gering, wodurch es zu erklären ist, dafs bei Beobachtungen, wo sehr viele Einzelfehler auftreten, doch sehr grofse, aus der Anhäufung sehr vieler positiver oder sehr vieler negativer Einzelfehler entstehende, Beobachtungsfehler nicht vorkommen, obwohl ihr Vorkommen denkbar ist.

4. Aus der Betrachtung der unter Nr. 2 und 3 gewonnenen Ergebnisse können wir bereits folgendes entnehmen:

(8) Es ist am wahrscheinlichsten, dafs der Beobachtungsfehler Null vorkommt.

Die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen der verschiedenen Beobachtungsfehler ist verhältnismäfsig sehr viel kleiner für gröfsere als für kleinere Beobachtungsfehler, sie ist verschwindend klein für sehr grofse Beobachtungsfehler.

Das Vorkommen gleich grofser positiver und negativer Beobachtungsfehler ist gleich wahrscheinlich.

5. Aus den in (1*) gewonnenen Ausdrücken für die Wahrscheinlichkeit W_0 und $W_{2\rho\varepsilon}$ dafür, dafs der Beobachtungsfehler 0 oder $2\rho\varepsilon$ vorkommt, können wir

eine einfache allgemeine Gleichung entwickeln, die die Beziehung darstellt zwischen der Gröfse eines Beobachtungsfehlers und der Wahrscheinlichkeit seines Vorkommens.

Wir benutzen hierbei die folgenden Formeln:

$$(2^*)\quad x! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(x-1)\cdot x = \sqrt{2\pi}\cdot x^{x+\frac{1}{2}}\cdot e^{-x+\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\frac{1}{1260x^5}-\ldots\ldots},$$

$$(3^*)\quad e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\ldots$$

$$(4^*)\quad \lg(1+x) = \frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots,$$

worin $\pi = 3{,}141\,592\ldots\ldots$ der halbe Umfang des Kreises für den Radius $r=1$ und e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist.

Nun ist nach (1*):

$$(5^*)\quad W_0 = \binom{2\nu}{\nu}2^{-2\nu},\ \text{und darin:}$$

$$(6^*)\quad \binom{2\nu}{\nu} = \frac{2\nu\cdot(2\nu-1)\ldots\ldots(\nu+2)\cdot(\nu+1)}{1\cdot 2\ldots\ldots(\nu-1)\cdot\nu}$$

$$= \frac{2\nu\cdot(2\nu-1)\ldots\ldots(\nu+2)\cdot(\nu+1)\cdot\nu\cdot(\nu-1)\ldots\ldots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot\ldots\ldots(\nu-1)\cdot\nu\cdot\nu\cdot(\nu-1)\ldots\ldots 2\cdot 1}$$

$$= \frac{(2\nu)!}{\nu!\,\nu!} = \frac{\sqrt{2\pi}\cdot 2\nu^{2\nu+\frac{1}{2}}\cdot e^{-2\nu+\frac{1}{12\cdot 2\nu}-\frac{1}{360(2\nu)^3}+\ldots\ldots}}{2\pi\cdot\nu^{2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\cdot e^{-2\nu+\frac{1}{6\nu}-\frac{1}{180\nu^3}+\ldots\ldots}}$$

$$= \frac{2^{2\nu}}{\sqrt{\nu\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{8\nu}+\frac{1}{192\nu^3}+\ldots\ldots} = \frac{2^{2\nu}}{\sqrt{\nu\pi}}\cdot\left(1-\frac{1}{8\nu}+\frac{1}{128\nu^2}+\frac{5}{1024\nu^3}-\ldots\right);$$

danach ist:

$$(7^*)\quad W_0 = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}}\left(1-\frac{1}{8\nu}+\frac{1}{128\nu^2}+\frac{5}{1024\nu^3}-\ldots\ldots\right)$$

oder, wenn ν sehr grofs ist,:

$$(8^*)\quad W_0 = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}}.$$

Sodann ist nach (1*):

$$(9^*)\quad W_{2\varrho\varepsilon} = \binom{2\nu}{\nu-\varrho}2^{-2\nu},\ \text{und darin:}$$

$$(10^*)\quad \binom{2\nu}{\nu-\varrho} = \frac{2\nu\cdot(2\nu-1)\ldots\ldots(\nu+\varrho+2)\cdot(\nu+\varrho+1)}{1\cdot 2\ldots\ldots(\nu-(\varrho-1))\cdot(\nu-\varrho)}$$

$$= \frac{2\nu\cdot(2\nu-1)\ldots\ldots(\nu+\varrho+2)\cdot(\nu+\varrho+1)\cdot(\nu+\varrho)\cdot(\nu+\varrho-1)\ldots\ldots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot(\nu-(\varrho+1))\cdot(\nu-\varrho)\cdot(\nu+\varrho)\cdot(\nu+\varrho-1)\ldots\ldots 2\cdot 1}$$

$$= \frac{(2\nu)!}{(\nu-\varrho)!\,(\nu+\varrho)!}.$$

Während nach (5*) und (6*) $W_0 = \frac{(2\nu)!}{\nu!\,\nu!}2^{-2\nu}$ ist, ist nach (9*) und (10*) $W_{2\varrho\varepsilon} = \frac{(2\nu)!}{(\nu-\varrho)!\,(\nu+\varrho)!}2^{-2\nu}$, also:

$$(11^*)\quad \frac{W_{2\rho\varepsilon}}{W_0} = \frac{\nu!\,\nu!}{(\nu-\varrho)!\,(\nu+\varrho)!}$$

$$= \frac{2\pi\cdot\nu^{2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\cdot e^{-2\nu+\frac{1}{6\nu}-\frac{1}{180\nu^3}+\cdots\cdots}}{2\pi\cdot(\nu-\varrho)^{\nu-\rho+\frac{1}{2}}\cdot(\nu+\varrho)^{\nu+\rho+\frac{1}{2}}\cdot e^{-2\nu+\frac{\nu}{6(\nu^2-\rho^2)}-\frac{\nu^3+3\nu\rho^2}{180(\nu^2-\rho^2)^3}+\cdots\cdots}}$$

$$= \left(\frac{\nu}{\nu-\varrho}\right)^{\nu-\rho+\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{\nu}{\nu+\varrho}\right)^{\nu+\rho+\frac{1}{2}}\cdot e^{+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{\nu}{\nu^2-\rho^2}\right)-\frac{1}{180}\left(\frac{1}{\nu^3}-\frac{\nu^3+3\nu\rho^2}{(\nu^2-\rho^2)^3}\right)+\cdots\cdots}$$

Ferner ist nach (4*):

$$(12^*)\quad \lg\left(\frac{\nu}{\nu-\varrho}\right) = -\lg\left(1-\frac{\varrho}{\nu}\right) = +\frac{\varrho}{\nu}+\frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{\nu}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{\varrho}{\nu}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{\varrho}{\nu}\right)^4+\cdots\cdots,$$

$$(13^*)\quad \lg\left(\frac{\nu}{\nu+\varrho}\right) = -\lg\left(1+\frac{\varrho}{\nu}\right) = -\frac{\varrho}{\nu}+\frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{\nu}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{\varrho}{\nu}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{\varrho}{\nu}\right)^4+\cdots\cdots,$$

wonach

$$(14^*)\quad \left(\nu-\varrho+\frac{1}{2}\right)\lg\left(\frac{\nu}{\nu-\varrho}\right)+\left(\nu+\varrho+\frac{1}{2}\right)\lg\left(\frac{\nu}{\nu+\varrho}\right)$$

$$= -2\varrho\frac{\varrho}{\nu}+(2\nu+1)\frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{\nu}\right)^2-2\varrho\frac{1}{3}\left(\frac{\varrho}{\nu}\right)^3+(2\nu+1)\frac{1}{4}\left(\frac{\varrho}{\nu}\right)^4-\cdots\cdots$$

$$= -\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\varrho}{\nu}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\nu-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\varrho}{\nu}\right)^4-\left(\frac{1}{15}\nu-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{\varrho}{\nu}\right)^6-\left(\frac{1}{28}\nu-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{\varrho}{\nu}\right)^8-\cdots\cdots$$

oder da $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots$ gegenüber $\nu, \frac{1}{6}\nu, \frac{1}{15}\nu, \frac{1}{28}\nu, \ldots\ldots$ verschwindend klein ist,

$$= -\frac{\varrho^2}{\nu}-\frac{1}{6}\frac{\varrho^4}{\nu^3}-\frac{1}{15}\frac{\varrho^6}{\nu^5}-\frac{1}{28}\frac{\varrho^8}{\nu^7}-\cdots\cdots$$

wird, und somit

$$(15^*)\quad \left(\frac{\nu}{\nu-\varrho}\right)^{\nu-\rho+\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{\nu}{\nu+\varrho}\right)^{\nu+\rho+\frac{1}{2}} = e^{-\frac{\rho^2}{\nu}-\frac{1}{6}\frac{\rho^4}{\nu^3}-\frac{1}{15}\frac{\rho^6}{\nu^5}-\frac{1}{28}\frac{\rho^8}{\nu^7}-\cdots\cdots}$$

wird. Endlich ist:

$$(16^*)\quad +\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{\nu}{\nu^2-\varrho^2}\right) = -\frac{1}{6\nu^2}\frac{\varrho^2}{\nu}-\frac{1}{6\nu^2}\frac{\varrho^4}{\nu^3}-\frac{1}{6\nu^2}\frac{\varrho^6}{\nu^5}-\frac{1}{6\nu^2}\frac{\varrho^8}{\nu^7}-\cdots\cdots,$$

$$(17^*)\quad -\frac{1}{180}\left(\frac{1}{\nu^3}-\frac{\nu^3+3\nu\varrho^2}{(\nu^2-\varrho^2)^3}\right) = +\frac{1}{30\nu^4}\frac{\varrho^2}{\nu}+\frac{1}{12\nu^4}\frac{\varrho^4}{\nu^3}+\frac{7}{45\nu^4}\frac{\varrho^6}{\nu^5}+\frac{1}{4\nu^4}\frac{\varrho^8}{\nu^7}-\cdots\cdots$$

Demnach wird nach (11*) und (15*) bis (17*):

$$(18^*)\quad \frac{W_{2\rho\varepsilon}}{W_0} = e^{-\frac{\rho^2}{\nu}\left(1+\frac{1}{6\nu^2}-\frac{1}{30\nu^4}\cdots\right)-\frac{1}{6}\frac{\rho^4}{\nu^3}\left(1+\frac{1}{\nu^2}-\frac{1}{2\nu^4}\cdots\right)-\frac{1}{15}\frac{\rho^6}{\nu^5}\left(1+\frac{5}{2\nu^2}-\frac{7}{3\nu^4}\cdots\right)-\frac{1}{28}\frac{\rho^8}{\nu^7}\left(1+\frac{14}{3\nu^2}-\frac{7}{\nu^4}\cdots\right)-\cdots\cdots}$$

oder es wird, da die Potenzen von $\frac{1}{\nu}$ gegenüber 1 verschwindend klein sind,:

$$(19^*)\quad \frac{W_{2\rho\varepsilon}}{W_0} = e^{-\frac{\rho^2}{\nu}-\frac{1}{6}\frac{\rho^4}{\nu^3}-\frac{1}{15}\frac{\rho^6}{\nu^5}-\frac{1}{28}\frac{\rho^8}{\nu^7}-\cdots\cdots}$$

Wird nun für W_0 der in (8*) erhaltene Ausdruck eingesetzt und die Potenz von e nach (3*) in eine Reihe verwandelt, so ergiebt sich:

$$(20^*)\quad W_{2\rho\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}}\left(1-\frac{\varrho\varrho}{\nu}+\frac{1}{2!}\left(\frac{\varrho\varrho}{\nu}\right)^2\left(1-\frac{1}{3\nu}\right)-\frac{1}{3!}\left(\frac{\varrho\varrho}{\nu}\right)^3\left(1-\frac{1}{\nu}+\frac{2}{5\nu^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4!}\left(\frac{\varrho\varrho}{\nu}\right)^4\left(1-\frac{2}{\nu}+\frac{29}{15\nu^2}-\frac{6}{7\nu^3}-\cdots\right)\right),$$

oder wenn wieder beachtet wird, dafs $\frac{1}{\nu}$ sehr klein ist:

$$(21^*)\quad W_{2\rho\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}}\left(1-\frac{\varrho\varrho}{\nu}+\frac{1}{2!}\left(\frac{\varrho\varrho}{\nu}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{\varrho\varrho}{\nu}\right)^3+\frac{1}{4!}\left(\frac{\varrho\varrho}{\nu}\right)^4-\cdots\cdots\right).$$

Wie eine Vergleichung dieser Reihe mit (3*) zeigt, ist hiernach auch:

(22*) $$W_{2\rho\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} e^{-\frac{\rho\rho}{\nu}}.$$

Bezeichnen wir nun den Beobachtungsfehler $2\rho\varepsilon$ mit x, die Wahrscheinlichkeit $W_{2\rho\varepsilon}$ dafür, dafs dieser Beobachtungsfehler vorkommt mit y und setzen $\nu(2\varepsilon)^2 = N$ so wird

(23*) $$y = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{N\pi}} e^{-\frac{xx}{N}}.$$

Da die Werthe von y Verhältniszahlen sind, wofür eine bestimmte Einheit noch nicht festgesetzt worden ist, so können wir den Ausdruck für y durch 2ε dividiren und erhalten:

(10) $$y = \frac{1}{\sqrt{N\pi}} e^{-\frac{xx}{N}},$$

oder nach (3*):

(11) $$y = \frac{1}{\sqrt{N\pi}}\left(1 - \frac{xx}{N} + \frac{1}{2!}\left(\frac{xx}{N}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{xx}{N}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{xx}{N}\right)^4 - \cdots\cdots\right).$$

6. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs ein Beobachtungsfehler vorkommt, der zwischen x und $x + dx$ liegt, ist nach unserm Hauptsatz II gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten für das Vorkommen der zwischen x und $x + dx$ liegenden Beobachtungsfehler. Wenn dx eine sehr kleine Gröfse vorstellt, so können wir annehmen, dafs diese Wahrscheinlichkeiten sämtlich gleich sind der Wahrscheinlichkeit y für das Vorkommen des Fehlers x und können die Summe der Wahrscheinlichkeiten für das Vorkommen der zwischen x und $x + dx$ liegenden Beobachtungsfehler darstellen durch das Produkt $y \cdot dx$. Dies Produkt wird veranschaulicht durch einen Flächenstreifen von der Höhe y und der Breite dx.

Weiter ist auch die Wahrscheinlichkeit W_a^b dafür, dafs ein Beobachtungsfehler vorkommt, der zwischen $x = a$ und $x = b$ liegt, nach unserm Hauptsatz II gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten für das Vorkommen der zwischen a und b liegenden Beobachtungsfehler, und diese können wir darstellen durch die Summe der Produkte $y \cdot dx$, die sich mit den Werthen von y ergeben, die zu allen zwischen a und b liegenden Werthen von x gehören, so dafs

(24*) $$W_a^b = \int y\, dx \quad \text{für } x = a \text{ bis } x = b$$

wird.

Wird die Beziehung zwischen den Beobachtungsfehlern und der Wahrscheinlichkeit ihres Vorkommens veranschaulicht durch eine Kurve, deren Abscissen gleich x und deren Ordinaten gleich y sind, so wird die Wahrscheinlichkeit W_a^b dafür, dafs ein Beobachtungsfehler vorkommt, der zwischen a und b liegt, veranschaulicht durch die Fläche, die zwischen der Kurve, der Abscissenachse und den beiden zu $x = a$ und $x = b$ gehörigen Ordinaten liegt.

§ 6. Der durchschnittliche, mittlere und wahrscheinliche Fehler.

1. Wir haben bisher als Einheitsmafs für die Beobachtungsfehler den zufälligen Einzelfehler genommen, wir können aber die Gröfse der zufälligen Einzelfehler nicht bestimmen und defshalb auch die bei den Beobachtungen auftretenden

Fehler praktisch nicht nach diesem Einheitsmafs messen. Wir können aber wohl für die verschiedenen Beobachtungsarten und für die verschiedenen Instrumente aus Beobachtungsergebnissen Mittelwerthe der Beobachtungsfehler ableiten und dann diese Mittelwerthe auch als Einheitsmafs für die Beobachtungsfehler benutzen.

Denn wenn wir eine Gröfse, deren wahren Werth (x) wir kennen, wiederholt in gleicher Weise beobachten und dadurch die Beobachtungsergebnisse λ_1, λ_2, λ_3, ... λ_n erlangen, so liefern uns die Unterschiede $(x)-\lambda_1$, $(x)-\lambda_2$, $(x)-\lambda_3$, ..., $(x)-\lambda_n$ die wahren Beobachtungsfehler (v_1), (v_2), (v_3), ... (v_n). Bilden wir nun beispielsweise aus diesen einen Mittelwerth d, indem wir die absolute Summe $[\pm(v)]$ der Fehler durch ihre Anzahl n dividiren, so können wir diesen Mittelwerth d als Einheitsmafs für die Fehler gleichartiger Beobachtungen benutzen und feststellen, dem wievielten Betrage des Mittelwerthes sie gleichkommen.

2. Die als Einheitsmafse der Beobachtungsfehler gebräuchlichen Mittelwerthe sind der durchschnittliche, der mittlere und der wahrscheinliche Fehler.

Der durchschnittliche Fehler d ergiebt sich, indem die absolute, d. h. die ohne Berücksichtigung der Vorzeichen gebildete Summe $[\pm(v)]$ der wahren Beobachtungsfehler (v_1), (v_2), (v_3), ... (v_n) durch ihre Anzahl n dividirt wird, also nach:

$$d=\frac{[\pm(v)]}{n}. \tag{12}$$

Der mittlere Fehler m ergiebt sich, indem die Summe $[(v)(v)]$ der Quadrate der wahren Beobachtungsfehler (v_1), (v_2), (v_3), ... (v_n) gebildet, diese durch ihre Anzahl n dividirt und aus dem so erhaltenen Mittelwerthe der Quadrate die Wurzel gezogen wird, also nach:

$$m=\pm\sqrt{\frac{[(v)(v)]}{n}}. \tag{13}$$

Der wahrscheinliche Fehler ist der Fehler, der in einer Reihe absolut genommener wahrer Beobachtungsfehler ebenso oft überschritten, wie nicht erreicht wird. Er kann bestimmt werden, indem die Fehler ihrer Gröfse nach geordnet werden, und dann ermittelt wird, welcher Fehler in der Mitte der Fehlerreihe liegt. Zweckmäfsiger ist es indefs, zunächst den mittleren Fehler zu bilden, und den wahrscheinlichen Fehler nach einer, später zu bildenden, Formel aus dem mittleren Fehler zu berechnen, weil hierbei sämtliche Fehler ihrer Gröfse nach zur Anrechnung kommen, während bei dem zuerst erwähnten Verfahren hauptsächlich die Gröfse der in der Mitte der Reihe stehenden Fehler bestimmend ist.

3. Die vorbezeichneten Mittelwerthe der Beobachtungsfehler sind abhängig von den bei den Beobachtungen benutzten Instrumenten und der Beobachtungsart; denn je nachdem ein mehr oder minder feines Instrument, oder je nachdem ein mehr oder minder gut durchgebildetes Beobachtungsverfahren eingeschlagen wird, werden sich auch kleinere oder gröfsere Beobachtungsfehler und dementsprechend auch kleinere oder gröfsere Mittelwerthe der Beobachtungsfehler ergeben.

Ferner ist auch die in den Formeln (**10**) und (**11**) vorkommende noch unbestimmte Grösse N abhängig von den bei den Beobachtungen benutzten Instrumenten und der Beobachtungsart. Denn wenn wir beispielsweise Winkel beobachten mit einem feinen Mikroskoptheodoliten, so wird die Wahrscheinlichkeit $y=\frac{1}{\sqrt{N\pi}}\cdot e^{-\frac{xx}{N}}$, einen Fehler x von bestimmter Gröfse zu machen, eine ganz

andere sein, als wenn wir den Winkel mit einem einfachen Nonientheodolit beobachten. Ebenso wird die Wahrscheinlichkeit y, einen bestimmten Fehler x zu machen, verschieden sein, je nachdem dies oder jenes Beobachtungsverfahren eingeschlagen wird. Diese verschiedenen Werthe der Wahrscheinlichkeit y werden sich nach Formel (**10**) oder (**11**) aber nur dann ergeben, wenn die Gröfse N den verschiedenen Instrumenten und Beobachtungsarten entsprechend verschieden bestimmt wird.

4. Weil nun sowohl die Mittelwerthe der Beobachtungsfehler, als auch die Grösse N von den bei den Beobachtungen benutzten Instrumenten und der Beobachtungsart abhängig sind, so werden diese Gröfsen auch unter sich in bestimmter Beziehung stehen. Diese Beziehung wollen wir jetzt durch einfache Formeln auszudrücken suchen und dann in die Formeln (**10**) und (**11**) statt der Gröfse N die Mittelwerthe einführen, die aus den Beobachtungsfehlern immer einfach abgeleitet werden können.

Bei der Entwicklung dieser Formeln setzen wir voraus, dafs die Mittelwerthe der Beobachtungsfehler aus unendlich vielen Beobachtungsergebnissen abgeleitet werden. Letzteres trifft zwar in praktischen Fällen nicht zu, wo immer nur Beobachtungsergebnisse in endlicher Anzahl vorliegen; wir werden aber die unter Voraussetzung des idealen Falles gewonnenen theoretisch richtigen Formeln auch praktisch anwenden können, da sie das Verhältnis der betreffenden Gröfsen zu einander so gut wie möglich darstellen werden.

Im § 5, Nr. 5 hatten wir bereits angeführt, dafs die Werthe von y Verhältniszahlen sind, für die eine bestimmte Einheit noch nicht festgesetzt ist. Da nun nach § 5, Nr. 6 $\int y\,dx$ für $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ die Wahrscheinlichkeit dafür darstellt, dafs ein Fehler vorkommt, der zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegt, und es gewifs ist, dafs bei einer Beobachtung ein Fehler vorkommt, der in diesen Grenzen liegt, so setzen wir nach Formel (**3**):

$$(1^*) \qquad \int y\,dx = 1 \text{ für } x = -\infty \text{ bis } x = +\infty.$$

5. Wenn Beobachtungsergebnisse in unendlich grosser Anzahl vorliegen, so kommen bei diesen auch alle Beobachtungsfehler von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ vor und die Fehlerreihe enthält die einzelnen Fehler in einer Anzahl, die proportional ist der Wahrscheinlichkeit dafür, dafs die betreffenden Fehler bei den Beobachtungen auftreten. Wenn demnach $y\,dx$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dafs ein Beobachtungsfehler vorkommt, der zwischen x und $x + dx$ liegt, und k eine Konstante ist, so stellt $k\,y\,dx$ die Anzahl der in der Fehlerreihe vorkommenden Fehler, die zwischen x und $x + dx$ liegen, dar und

$$(2^*) \qquad n = \int k\,y\,dx = k \int y\,dx \text{ für } x = -\infty \text{ bis } x = +\infty$$

die Anzahl der überhaupt vorkommenden Fehler.

6. Weiter erhalten wir dann die Summe aller Fehler, indem wir die Anzahl $k y\,dx$, in der die einzelnen Fehler vorkommen, mit den betreffenden Fehlern multipliziren, und alles addiren, indem wir also in der berechtigten Annahme, dafs alle Fehler zwischen x und $x + dx$ gleich x sind,

$$(3^*) \qquad [\pm(v)] = \int k\,y\,x\,dx = k \int y\,x\,dx \text{ für } x = -\infty \text{ bis } x = +\infty$$

bilden.

Demnach wird nach Formel (**12**) der durchschnittliche Fehler:

(4*) $$d = \frac{[\pm(v)]}{n} = \frac{k\int y\,x\,dx}{k\int y\,dx} \quad \text{für } x = -\infty \text{ bis } x = +\infty,$$

oder, da nach (1*): $\int y\,dx = 1$ für $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ ist,:

(5*) $$d = \int y\,x\,dx \quad \text{für } x = -\infty \text{ bis } x = +\infty.$$

Führen wir hier für y den in Formel (**10**) erhaltenen Ausdruck ein und integriren, so erhalten wir:

(6*) $$d = \frac{1}{\sqrt{N\pi}}\int e^{-\frac{xx}{N}}.x.dx = -\frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{\pi}}.e^{-\frac{xx}{N}} \quad \text{für } x = -\infty \text{ bis } x = +\infty$$

Der Werth dieses Integrals ist

für $x = 0$ gleich $-\frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{\pi}}$,

für $x = \infty$ gleich 0,

also für $x = 0$ bis $x = \infty$ gleich $\frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{\pi}}$,

und für $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ gleich $\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\pi}}$.

Somit ist der durchschnittliche Fehler:

(**14**) $$d = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\pi}} = 0{,}564\,190\,\sqrt{N}.$$

7. Die Quadratsumme aller Fehler erhalten wir, indem wir die Anzahl $k\,y\,dx$, in der die einzelnen Fehler vorkommen, mit dem Quadrat der betreffenden Fehler multipliziren, und alles addiren, indem wir also

(7*) $$[(v)(v)] = \int k\,y\,x^2\,dx = k\int y\,x^2\,dx \quad \text{für } x = -\infty \text{ bis } x = +\infty$$

bilden.

Demnach wird nach Formel (**13**) das Quadrat des mittleren Fehlers:

(8*) $$m^2 = \frac{[(v)(v)]}{n} = \frac{k\int y\,x^2\,dx}{k\int y\,dx} \quad \text{für } x = -\infty \text{ bis } x = +\infty$$

oder, da nach (1*): $\int y\,dx = 1$ für $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ ist,:

(9*) $$m^2 = \int y\,x^2\,dx \quad \text{für } x = -\infty \text{ bis } x = +\infty.$$

Setzen wir hier für y den in Formel (**10**) erhaltenen Ausdruck ein und integriren partiel, so erhalten wir:

(10*) $$m^2 = \frac{1}{\sqrt{N\pi}}\int e^{-\frac{xx}{N}}.x^2\,dx$$
$$= \frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{\pi}}\left(e^{-\frac{xx}{N}}.x + \int e^{-\frac{xx}{N}}.dx\right) \quad \text{für } x = -\infty \text{ bis } x = +\infty.$$

Das erste Glied in der Klammer wird für $x=0$ und für $x=\infty$ gleich Null, fällt also für $x=-\infty$ bis $x=+\infty$ fort, während das zweite Glied gleich $\sqrt{N\pi}\int y\,dx$, oder da nach (1*) das Integral $\int y\,dx = 1$ für $x=-\infty$ bis $x=+\infty$ ist, gleich $\sqrt{N\pi}$, womit:

(11*) $$m^2 = \frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{N\pi} = \frac{1}{2}N,$$

und der mittlere Fehler:

(15) $$m = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{N} = 0{,}707\,107\sqrt{N}$$

wird.

8. Der wahrscheinliche Fehler w ist der Fehler, der in einer Reihe von Beobachtungsfehlern ebenso oft überschritten, wie nicht erreicht wird. Es liegen also ebenso viele Beobachtungsfehler innerhalb der Grenzen $x=-w$ bis $x=+w$, wie aufserhalb dieser Grenzen; demnach ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs ein Beobachtungsfehler vorkommt, der zwischen $x=-w$ und $x=+w$ liegt, gleich $\frac{1}{2}$, oder es ist:

(12*) $$\int y\,dx = \frac{1}{2} \text{ für } x=-w \text{ bis } x=+w,$$

woraus nach Formel (**11**) folgt:

(13*) $$\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{N\pi}}\int\left(1-\frac{x^2}{N}+\frac{1}{2!}\frac{x^4}{N^2}-\frac{1}{3!}\frac{x^6}{N^3}+\frac{1}{4!}\frac{x^8}{N^4}-\cdots\right)dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{\sqrt{N}}-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right)^3+\frac{1}{5\cdot 2!}\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right)^5-\frac{1}{7\cdot 3!}\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right)^7+\frac{1}{9\cdot 4!}\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right)^9\cdots\cdots\right)$$
$$\text{für } x=-w \text{ bis } x=+w.$$

Der Werth dieses Integrals ist

für $x=0$ gleich 0,

für $x=w$ gleich $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{w}{\sqrt{N}}-\frac{1}{3}\left(\frac{w}{\sqrt{N}}\right)^3+\frac{1}{5\cdot 2!}\left(\frac{w}{\sqrt{N}}\right)^5-\frac{1}{7\cdot 3!}\left(\frac{w}{\sqrt{N}}\right)^7+\frac{1}{9\cdot 4!}\left(\frac{w}{\sqrt{N}}\right)^9-\cdots\right)$

also für $x=-w$ bis $x=+w$ gleich dem zweifachen Betrage dieses Ausdrucks, so dafs:

(14*) $$\frac{1}{2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{w}{\sqrt{N}}-\frac{1}{3}\left(\frac{w}{\sqrt{N}}\right)^3+\frac{1}{5\cdot 2!}\left(\frac{w}{\sqrt{N}}\right)^5-\frac{1}{7\cdot 3!}\left(\frac{w}{\sqrt{N}}\right)^7+\frac{1}{9\cdot 4!}\left(\frac{w}{\sqrt{N}}\right)^9-\cdots\right),$$

oder

(15*) $$\frac{1}{4}\sqrt{\pi}=0{,}443\,113=\frac{w}{\sqrt{N}}-\frac{1}{3}\left(\frac{w}{\sqrt{N}}\right)^3+\frac{1}{5\cdot 2!}\left(\frac{w}{\sqrt{N}}\right)^5-\frac{1}{7\cdot 3!}\left(\frac{w}{\sqrt{N}}\right)^7+\frac{1}{9\cdot 4!}\left(\frac{w}{\sqrt{N}}\right)^9-\cdots$$

ist.

Durch Auswerthung dieser Gleichung ergiebt sich:

(16*) $$\frac{w}{\sqrt{N}}=0{,}476\,9363=\omega,\qquad w=0{,}476\,9363\sqrt{N}=\omega\sqrt{N}$$

und für den wahrscheinlichen Fehler:

(16) $$w=0{,}476\,9363\sqrt{N}=\omega\sqrt{N}.$$

Aus den Formeln (**14**), (**15**), (**16**) folgt weiter:

(17) $$d=0{,}797\,885\,m,$$

(18) $$w=0{,}674\,490\,m,$$

wonach der durchschnittliche Fehler d und der wahrscheinliche Fehler w aus dem mittleren Fehler m berechnet werden können.*)

9. Sobald für ein Instrument und eine Beobachtungsart ein Mittelwerth der Beobachtungsfehler bestimmt worden ist, kann jeder Beobachtungsfehler x als ein Vielfaches von einem der Mittelwerthe d, m, oder w dargestellt werden, indem rd,

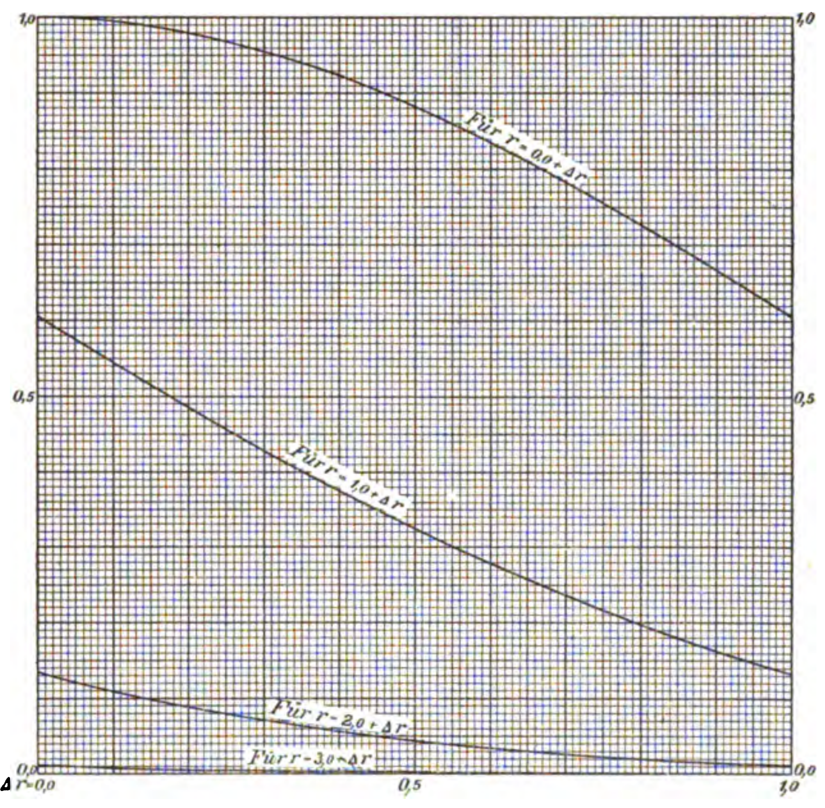


Fig. 1.

rm oder rw für x gesetzt wird, wo r erhalten wird nach: $\frac{x}{d} = r$, $\frac{x}{m} = r$ oder $\frac{x}{w} = r$. Setzen wir dementsprechend in den Formeln (**10**) und (**11**) rd, rm, rw für x und nach den Formeln (**14**), (**15**) und (**16**): $d\sqrt{\pi}$, $m\sqrt{2}$, $\frac{w}{\omega}$ für $\sqrt{N}$, so erhalten wir als Wahrscheinlichkeit W_{rd}, W_{rm}, W_{rw} dafür, daſs ein Beobachtungsfehler vorkommt, der gleich dem $r$fachen Betrage des durchschnittlichen, des mittleren oder des wahrscheinlichen Fehlers ist,:

(17*) $$W_{rd} = \frac{1}{d\pi} \cdot e^{-\frac{r^2}{\pi}},$$

(18*) $$W_{rm} = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{r^2}{2}},$$

(19*) $$W_{rw} = \frac{\omega}{w\sqrt{\pi}} \cdot e^{-(\omega r)^2},$$

oder indem wir durch $\frac{1}{d\pi}$, $\frac{1}{m\sqrt{2\pi}}$, $\frac{\omega}{w\sqrt{\pi}}$ dividiren:

---

*) Ein Beispiel siehe Seite 20.

$$(19)\qquad W_{rd}=e^{-\frac{r^2}{\pi}}=1-\frac{r^2}{\pi}+\frac{1}{2!}\left(\frac{r^2}{\pi}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{r^2}{\pi}\right)^3+\frac{1}{4!}\left(\frac{r^2}{\pi}\right)^4-\cdots,$$

$$(20)\qquad W_{rm}=e^{-\frac{r^2}{2}}=1-\frac{r^2}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{r^2}{2}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{r^2}{2}\right)^3+\frac{1}{4!}\left(\frac{r^2}{2}\right)^4-\cdots,$$

$$(21)\qquad W_{rw}=e^{-(\omega r)^2}=1-(\omega r)^2+\frac{1}{2!}(\omega r)^4-\frac{1}{3!}(\omega r)^6+\frac{1}{4!}(\omega r)^8-\cdots\cdot$$

Für $r=0$ werden W_{rd}, W_{rm}, W_{rw} gleich Eins, wonach durch die letzte Division den Werthen der Wahrscheinlichkeit dafür, dafs ein Fehler rd, rm, rw vorkommt, als Einheit die Wahrscheinlichkeit W_0 dafür zu Grunde gelegt ist, dafs der Beobachtungsfehler Null vorkommt.

Die sich nach Formel (**20**) ergebenden Zahlenwerthe von W_{rm} für $r=0{,}00$ bis $r=4{,}00$ können aus der vorstehenden graphischen Tabelle (Fig. 1) entnommen werden und zwar als Ordinaten der vier Kurvenstücke für die Abscissen r von 0,00 bis 1,00, von 1,00 bis 2,00, von 2,00 bis 3,00, und von 3,00 bis 4,00.

10. Die Wahrscheinlichkeit W^{+a}_{-a} dafür, dafs ein Beobachtungsfehler vorkommt, der zwischen $x=-a$ und $x=+a$ liegt, ist nach (24*) im § 5:

$$(20^*)\qquad W^{+a}_{-a}=\int y\,dx \text{ für } x=-a \text{ bis } x=+a.$$

Den Werth dieses Integrals erhalten wir, indem wir in dem in (14*) rechts stehenden Ausdruck a für w setzen. Damit wird:

$$(21^*)\qquad W^{+a}_{-a}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{a}{\sqrt{N}}-\frac{1}{3}\left(\frac{a}{\sqrt{N}}\right)^3+\frac{1}{5\cdot 2!}\left(\frac{a}{\sqrt{N}}\right)^5-\frac{1}{7\cdot 3!}\left(\frac{a}{\sqrt{N}}\right)^7+\frac{1}{9\cdot 4!}\left(\frac{a}{\sqrt{N}}\right)^9-\cdots\right).$$

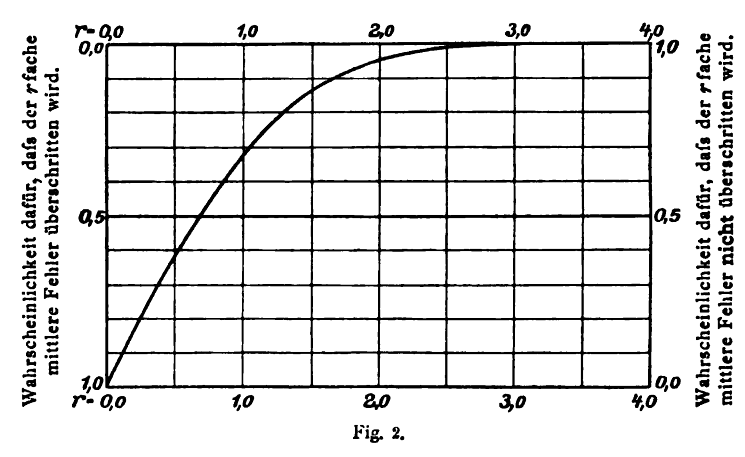


Fig. 2.

Setzen wir nun, wie oben, rd, rm, rw an Stelle von a, und $d\sqrt{\pi}$, $m\sqrt{2}$, $\frac{w}{\omega}$ an Stelle von $\sqrt{N}$, so erhalten wir als Wahrscheinlichkeit W^{+rd}_{-rd}, W^{+rm}_{-rm}, W^{+rw}_{-rw}, dafür, dafs ein Beobachtungsfehler den r fachen Betrag des durchschnittlichen, mittleren oder wahrscheinlichen Fehlers nicht überschreitet:

$$(22)\qquad W^{+rd}_{-rd}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{r}{\sqrt{\pi}}-\frac{1}{3}\left(\frac{r}{\sqrt{\pi}}\right)^3+\frac{1}{5\cdot 2!}\left(\frac{r}{\sqrt{\pi}}\right)^5-\frac{1}{7\cdot 3!}\left(\frac{r}{\sqrt{\pi}}\right)^7+\frac{1}{9\cdot 4!}\left(\frac{r}{\sqrt{\pi}}\right)^9-\cdots\right),$$

$$(23)\qquad W^{+rm}_{-rm}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{r}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3}\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^3+\frac{1}{5\cdot 2!}\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^5-\frac{1}{7\cdot 3!}\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^7+\frac{1}{9\cdot 4!}\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^9-\cdots\right),$$

$$(24)\qquad W^{+rw}_{-rw}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\omega r-\frac{1}{3}(\omega r)^3+\frac{1}{5\cdot 2!}(\omega r)^5-\frac{1}{7\cdot 3!}(\omega r)^7+\frac{1}{9\cdot 4!}(\omega r)^9-\cdots\right),$$

worin $\pi=3{,}141\,592\ldots$, $\omega=0{,}476\,936\ldots$ ist.

Die in den Formeln (**19**) bis (**24**) vorkommenden Reihen konvergiren sämtlich. Sie haben wechselndes Vorzeichen und der Quotient $\frac{G_n}{G_{n-1}}$ der beiden aufeinanderfolgenden Glieder mit $(n-1)!$ und $n!$, der für die ersten 3 Reihen $= \frac{1}{n}(ar)^2$, für die letzten 3 Reihen $= \frac{1}{n}\frac{2n-1}{2n+1}(ar)^2$ ist, wird für endliche Werthe vom r jedenfalls < 1, wenn die Reihen genügend weit fortgesetzt werden.

In der nebenstehenden Figur 2 stellen die zu den Abscissen $r = 0{,}0$ bis $r = 4{,}0$ gehörigen Ordinaten der Kurve, wenn sie von der unteren Abscissenlinie gezählt werden, die Wahrscheinlichkeit W_{-rm}^{+rm} dafür dar, dafs der $r$fache mittlere Fehler nicht überschritten wird, dagegen, wenn sie von der oberen Abscissenlinie gezählt werden, die Wahrscheinlichkeit dafür dar, dafs der $r$fache mittlere Fehler überschritten wird.

§. 7. Untersuchung von Fehlerreihen.

1. Nach dem bisher gewonnenen können wir vorliegende Beobachtungsergebnisse prüfen, indem wir die Beobachtungsfehler bilden und untersuchen, ob sie in genügender Weise den Regeln für das Auftreten der Beobachtungsfehler folgen.

Aus dem Satze, dafs gleich grofse positive und negative Beobachtungsfehler gleich wahrscheinlich sind, folgt erstens, dafs in einer Reihe zufälliger Beobachtungsfehler gleich viel positive und negative Fehler vorkommen müssen, und dafs die Summe der positiven Fehler gleich der Summe der negativen Fehler sein mufs. Wenn diese Gleichheit der Anzahl und Summen der positiven und negativen Fehler in einer Fehlerreihe nicht genügend ist, die Ungleichheiten also nicht als zufällige angesehen werden können, so kann darauf geschlossen werden, dafs die vorliegenden Beobachtungsfehler nicht frei von konstanten Fehlern sind.

Alsdann ist nachzuforschen, aus welchen Fehlerquellen die konstanten Fehler herrühren und auf Grund des Ergebnisses der Nachforschung ist durch Aenderung der Beobachtungsart, Berichtigung der verwendeten Instrumente u. s. w. das fernere Auftreten der konstanten Fehler in den Beobachtungsergebnissen wenn möglich zu verhindern.

In manchen Fällen wird auch die Gröfse der konstanten Fehler ermittelt werden können, und dann werden die Beobachtungsergebnisse davon durch Anbringung entsprechender Verbesserungen befreit werden können, wonach die übrigbleibenden Fehler sich als zufällige Beobachtungsfehler kennzeichnen müssen.

Ferner kann untersucht werden, ob in einer Fehlerreihe die einzelnen Beobachtungsfehler auch wirklich in einer der Wahrscheinlichkeit ihres Vorkommens entsprechenden Anzahl auftreten. Wird für alle Fehler, deren Wahrscheinlichkeit nicht verschwindend klein ist, die Wahrscheinlichkeit W_{rm} nach dem im § 6, Nr. 6 angegebenen Verfahren ermittelt, so wird aus $[W_{rm}]$ und der Anzahl n der vorliegenden Fehler nach: $k = \frac{n}{[W_{rm}]}$ ein Faktor erhalten, womit die einzelnen W_{rm} zu multipliziren sind, um die Zahlen zu erhalten, die angeben, wie oft die Fehler in der vorliegenden Reihe nach dem Fehlergesetz vorkommen sollen.

Beispiel: Bei der Haupttriangulation des Königreichs Sachsen sind nach Seite 484 und 485 des ihre Ergebnisse enthaltenden Druckwerkes die in der nachfolgenden Tabelle in Spalte 1 und 3 angegebenen Dreiecksschlufsfehler so oft vorgekommen, wie in Spalte 2 und 4 angegeben ist.

Der Fehler 0,0 ist 13 mal vorgekommen, aufserdem sind 86 positive und 98 negative Fehler vorgekommen. Die Gesamtzahl der Fehler ist also $n = 13 + 86 + 98 = 197$. Nach Spalte 5 und 6 ist die Summe der positiven Fehler: $+45{,}9$

und die Summe der negativen Fehler: — 46,2; demnach ist die Anzahl und die Summe der positiven Fehler nahezu gleich der Anzahl und der Summe der negativen Fehler, wie es sein mufs.*)

Es kommt vor der Fehler (v)	q_1 mal	(v)	q_2 mal	$+q_1(v)$	$-q_2(v)$	$(q_1+q_2)(v)(v)$	$r=\frac{(v)}{m}$	W_{rm}	$k\,W_{rm}$	$2k\,W_{rm}-(q_1+q_2)$
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
0,0	13			0,0		0,00	0,00	1,000	12,9	−0,1
+0,1	10	−0,1	16	1,0	1,6	0,26	0,16	0,987	12,7	−0,6
+0,2	18	−0,2	14	3,6	2,8	1,28	0,33	0,946	12.2	−7,6
+0,3	9	−0,3	17	2,7	5,1	2,34	0,49	0,886	11,4	−3,2
+0,4	8	−0,4	9	3,2	3,6	2,72	0,66	0,804	10,4	+3,8
+0,5	9	−0,5	9	4,5	4,5	4,50	0,82	0,715	9,2	+0,4
+0,6	7	−0,6	8	4,2	4,8	5,40	0,98	0,619	8,0	+1,0
+0,7	4	−0,7	8	2,8	5,6	5,88	1,15	0,515	6,6	+1,2
+0,8	5	−0,8	4	4,0	3,2	5,76	1,31	0,422	5,4	+1,8
+0,9	2	−0,9	6	1,8	5,4	6,48	1,48	0,334	4,3	+0,6
+1,0	3	−1,0	3	3,0	3,0	6,00	1,64	0,262	3,4	+0,8
+1,1	2	−1,1	.	2,2	.	2,42	1,80	0,198	2,6	+3,2
+1,2	1	−1,2	.	1,2	.	1,44	1,97	0,141	1,8	+2,6
+1,3	2	−1,3	.	2,6	.	3,38	2,13	0,102	1,3	+0,6
+1,4	1	−1,4	1	1,4	1,4	3,92	2,30	0,071	0,9	−0,2
+1,5	3	−1,5	.	4,5	.	6,75	2,46	0,048	0,6	−1,3
+1,6	2	−1,6	1	3,2	1,6	7,68	2,62	0,032	0,4	−2,2
+1,7	.	−1,7	1	.	1,7	2,89	2,79	0,021	0,3	−0,4
+1,8	.	−1,8	.	.	.	.	2,95	0,013	0,2	+0,4
+1,9	.	−1,9	1	.	1,9	3,61	3,11	0,007	0,1	−0,8
+2,0	.	−2,0	.	.	.	.	3,28	0,004	0,1	+0,2
+2,1	.	−2,1	.	.	.	.	3,44	0,003	0,0	0,0
+2,2	.	−2,2	.	.	.	.	3,61	0,001	0,0	0,0
	86		98	45,9	46,2	72,71		7,131	91,9	−0,3
$n=13+86+98=197$				±92,1		$m^2=0{,}369$	$[W_{rm}]=15{,}262$		196,7=$[kW_{rm}]$	
				$d=\pm0{,}47$		$m=\pm0{,}61$	$k=12{,}9$			

Die absolute Summe der Fehler ist: $[\pm(v)]=45{,}9+46{,}2=\pm 92{,}1$, womit sich nach Formel (**12**) der durchschnittliche Fehler $d=\frac{[\pm(v)]}{n}=\frac{\pm 92{,}1}{197}=\pm 0{,}47''$ ergiebt.

In Spalte 7 ist die Quadratsumme der Fehler $[(v)(v)]=72{,}71$ gebildet und nach Formel (**13**) der mittlere Fehler $m=\pm\sqrt{\frac{[(v)(v)]}{n}}=\pm\sqrt{\frac{72{,}71}{197}}=\pm 0{,}61''$ berechnet.

*) Die Dreieckswinkel sind aus den Werthen der Richtungen abgeleitet, die sich nach der Stationsausgleichung ergeben haben. Deshalb gelangt in ihrer algebraischen Summe + 45,9 − 46,2 = − 0,3 nur die algebraische Summe der Fehler der Aufsenwinkel des Dreiecksnetzes zum Ausdruck.

Nach Spalte 1 bis 4 der Tabelle kommen 97 Fehler vor, die kleiner als $\pm 0{,}35''$ und 100 Fehler, die gröfser als $\pm 0{,}35''$ sind, wonach $w = \pm 0{,}35''$ als wahrscheinlicher Fehler angenommen werden kann.

Nach den Formeln (**17**) und (**18**) ergiebt sich für den durchschnittlichen Fehler: $d = 0{,}8\, m = 0{,}8\,(\pm 0{,}61) = \pm 0{,}49''$ und für den wahrscheinlichen Fehler: $w = 0{,}67\, m = 0{,}67\,(\pm 0{,}61) = \pm 0{,}41''$, gegenüber den vorher gewonnenen Werthen $d = \pm 0{,}47''$ und $w = \pm 0{,}35''$.

In Spalte 8 sind die Verhältniszahlen $r = \frac{(v)}{m}$ nachgewiesen, denen in Spalte 9 die aus der graphischen Tabelle im § 6, Nr. 9 entnommenen Zahlen für die Wahrscheinlichkeit W_{rm} dafür beigefügt sind, dafs die in Spalte 1 und 3 aufgeführten Fehler $(v) = rm$ vorkommen. Die Zahlenwerthe von W_{rm} für Fehler, die gröfser sind als $\pm 2{,}2''$, sind bereits so klein, dafs sie hier nicht mehr in Betracht kommen. Die Summe $[W_{rm}]$ für alle Fehler zwischen $+2{,}2''$ und $-2{,}2''$ ergiebt sich aus der Wahrscheinlichkeit 1,000 für $(v) = 0{,}0$ und der doppelten Summe $2 \cdot 7{,}131$ aller Werthe von W_{rm} für $(v) = 0{,}1$ bis $(v) = 2{,}2$, sie ist also $[W_{rm}] = 1{,}000 + 2 \cdot 7{,}131$ $= 15{,}262$, wonach $k = \frac{n}{[W_{rm}]} = \frac{197}{15{,}262} = 12{,}9$ wird.

Die Produkte $k\, W_{rm}$ in Spalte 10 der Tabelle sind dann die Zahlen, die anzeigen, wie oft die in Spalte 1 und 3 nachgewiesenen Fehler nach dem Fehlergesetze vorkommen sollen. Die in ähnlicher Weise wie $[W_{rm}]$ gebildete Summe $[k\, W_{rm}]$ mufs mit n übereinstimmen, was auch der Fall ist. Die Vergleichung der Zahlenwerthe in den Spalten 2, 4 und 10 und die Betrachtung der in Spalte 11 aufgeführten Summen der Differenzen $(k\, W_{rm} - q_1) + (k\, W_{rm} - q_2) = 2\, k\, W_{rm} - (q_1 + q_2)$ giebt einen Anhalt dafür, inwieweit die thatsächlich aufgetretenen Fehler dem Fehlergesetze entsprechen. Wie ersichtlich, kommt nur die eine gröfsere Abweichung vor, dafs die Fehler $+0{,}2$ und $-0{,}2$ 8 mal mehr vorkommen, als nach der Wahrscheinlichkeit für ihr Vorkommen zu erwarten ist; im ganzen entspricht aber das Auftreten der verschiedenen Fehler in der vorliegenden Fehlerreihe ganz gut den dafür gewonnenen Regeln.

§ 8. Fehlergrenzen.*)

1. Nach den Formeln (**22**), (**23**) oder (**24**) erhalten wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs ein Beobachtungsfehler vorkommt, der den r fachen Betrag des durchschnittlichen, des mittleren oder des wahrscheinlichen Fehlers nicht überschreitet. Indem wir die erhaltenen Zahlenwerthe subtrahiren von der Wahrscheinlichkeit $W = 1$ dafür, dafs ein Beobachtungsfehler vorkommt, der diesen Betrag entweder überschreitet oder nicht überschreitet, erhalten wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs ein Beobachtungsfehler vorkommt, der den r fachen Betrag des durchschnittlichen, des mittleren oder des wahrscheinlichen Fehlers überschreitet.

(**25**)

Danach ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs ein Beobachtungsfehler vorkommt, der den r fachen mittleren Fehler		
	nicht überschreitet	überschreitet
für $r = 1{,}0$:	0,682 7,	0,317 3,
„ $r = 2{,}0$:	0,954 5,	0,045 5,
„ $r = 3{,}0$:	0,997 278,	0,002 722,
„ $r = 3{,}5$:	0,999 533 8,	0,000 466 2,
„ $r = 4{,}0$:	0,999 936 62,	0,000 063 38,
„ $r = 5{,}0$:	0,999 999 427,	0,000 000 573.

*) Vergleiche: Ueber den Maximalfehler einer Beobachtung von Helmert in der Zeitschrift für Vermessungswesen, 1877, Seite 131 u. f.

2. Multipliziren wir die Wahrscheinlichkeit W, dafs der $r$fache mittlere Fehler überschritten wird, mit n, so geben uns die Produkte nW an, in wie vielen Fällen unter n Fällen der $r$fache mittlere Fehler wahrscheinlich überschritten wird oder wie viele Fehler in einer Reihe von n Fehlern gröfser sein werden, als der $r$fache mittlere Fehler.

Dividiren wir ferner die Anzahl n aller Fälle durch die Anzahl nW der Fälle, in denen der $r$fache mittlere Fehler überschritten wird, bilden wir also $\frac{n}{nW} = \frac{1}{W}$, so erhalten wir die Anzahl der Fälle, unter denen der Fall, dafs der $r$fache mittlere Fehler überschritten wird, wahrscheinlich einmal vorkommt. Dies ergiebt folgendes:

(**26**)

Unter $n = 1000$ Fehlern wird der $r$fache mittlere Fehler wahrscheinlich überschritten		Dafs der $r$fache mittlere Fehler überschritten wird, kommt wahrscheinlich einmal vor	
für $r = 1,0$:	bei 317,3 Fehlern,	für $r = 1,0$:	bei je 3,1 Fehlern,
„ $r = 2,0$:	„ 45,5 „	„ $r = 2,0$:	„ „ 22,0 „
„ $r = 3,0$:	„ 2,7 „	„ $r = 3,0$:	„ „ 368 „
„ $r = 3,5$:	„ 0,47 „	„ $r = 3,5$:	„ „ 2 150 „
„ $r = 4,0$:	„ 0,063 „	„ $r = 4,0$:	„ „ 15 800 „
„ $r = 5,0$:	„ 0,0006 „	„ $r = 5,0$:	„ „ 1 750 000 „

3. Die vorstehend angeführten Zahlen geben einen genügenden Anhalt für die Festsetzung von Fehlergrenzen, die die Beobachtungsfehler nicht überschreiten dürfen, wenn die Beobachtungsergebnisse weiter verwendet werden sollen.

Nach dem vorangegangenen müssen wir zwar zugeben, dafs sehr grofse Beobachtungsfehler entstehen können durch eine ungünstige Anhäufung einer grofsen Ueberzahl positiver oder negativer Einzelfehler, und dafs wir dem Beobachter für das Eintreffen dieser ungünstigen Fälle kein Verschulden zur Last legen können. Dennoch ist es aber berechtigt, die Beobachtungsergebnisse, bei denen die hervortretenden Fehler eine gewisse Grenze überschreiten, von der weiteren Verwendung auszuschliefsen und durch andere, durch Nachmessung zu gewinnende Beobachtungsergebnisse zu ersetzen; denn das Auftreten der sehr grofsen Fehler ist sehr wenig wahrscheinlich, und es kann mit grofser Wahrscheinlichkeit erwartet werden, dafs das Nachmessungsergebnis nur mit einem innerhalb der bestimmten Grenzen liegenden Fehler behaftet sein werde, falls diese Grenzen zweckentsprechend gewählt sind.

Wir entnehmen nun aus Tabelle (**26**), dafs der 3fache mittlere Fehler wahrscheinlich in 1000 Fällen nur 2,7 mal oder in 368 Fällen einmal überschritten wird. Wenn wir demnach festsetzen, dafs nur solche Beobachtungsergebnisse weiter verwendet werden sollen, deren Fehler höchstens gleich dem 3fachen mittleren Fehler ist, so werden wir zwar wahrscheinlich in 368 Fällen einmal von dem Beobachter eine von ihm nicht direkt verschuldete Nachmessung fordern müssen; wir werden die Berechtigung für diese Forderung aber aus dem Umstande entnehmen, dafs die Wahrscheinlichkeit für die Erlangung eines Beobachtungsergebnisses, dessen Fehler $\leq 3\,m$ ist, sehr grofs, nämlich nach Tabelle (**25**) gleich 0,9973 ist. Das Gleiche trifft nach Tabelle (**26**) einmal zu in 2150 Fällen, wenn wir den 3,5fachen mittleren Fehler, und einmal in 15 800 Fällen, wenn wir den 4fachen mittleren Fehler als höchstens zulässigen Fehler festsetzen.

(27) Demnach kann als Regel gelten, dafs nur solche Beobachtungsergebnisse weiter verwendet werden dürfen, deren Beobachtungsfehler, je nachdem mehr oder minder strenge Anforderungen gestellt werden, den 3 bis 3,5fachen mittleren Fehler nicht überschreiten und dafs nur dann, wenn besondere Umstände dies bedingen, noch solche Beobachtungsergebnisse angenommen zu werden brauchen, deren Fehler den 3,5 bis 4fachen mittleren Fehler erreichen.

§ 9. Fortpflanzung der Beobachtungsfehler.

1. Die Beobachtungsfehler gehen, wie bereits im § 1 erwähnt ist, über auf alle Gröfsen, die aus den Beobachtungsergebnissen abgeleitet werden. Wir müssen deshalb auch feststellen, wie dieser Uebergang erfolgt, oder wie sich die Beobachtungsfehler fortpflanzen, damit wir in der Lage sind, anzugeben, mit welchen Fehlern die aus den Beobachtungsergebnissen abgeleiteten Gröfsen wahrscheinlich behaftet sein werden.

Wenn solche Angaben aber genügend zuverlässig sein sollen, werden wir ihnen in der Regel nicht die zufällig bei den grade vorliegenden Beobachtungsergebnissen hervortretenden einzelnen Fehler zu Grunde legen können. Vielmehr werden wir hierfür Mittelwerthe der Beobachtungsfehler benutzen müssen, die für die betreffenden Beobachtungsarten und Instrumente aus einer gröfseren Reihe von Beobachtungsergebnissen abgeleitet sind.

Wenn beispielsweise in einem Dreieck die drei Winkel und eine Seite gemessen sind und verlangt wird, dafs hiernach nicht nur die Längen der beiden andern Seiten, sondern auch die Fehler angegeben werden, womit diese Längen wahrscheinlich behaftet sein werden, so könnten wir zwar für die Fehler der Winkel einen Werth aus dem zufälligen Widerspruche der Summe der drei Winkel gegen den Sollbetrag von 180° ableiten; es wäre aber völlig verfehlt, den aus dieser Ableitung folgenden Fehler den Fehlerangaben für die berechneten Seiten zu Grunde zu legen. Denn, wie wir gesehen haben, ist es am wahrscheinlichsten, dafs die kleinen Beobachtungsfehler vorkommen und ist es somit auch am wahrscheinlichsten, dafs in dem einzelnen Dreiecksschlufsfehler nur ein kleiner Theil der wirklich vorhandenen Winkelfehler zum Ausdruck gelangt. Für den Fehler der gemessenen Dreiecksseite fehlte es, wenn diese nur einmal gemessen wäre, vollends an jedem Anhalte für die Gröfse des Beobachtungsfehlers; und selbst wenn die Seite etwa 2- oder 3mal gemessen wäre, gäben die hervortretenden Unterschiede der Messungsergebnisse nur einen wenig zuverlässigen Anhalt für die Feststellung der wahrscheinlich vorliegenden Fehler. Wenn dagegen aus einer gröfseren Zahl anderweiter Beobachtungsergebnisse Mittelwerthe der Beobachtungsfehler für die in gleicher Art ausgeführte Dreieckswinkel- und Seitenmessung abgeleitet sind, so wird mit Benutzung dieser Mittelwerthe auch eine zuverlässige Angabe der Fehler gemacht werden können, womit die berechneten Dreiecksseiten wahrscheinlich behaftet sein werden.

2. Als Mittelwerthe von Beobachtungsfehlern haben wir bereits den durchschnittlichen, den mittleren und den wahrscheinlichen Fehler kennen gelernt. Von diesen drei Mittelwerthen eignet sich der mittlere Fehler am besten zur Angabe der den Beobachtungsergebnissen wahrscheinlich anhaftenden Fehler, weil darin die Beobachtungsfehler, woraus der Mittelwerth gebildet wird, mit ihrem quadratischen Betrage, also sehr scharf zum Ausdruck gelangen, während in dem

durchschnittlichen und wahrscheinlichen Fehler nur die einfachen Beträge der Beobachtungsfehler zum Ausdruck kommen. Ferner fällt für die Wahl des mittleren Fehlers noch ins Gewicht, dafs er bereits in sehr grofsem Umfange als Genauigkeitsmafs benutzt wird und bei seiner Annahme alle theoretischen Entwicklungen und alle praktischen Rechnungen in einfacher Weise erledigt werden können.

Die selbstverständliche Folge hiervon ist, dafs wir auch für alle aus den Beobachtungsergebnissen abgeleiteten Gröfsen den mittleren Fehler angeben, womit sie wahrscheinlich behaftet sind. Um dies ausführen zu können, entwickeln wir im folgenden Formeln, wonach der mittlere Fehler einer solchen Gröfse berechnet werden kann, die aus andern Gröfsen abgeleitet ist, deren mittlerer Fehler bekannt ist.

3. Der mittlere Fehler m_x einer Gröfse x kann gefunden werden, indem diese Gröfse wiederholt beobachtet wird, indem sodann aus den Beobachtungsergebnissen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ und dem wahren Werthe (x) der Gröfse die wahren Beobachtungsfehler $(v_1), (v_2), (v_3), \ldots (v_n)$ nach

$$(1^*) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (v_1) = (x) - \lambda_1, \\ (v_2) = (x) - \lambda_2, \\ (v_3) = (x) - \lambda_3, \\ \dots\dots\dots, \\ (v_n) = (x) - \lambda_n \end{array} \right.$$

gebildet werden und der mittlere Fehler m_x berechnet wird nach:

$$(\mathbf{13}) \qquad m_x = \pm \sqrt{\frac{[(v)(v)]}{n}}.$$

Multipliziren wir nun die Gleichungen (1*) mit einer Konstanten a und setzen (X) für $a(x)$, womit

$$(2^*) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a(v_1) = (X) - a\lambda_1, \\ a(v_2) = (X) - a\lambda_2, \\ a(v_3) = (X) - a\lambda_3, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ a(v_n) = (X) - a\lambda_n \end{array} \right.$$

erhalten wird, so können wir $a\lambda_1, a\lambda_2, a\lambda_3, \ldots a\lambda_n$ als Beobachtungsergebnisse zur Bestimmung des mittleren Fehlers M einer Gröfse $X = ax$ und $a(v_1), a(v_2), a(v_3), \ldots a(v_n)$ als die aus diesen Beobachtungsergebnissen folgenden wahren Beobachtungsfehler ansehen, womit wir nach Formel (**13**) für M erhalten:

$$(3^*) \qquad M = \pm \sqrt{\frac{[a(v) \cdot a(v)]}{n}} = \pm a \sqrt{\frac{[(v)(v)]}{n}},$$

oder da $\sqrt{\frac{[(v)(v)]}{n}} = m_x$ ist,:

$$(\mathbf{28}) \qquad M = \pm a m_x.$$

Ist demnach eine Gröfse X aus einer andern Gröfse x durch Multiplikation mit einer Konstanten a abgeleitet, so wird der mittlere Fehler M von X erhalten, indem der mittlere Fehler m_x von x ebenfalls mit der Konstanten a multiplizirt wird.

Beispiel 1: Behufs Bestimmung der Entfernung E zweier Punkte P und P_1 wird mit einem auf P befindlichen Distanzmesser an einer auf P_1 stehenden Latte die Ablesung $l = 0{,}642^{\mathrm{m}}$ gemacht.

Die Entfernung E wird aus der Lattenablesung l gewonnen durch Multiplikation mit einer Konstanten $k = 99{,}5$, so dafs wir

$$E = k\,l = 99{,}5 \cdot 0{,}642\,\text{m} = 63{,}9\,\text{m}$$

erhalten. Der mittlere Fehler m_l von l ist nach den Ergebnissen wiederholter Beobachtungen bekannter Lattenstücke bestimmt zu: $m_l = \pm\, 0{,}2\,\text{mm}$*). Hiernach ist der mittlere Fehler M der Entfernung E nach Formel (**28**):

$$M = \pm\, k m_l = \pm\, 99{,}5 \cdot 0{,}2\,\text{mm} = \pm\, 199\,\text{mm} = \pm\, 0{,}2\,\text{m}.$$

4. Für die zwei Gröfsen x und y ergeben sich die mittleren Fehler m_x und m_y aus den zu ihrer Bestimmung erlangten Beobachtungsergebnissen x_1, x_2, x_3, ... x_n und λ_1, λ_2, λ_3, ... λ_n und den wahren Werthen (x) und (y) der Gröfsen x und y nach:

$$(4^*)\quad \begin{cases} (u_1) = (x) - x_1, \\ (u_2) = (x) - x_2, \\ (u_3) = (x) - x_3, \\ \dots\dots\dots, \\ (u_n) = (x) - x_n, \end{cases} \qquad (6^*)\quad \begin{cases} (v_1) = (y) - \lambda_1, \\ (v_2) = (y) - \lambda_2, \\ (v_3) = (y) - \lambda_3, \\ \dots\dots\dots, \\ (v_n) = (y) - \lambda_n, \end{cases}$$

$$(5^*)\quad m_x = \pm\sqrt{\frac{[(u)(u)]}{n}}, \qquad (7^*)\quad m_y = \pm\sqrt{\frac{[(v)(v)]}{n}}.$$

Addiren wir die Gleichungen (4*) und (6*) und setzen wir (X) für $(x) + (y)$, womit wir

$$(8^*)\quad \begin{cases} (w_1) = (u_1) + (v_1) = (X) - (x_1 + \lambda_1), \\ (w_2) = (u_2) + (v_2) = (X) - (x_2 + \lambda_2), \\ (w_3) = (u_3) + (v_3) = (X) - (x_3 + \lambda_3), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ (w_n) = (u_n) + (v_n) = (X) - (x_n + \lambda_n) \end{cases}$$

erhalten, so können wir $(x_1 + \lambda_1)$, $(x_2 + \lambda_2)$, $(x_3 + \lambda_3)$, ... $(x_n + \lambda_n)$ als Beobachtungsergebnisse zur Bestimmung des mittleren Fehlers M einer Gröfse $X = x + y$ und (w_1), (w_2), (w_3), ... (w_n) als die aus diesen Beobachtungsergebnissen folgenden wahren Beobachtungsfehler ansehen. Danach erhalten wir nach Formel (**13**) und nach (8*):

$$(9^*)\quad M = \pm\sqrt{\frac{[(w)(w)]}{n}} = \pm\sqrt{\frac{[((u)+(v))\,((u)+(v))]}{n}},$$

oder

$$(10^*)\quad M^2 = \frac{[(w)(w)]}{n} = \frac{[(u)(u)]}{n} + \frac{[(v)(v)]}{n} + 2\,\frac{[(u)(v)]}{n}.$$

Nun ist nach (5*) und (7*) $\frac{[(u)(u)]}{n} = m_x^2$ und $\frac{[(v)(v)]}{n} = m_y^2$, während $2\,\frac{[(u)(v)]}{n}$ gleich Null gesetzt werden kann; denn das Auftreten gleich grofser positiver und negativer Beobachtungsfehler und demnach auch das Auftreten gleich grofser posi-

*) Die Konstante k wird hier als fehlerfrei eingeführt in der Voraussetzung, dafs ihr Fehler verhältnismäfsig sehr klein ist, und keinen in Betracht kommenden Beitrag zu dem mittleren Fehler M der Entfernung E liefert. (Vergl. § 40, Nr. 5, wonach der mit Berücksichtigung des mittleren Fehlers m_k von k berechnete Werth des mittleren Fehlers der Entfernung sich zu dem ohne Berücksichtigung von m_k berechneten Werthe verhält, wie $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} : 1$, worin n die Anzahl der Bestimmungen ist, die bei Berechnung von k benutzt sind.)

Ganz ebenso sind auch in den folgenden Beispielen Konstanten oder Mafse als fehlerfrei eingeführt worden, deren Fehler nach vorheriger Feststellung im vorliegenden Falle ohne Einflufs auf das Endergebnis sind.

tiver und negativer Produkte $(u)(v)$ ist gleich wahrscheinlich, und deshalb ist die algebraische Summe $[(u)(v)]$ dieser Produkte immer nahezu gleich Null, also im Verhältnis zu $[(u)(u)]$ und $[(v)(v)]$ um so weniger bedeutend, je gröfser die Anzahl n der Summanden oder der Fehler (u) und (v) ist. Hiernach wird:

$$M^2 = m_x^2 + m_y^2, \quad \text{oder:} \quad M = \pm \sqrt{m_x^2 + m_y^2}. \tag{11*}$$

Zu demselben Ergebnisse gelangen wir für $X = x - y$. Auch können wir unsere Formel erweitern für den Fall, dafs X aus mehr als zwei Gröfsen zusammengesetzt ist, so dafs allgemein für $X = x \pm y \pm z \pm \ldots.$ ist:

$$M = + \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 + \cdots} \tag{29}$$

Ist demnach eine Gröfse X die Summe oder Differenz der Gröfsen $x, y, z, \ldots,$ so ist der mittlere Fehler M von X gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der mittleren Fehler $m_x, m_y, m_z, \ldots.$ von $x, y, z, \ldots..$

Ist $X = x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \ldots. x_n$ und sind die mittleren Fehler $m_1, m_2, m_3, \ldots. m_n$ von $x_1, x_2, x_3, \ldots. x_n$ sämmtlich gleich m, so wird aus Formel (**29**) einfach:

$$M = \pm m \sqrt{n}. \tag{30}$$

Ist demnach eine Gröfse X die Summe oder Differenz von n gleich genauen Gröfsen x, so erhalten wir den mittleren Fehler M von X, indem wir den mittleren Fehler m der Gröfsen x mit der Quadratwurzel aus der Anzahl n der Gröfsen multipliziren.

Beispiel 2: In einem Nivellementszuge mit den Fixpunkten P_1, P_2, P_3, P_4 sind die Höhenunterschiede

zwischen P_1 und P_2 : $\varDelta h_1^2 = 2{,}857^{\mathrm{m}}$,
- P_2 - P_3 : $\varDelta h_2^3 = \times 6{,}214$,
- P_3 - P_4 : $\varDelta h_3^4 = 0{,}580$

und die mittleren Fehler der Höhenunterschiede $\varDelta h_1^2$, $\varDelta h_2^3$, $\varDelta h_3^4$: $m_1 = \pm 4{,}2^{\mathrm{mm}}$, $m_2 = \pm 2{,}8^{\mathrm{mm}}$, $m_3 = \pm 5{,}7^{\mathrm{mm}}$.

Hiernach ist der Gesamthöhenunterschied zwischen P_1 und P_4:

$$\varDelta h_1^4 = \varDelta h_1^2 + \varDelta h_2^3 + \varDelta h_3^4 = 2{,}857 + \times 6{,}214 + 0{,}580 = \times 9{,}651^{\mathrm{m}},$$

und nach Formel (**29**) dessen mittlerer Fehler:

$$M = \pm \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} = \pm \sqrt{4{,}2^2 + 2{,}8^2 + 5{,}7^2} = \pm 7{,}6^{\mathrm{mm}}.$$

Beispiel 3: In einem Dreieck sind die beiden Winkel α und β durch Messung gefunden zu: $\alpha = 59^\circ\, 34'\, 25''$, $\beta = 61^\circ\, 07'\, 00''$. Hiermit ist der dritte Winkel γ berechnet zu: $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 120^\circ\, 41'\, 25'' = 59^\circ\, 18'\, 35''$. Die Winkel α und β sind gleich genau gemessen worden und ihr mittlerer Fehler ist: $m = \pm 8{,}0''$. Dann ist nach Formel (**30**) der mittlere Fehler m_γ des Winkels γ:

$$m_\gamma = \pm m \sqrt{n} = \pm 8{,}0 \sqrt{2} = \pm 11{,}3''.$$

5. Wenn $X = ax \pm by \pm cz \pm \ldots..$ ist, worin $a, b, c, \ldots.$ Konstanten sind, so erhalten wir den mittleren Fehler M von X aus den mittleren Fehlern $m_x, m_y, m_z, \ldots.$ von $x, y, z, \ldots.$ nach den Formeln (**28**) und (**29**) aus:

$$M = \pm \sqrt{(am_x)^2 + (bm_y)^2 + (cm_z)^2 + \cdots\cdot} \tag{31}$$

Ist ferner $X = a(x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \ldots\ldots x_n)$, worin a wieder eine Konstante ist, so erhalten wir den mittleren Fehler M von X aus dem für alle n Grössen x_1, x_2, $x_3, \ldots\ldots x_n$ gleichen mittleren Fehler m nach den Formeln (**28**) und (**30**) aus:

$$M = \pm am\sqrt{n}. \tag{32}$$

Beispiel 4: Zur Bestimmung der Querprofilfläche eines Flusses sind die in nebenstehender Tabelle nachgewiesenen Mafse aufgenommen. Die Abscissen x und die daraus als Unterschiede je zweier aufeinanderfolgenden Abscissen erhaltenen Breiten b sind so genau bestimmt worden, dafs sie als fehlerfrei gelten können, während der mittlere Fehler der Tiefen $m \pm 5$ cm ist.

Nr.	Abscisse x.	Breite b.	Tiefe t.
0	0,0		0,00
1	3,6	3,6	0,40
2	6,1	2,5	0,57
3	8,6	2,5	0,72
4	11,1	2,5	0,82
5	13,6	2,5	0,85
6	16,1	2,5	0,85
7	18,6	2,5	0,78
8	21,1	2,5	0,67
9	23,6	2,5	0,55
10	26,1	2,5	0,45
11	28,6	3,2	0,26
12	31,8	31,8	0,00

Die Fläche F wird mit $b_1 = 3{,}6$, $b = 2{,}5$, $b_{12} = 3{,}2$:

$$F = \frac{1}{2}(b_1 + b)\,t_1 + b\,(t_2 + t_3 + \ldots\ldots t_{10}) + \frac{1}{2}(b + b_{12})\,t_{11}$$

$$= \frac{1}{2}\,.\,6{,}1\,.\,0{,}40 + 2{,}5\,.\,6{,}26 + \frac{1}{2}\,.\,5{,}7\,.\,0{,}26$$

$$= 17{,}61\,\text{qm}.$$

Hiernach ergiebt sich der mittlere Fehler M der Querprofilfläche F nach Formel (**31**) und (**32**) zu:

$$M = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}(b_1+b)\,m\right)^2 + \left(b\,.\,m\sqrt{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(b+b_{12})\,m\right)^2}$$

$$= \pm m\sqrt{\frac{1}{4}(b_1+b)^2 + 9b^2 + \frac{1}{4}(b+b_{12})^2}$$

$$= \pm 0{,}05\sqrt{\frac{1}{4}\,.\,6{,}1^2 + 9\,.\,2{,}5^2 + \frac{1}{4}\,5{,}7^2} = \pm 0{,}43\,\text{qm}.$$

6. Die Gröfsen x, y, z, ..., deren mittlere Fehler m_x, m_y, m_z, ... sind, können wir zerlegen in bestimmte genau bekannte Gröfsen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ... und in die verhältnismäfsig sehr kleinen Gröfsen $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ..., denen dieselben mittleren Fehler zukommen, wie den Gröfsen x, y, z, ... Dementsprechend können wir $X = f(x, y, z, \ldots\ldots)$ zerlegen in $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots\ldots)$ und in die kleinen Gröfsen, um die sich $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots\ldots)$ ändert, wenn sich $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ... um die kleinen Grössen $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... ändern und zwar nach:

$$X = f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots\ldots) + \frac{\partial f}{\partial x}d\mathfrak{x} + \frac{\partial f}{\partial y}d\mathfrak{y} + \frac{\partial f}{\partial z}d\mathfrak{z} + \ldots\ldots$$

Und wenn wir nun auf diesen Ausdruck die Formel (**31**) anwenden, so erhalten wir für den mittleren Fehler M von $X = f(x, y, z, \ldots)$:

$$M = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}m_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}m_y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}m_z\right)^2 + \ldots\ldots} \tag{33}$$

Beispiel 5: Zur Bestimmung des Höhenunterschiedes Δh zweier Punkte und des mittleren Fehlers M dieses Höhenunterschiedes sind die folgenden Messungsergebnisse und deren mittlere Fehler gegeben:

Entfernung der beiden Punkte	$e = 225{,}85$,	$m_e = \pm 4^{cm}$,
Höhenwinkel	$\alpha = +1^\circ 16' 25''$,	$m_\alpha'' = \pm 6''$, $m_\alpha = \frac{1}{\varrho} m_\alpha'' = \pm 0{,}000\,029$,
Instrumentenhöhe	$i = 0{,}875^m$,	$m_i = \pm 0{,}5^{cm}$,
Zielhöhe	$z = 1{,}480^m$,	$m_z = \pm 0{,}8^{cm}$.

Hiernach ist der Höhenunterschied der beiden Punkte:

$$\varDelta h = e\, tg\,\alpha + i - z = 225{,}85 \cdot tg\,(+1^\circ 16' 25'') + 0{,}875 - 1{,}480 = +4{,}416\,^m,$$

und der mittlere Fehler des Höhenunterschiedes nach Formel (**33**):

$$M = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \varDelta h}{\partial e} m_e\right)^2 + \left(\frac{\partial \varDelta h}{\partial \alpha} m_\alpha\right)^2 + \left(\frac{\partial \varDelta h}{\partial i} m_i\right)^2 + \left(\frac{\partial \varDelta h}{\partial z} m_z\right)^2}$$

$$= \pm \sqrt{(tg\alpha \,.\, m_e)^2 + \left(\frac{e}{\cos \alpha^2} m_\alpha\right)^2 + m_i^2 + m_z^2}$$

$$= \pm \sqrt{(0{,}0223 \,.\, 0{,}04)^2 + \left(\frac{226}{1{,}00} \cdot 0{,}000\,029\right)^2 + 0{,}005^2 + 0{,}008^2}$$

$$= \pm \sqrt{(0{,}000\,001 + 0{,}000\,043 + 0{,}000\,025 + 0{,}000\,064}$$

$$= \pm 0{,}012^m = \pm 1{,}2\,^{cm}.$$

§ 10. Gewichte und Fortpflanzung der Gewichte.

1. Der Genauigkeitswerth der Beobachtungsergebnisse und der aus den Beobachtungsergebnissen abgeleiteten Gröfsen wird vielfach auch dadurch ausgedrückt, dafs angegeben wird, welches Gewicht den Beobachtungsergebnissen und den daraus abgeleiteten Gröfsen zukommt. Das Gewicht p einer Gröfse steht zu ihrem mittleren Fehler m in der Beziehung, dafs

$$p = \frac{k}{mm} \tag{1*}$$

ist, worin k eine Konstante ist, die Gewichtskonstante genannt wird.

Die Gewichte sind Verhältniszahlen, die angeben, wie oft die betreffenden Gröfsen in Rechnungen anzusetzen sind, um die Genauigkeit der Gröfsen richtig zu berücksichtigen. Wie dies aufzufassen ist, wollen wir uns durch ein einfaches Beispiel klarlegen.

Ein Winkel sei dreimal mit demselben Theodoliten gleich genau beobachtet worden und es seien dabei die Beobachtungsergebnisse $\alpha_1 = 16^\circ 27' 36''$, $\alpha_2 = 16^\circ 27' 24''$, $\alpha_3 = 16^\circ 27' 12''$ gewonnen.

Dann werden wir das arithmetische Mittel dieser drei Beobachtungsergebnisse

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3} = 16^\circ 27' \frac{36'' + 24'' + 12''}{3} = 16^\circ 27' 24''$$

als den wahrscheinlichsten Werth des Winkels annehmen.

Wenn uns aber nicht die drei einzelnen Beobachtungsergebnisse, sondern die Angaben vorlägen, dafs der Winkel zuerst einmal gemessen worden sei und dabei $x_1 = \alpha_1 = 16^\circ 37' 36''$ erhalten sei, dafs der Winkel dann noch zweimal mit gleicher Genauigkeit gemessen worden sei und sich als arithmetisches Mittel der Ergebnisse dieser beiden Messungen $x_2 = \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} = 16^\circ 27' 18''$ ergeben habe, so hätten wir mit

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = 16^\circ 27' \frac{36'' + 18''}{2} = 16^\circ 27' 27''$$

nicht den wahrscheinlichsten Werth des Winkels und zwar deshalb nicht, weil wir die verschiedene Genauigkeit der Werthe x_1 und x_2 nicht berücksichtigt hätten. Den hierin liegenden Fehler vermeiden wir aber, indem wir aus den mittleren Fehlern m_1 und m_2 der Werthe x_1 und x_2 ihre Gewichte ableiten, und dann x_1 und x_2 so oft ansetzen, wie die Gewichtszahlen anzeigen. Wenn m der mittlere Fehler einer einmaligen Beobachtung des Winkels ist, so ist $m_1 = m$ der mittlere Fehler von $x_1 = \alpha_1$ und nach Formel (**32**): $m_2 = \frac{1}{2} m \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} m$ der mittlere Fehler von $x_2 = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3)$. Dementsprechend sind die Gewichte von x_1 und x_2 nach (1*): $p_1 = \frac{k}{m_1 m_1} = \frac{k}{mm}$ und $p_2 = \frac{k}{m_2 m_2} = \frac{2k}{mm}$ oder, wenn die Gewichtskonstante $k = mm$ genommen wird, $p_1 = 1$ und $p_2 = 2$. Somit ist der wahrscheinlichste Werth des Winkels

$$x = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2} = 16° \, 27' \, \frac{36'' + 2 \cdot 18''}{1 + 2} = 16° \, 27' \, 24'',$$

was auch genau übereinstimmt mit dem Werthe, den wir oben aus den einzelnen Beobachtungsergebnissen α_1, α_2 und α_3 erhalten haben.

2. Die Gewichtskonstante k kann im allgemeinen beliebig angenommen werden, da, wie bereits gesagt ist, die Gewichte Verhältniszahlen sind.

Wir hätten in unserem Beispiel auch $p_1 = \frac{k}{mm} = 24$, also $k = 24\,mm$ setzen können, womit $p_2 = \frac{2k}{mm} = 48$ geworden, x aber unverändert geblieben wäre.

In der Praxis ist aber meistens die Wahl einer bestimmten Gewichtskonstanten durch besondere Umstände bedingt.

Erstens kann für die Wahl der Gewichtskonstanten k entscheidend sein, für die Gewichte p möglichst einfache, die Rechnungen erleichternde Zahlen zu erhalten.

Wir hatten in unserm Beispiele $k = mm$ gesetzt und damit $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ erhalten, also Gewichtszahlen, womit wir die Berechnung von x einfach durchführen konnten. Hätten wir $k = 24\,mm$ gesetzt und damit $p_1 = 24$, $p_2 = 48$, so wäre dadurch die Rechnung unnöthig erschwert worden.

Aehnlich kann auch in verwickelteren praktischen Fällen die Rechnung einfacher und übersichtlicher gestaltet werden, indem für die Gewichtskonstante k passende Werthe gewählt werden.

Wichtiger ist sodann aber noch folgendes: Es ist allgemeiner Brauch die Genauigkeit von verschiedenen Beobachtungen durch Angabe des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit zu bezeichnen, wobei unter dem mittleren Fehler der Gewichtseinheit der mittlere Fehler einer Beobachtung verstanden wird, deren Gewicht gleich Eins ist. Ferner wird auch vielfach der Genauigkeitswerth der Beobachtungsergebnisse oder der daraus abgeleiteten Gröfsen einfach durch Angabe ihres Gewichtes bezeichnet. Alle solche Angaben haben aber nur dann einen allgemeineren Werth, wenn sie sich auf eine allgemein gebräuchliche Gewichtseinheit beziehen.

Wenn beispielsweise von einem Theodoliten gesagt wird, sein mittlerer Fehler sei $\pm 4''$, so hat diese Angabe nur dann allgemeinen Werth, wenn sie sich auf die gebräuchliche Gewichtseinheit bezieht, wenn also $\pm 4''$ der mittlere Fehler einer einmal in beiden Fernrohrlagen beobachteten Richtung ist, deren Gewicht gewöhnlich als Gewichtseinheit genommen wird.

Wenn ferner gesagt wird, die in einem bestimmten Falle ausgeführten Beobachtungen seien noch nicht genügend, weil dadurch erst das Gewicht 5 erreicht

sei, während bei solchen Arbeiten das Gewicht 8 erreicht werden müsse, so hat diese Anführung auch nur dann eine bestimmte Bedeutung, wenn den Gewichtsangaben eine allgemein gebräuchliche Gewichtseinheit zu Grunde liegt.

Allgemein gebräuchliche Gewichtseinheiten sind beispielsweise:

für Längenmessungen das Gewicht einer einmaligen Messung einer Linie von 100m Länge,

für Richtungsmessungen das Gewicht einer einmaligen Beobachtung einer Richtung in beiden Lagen des Fernrohrs,

für Winkelmessungen das Gewicht einer einmaligen Beobachtung eines Winkels in beiden Lagen des Fernrohrs,

für Nivellements das Gewicht eines einmaligen Nivellements einer Strecke von 1 Kilometer Länge.

Durch Festsetzung der Gewichtseinheit wird auch die Gewichtskonstante k bestimmt, denn wenn mit $\mathfrak{p} = 1$ das Gewicht, mit $\mathfrak{m}$ der mittlere Fehler der Gewichtseinheit bezeichnet wird, so ist nach (1*):

$$\mathfrak{p} = \frac{k}{\mathfrak{m}\mathfrak{m}} = 1 \text{ und } k = \mathfrak{m}\mathfrak{m}, \tag{2*}$$

mithin die Gewichtskonstante k gleich dem Quadrate des mittleren Fehlers $\mathfrak{m}$ der Gewichtseinheit.

3. Sind die mittleren Fehler $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$ der Grössen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ bekannt, so ergeben sich die Gewichte $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ von $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ nach (1*) wie folgt:

$$p_1 = \frac{k}{m_1 m_1}, \quad p_2 = \frac{k}{m_2 m_2}, \quad p_3 = \frac{k}{m_3 m_3}, \ldots p_n = \frac{k}{m_n m_n}. \tag{34}$$

Umgekehrt ergeben sich die mittleren Fehler $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$ aus dem mittleren Fehler $\mathfrak{m}$ der Gewichtseinheit und den Gewichten $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$, weil nach (2*) $k = \mathfrak{m}\mathfrak{m}$ ist, wie folgt:

$$m_1 = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_1}}, \quad m_2 = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_2}}, \quad m_3 = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_3}}, \ldots m_n = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_n}}. \tag{35}$$

Bilden wir nach (2*) und den Formeln (**34**) und (**35**) Proportionen, so erhalten wir:

$$(\mathfrak{p} = 1) : p_1 : p_2 : p_3 : \ldots p_n = \frac{1}{\mathfrak{m}\mathfrak{m}} : \frac{1}{m_1 m_1} : \frac{1}{m_2 m_2} : \frac{1}{m_3 m_3} : \ldots \frac{1}{m_n m_n}, \tag{36}$$

und

$$\mathfrak{m} : m_1 : m_2 : m_3 : \ldots m_n = \sqrt{\frac{1}{\mathfrak{p} = 1}} : \sqrt{\frac{1}{p_1}} : \sqrt{\frac{1}{p_2}} : \sqrt{\frac{1}{p_3}} : \ldots \sqrt{\frac{1}{p_n}}. \tag{37}$$

Die Gewichte verhalten sich also zu einander wie die Quadrate der reziproken Werthe der mittleren Fehler, während sich die mittleren Fehler zu einander verhalten wie die Quadratwurzeln aus den reziproken Werthen der Gewichte.

Beispiel 1: Es sind die Streckenlängen $s_1 = 85{,}6$, $s_2 = 115{,}7$, $s_3 = 97{,}0$ gemessen worden. Der mittlere Fehler dieser Längen kann berechnet werden nach $m = \pm 0{,}006\sqrt{s}$. Nehmen wir nun das Gewicht einer Messung einer Strecke von 100m Länge als Gewichtseinheit, so ist der mittlere Fehler der Gewichtseinheit $\mathfrak{m} = \pm 0{,}006\sqrt{100}$ und die Gewichtskonstante $k = 0{,}006^2 \cdot 100$. Somit sind die Gewichte p_1, p_2, p_3 der Streckenlängen s_1, s_2, s_3 nach Formel (**34**):

$$p_1 = \frac{0{,}006^2 \cdot 100}{0{,}006^2 \cdot s_1} = \frac{100}{85{,}6} = 1{,}17, \quad \Big| \quad p_2 = \frac{100}{116} = 0{,}86, \quad \Big| \quad p_3 = \frac{100}{97} = 1{,}03.$$

Beispiel 2: Die Winkel α, β, γ eines Dreiecks sind derart beobachtet worden, dafs ihre Gewichte $p_\alpha = 4{,}5$, $p_\beta = 3{,}0$, $p_\gamma = 6{,}0$ sind. Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist $\mathfrak{m} = \pm 8{,}0''$. Dann sind die mittleren Fehler m_α, m_β, m_γ der Winkel α, β, γ nach Formel (**35**):

$$m_\alpha = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}} = \pm 8{,}0\sqrt{\frac{1}{4{,}5}} = \pm 3{,}8'', \quad m_\beta = \pm 8{,}0\sqrt{\frac{1}{3{,}0}} = \pm 4{,}6'',$$

$$m_\gamma = \pm 8{,}0\sqrt{\frac{1}{6{,}0}} = \pm 3{,}3''.$$

4. In manchen Fällen ist es einfacher oder allein ausführbar, die Gewichte nach gegebenen Verhältniszahlen zu berechnen, anstatt sie aus den mittleren Fehlern abzuleiten. Bezeichnen wir diese Verhältniszahlen für die Gewichtseinheit mit $\mathfrak{z}$, für die Grössen $x_1, x_2, x_3, \ldots . x_n$ mit $z_1, z_2, z_3, \ldots . z_n$, so haben wir:

$$(\mathfrak{p} = 1) : p_1 : p_2 : p_3 : \ldots . p_n = \mathfrak{z} : z_1 : z_2 : z_3 : \ldots . z_n$$

und daraus:

$$(\mathbf{38}) \qquad p_1 = \frac{z_1}{\mathfrak{z}}, \quad p_2 = \frac{z_2}{\mathfrak{z}}, \quad p_3 = \frac{z_3}{\mathfrak{z}}, \quad \ldots . \; p_n = \frac{z_n}{\mathfrak{z}}.$$

Beispiel 3: Behufs Bestimmung der Höhe eines Punktes P sind mit einem Barometer die Höhenunterschiede $\Delta h_1 = 20{,}8^m$, $\Delta h_2 = 35{,}0^m$, $\Delta h_3 = 28{,}0^m$ zwischen dem Punkte P und den Punkten P_1, P_2, P_3, deren Höhen gegeben sind, beobachtet worden. Die Zeitunterschiede zwischen den Beobachtungen der Höhen auf dem Punkte P und den Punkten P_1, P_2, P_3 sind $t_1 = 38'$, $t_2 = 16'$, $t_3 = 50'$. Die Gewichte p_1, p_2, p_3 der Höhenunterschiede Δh_1, Δh_2, Δh_3 sollen proportional den reziproken Werthen der Zeitunterschiede genommen werden und dabei soll als Gewichtseinheit das Gewicht einer Beobachtung eines Höhenunterschiedes in einer Zeit $\mathfrak{t} = 1^h = 60'$ gelten. Dann ist nach Formel (**38**):

$$p_1 = \frac{z_1}{\mathfrak{z}} = \frac{\frac{1}{t_1}}{\frac{1}{\mathfrak{t}}} = \frac{\mathfrak{t}}{t_1} = \frac{60}{38} = 1{,}6, \quad p_2 = \frac{\mathfrak{t}}{t_2} = \frac{60}{16} = 3{,}8, \quad p_3 = \frac{\mathfrak{t}}{t_3} = \frac{60}{50} = 1{,}2.$$

5. Die Verhältniszahlen $z_1, z_2, z_3, \ldots . z_n$ können auch ohne weiteres als Gewichte genommen werden. Es wird damit nur vorläufig eine andere Gewichtseinheit zu Grunde gelegt und an dem ganzen Rechnungsergebnis nur insoweit etwas geändert, als der sich ergebende mittlere Fehler der Gewichtseinheit der mittlere Fehler $\mathfrak{m}_0$ der vorläufig angenommenen Gewichtseinheit ist. Aus $\mathfrak{m}_0$ und dem zu den Gewichten $p_1 = z_1$, $p_2 = z_2$, $p_3 = z_3$, $\ldots . \; p_n = z_n$ gehörigen Gewichte $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{z}$ der Gewichtseinheit, folgt dann der mittlere Fehler $\mathfrak{m}$ der letzteren nach:

$$(\mathbf{39}) \qquad \mathfrak{m} = \pm \mathfrak{m}_0 \sqrt{\frac{1}{\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{z}}}.$$

Beispiel 3: Wenn in dem unter Nr. 4 behandelten Beispiele die Verhältniszahlen $x_1 = \frac{1}{t_1} = \frac{1}{38} = 0{,}026$, $z_2 = \frac{1}{t_2} = \frac{1}{16} = 0{,}062$, $z_3 = \frac{1}{t_3} = \frac{1}{50} = 0{,}020$ ohne weiteres als Gewichte genommen wären und sich damit ein mittlerer Fehler der vorläufigen Gewichtseinheit $\mathfrak{m}_0 = \pm 0{,}12^m$ ergeben hätte, so wäre der mittlere Fehler der in dem Beispiele festgesetzten Gewichtseinheit, wofür $\mathfrak{z} = \frac{1}{\mathfrak{t}} = \frac{1}{60} = 0{,}017$ ist, nach Formel (**39**):

$$\mathfrak{m} = \pm \mathfrak{m}_0 \sqrt{\frac{1}{\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{z}}} = \pm 0{,}12\sqrt{60} = \pm 0{,}93^m.$$

6. Die Formeln für die Fortpflanzung der Gewichte erhalten wir aus den Formeln (**28**) bis (**33**) für die Fortpflanzung der mittleren Fehler, indem wir die in diesen Formeln vorkommenden Ausdrücke quadriren, dann nach (1*): $\frac{k}{p}$ für mm setzen und auf beiden Seiten der sich damit ergebenden Gleichungen durch k dividiren.

Hierdurch erhalten wir für das Gewicht P einer Gröfse X, die aus einer andern Gröfse x vom Gewichte p_x durch Multiplikation mit einer Konstanten a abgeleitet ist, wo also $X = ax$ ist,:

$$\text{(40)} \qquad \frac{1}{P} = a^2 \frac{1}{p_x}.$$

Beispiel 4: Ein Winkel ist mit einem Repetitionstheodoliten beobachtet worden und nach 5maliger Repetition ist dafür der Werth $w_5 = 435^\circ\,18'\,25''$ erhalten. Hieraus ergiebt sich für den Winkel:

$$W = \frac{1}{5} w_5 = \frac{1}{5}(435^\circ\,18'\,25'') = 87^\circ\,03'\,41''.$$

Das Gewicht des beobachteten Werthes w_5 ist festgestellt zu $p_5 = 0{,}24$, woraus nach Formel (**40**) für das Gewicht P des Winkels W folgt:

$$\frac{1}{P} = a^2 \frac{1}{p_5} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{0{,}24} = \frac{1}{6} \text{ und } P = 6.$$

7. Für das Gewicht P einer Gröfse X, die die Summe oder Differenz der Gröfsen $x, y, z, \ldots$ vom Gewichte $p_x, p_y, p_z, \ldots$ ist, die also gebildet ist nach $X = x \pm y \pm z \pm \ldots$, folgt aus Formel (**29**):

$$\text{(41)} \qquad \frac{1}{P} = \frac{1}{p_x} + \frac{1}{p_y} + \frac{1}{p_z} + \cdots$$

Ebenso folgt für das Gewicht P einer Gröfse X, wenn $X = x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \ldots x_n$ ist, und die Gewichte $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ von $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ sämtlich gleich p sind, aus Formel (**30**):

$$\text{(42)} \qquad \frac{1}{P} = n \frac{1}{p}.$$

Beispiel 5: Eine Messungslinie durchschneidet drei verschiedenartige Geländeabschnitte. Die Verhältnisse, unter denen die Messung der Linie ausgeführt ist, sind im ersten Abschnitte, worin eine Strecke von $l_1 = 120{,}52^{\mathrm{m}}$ Länge liegt, ungünstige, im zweiten Theile, worin eine Strecke von $l_2 = 247{,}80^{\mathrm{m}}$ Länge liegt, günstige und im dritten Theile, worin eine Strecke von $l_3 = 84{,}75^{\mathrm{m}}$ Länge liegt, mittlere. Die Gewichte der Streckenlängen l_1, l_2, l_3 sind $p_1 = 0{,}62$, $p_2 = 0{,}60$, $p_3 = 1{,}18$*). Dann erhalten wir für die ganze Länge L der Linie zu:

$$L = l_1 + l_2 + l_3 = 120{,}52 + 247{,}80 + 84{,}75 = 453{,}07,$$

und nach Formel (**41**) für das Gewicht P der ganzen Länge L:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \frac{1}{0{,}62} + \frac{1}{0{,}60} + \frac{1}{1{,}18} = 4{,}13 \text{ oder } P = 0{,}24.$$

Beispiel 6: Das Gewicht der mit einem Nivellirinstrumente ausgeführten Bestimmung des Höhenunterschiedes zwischen zwei je 50^{m} von dem Instrumente entfernten Punkten sei $p = 10$. Dann ergiebt sich für das Gewicht P des Höhen-

*) Die Gewichte entsprechen den zufälligen Fehlern der Längenmessung, die regelmäfsigen Fehler sind hier nicht berücksichtigt.

unterschiedes einer, mit Zielweiten von 50m nivellirten Strecke von 1 Kilometer Länge nach Formel (**42**):

$$\frac{1}{P} = n\frac{1}{p} = 10 \cdot \frac{1}{10} = 1 \text{ oder } P = 1.$$

8. Wenn $X = ax \pm by \pm cz \pm \cdots\cdots$ ist, worin $a, b, c, \ldots.$ Konstante sind, so erhalten wir das Gewicht P von X aus den Gewichten $p_x, p_y, p_z, \ldots.$ von $x, y, z, \ldots.$ nach der aus Formel (**31**) folgenden Formel:

$$\frac{1}{P} = a^2\frac{1}{p_x} + b^2\frac{1}{p_y} + c^2\frac{1}{p_z} + \cdots\cdots \tag{43}$$

Ist ferner $X = a(x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \ldots. x_n)$, worin a wieder eine Konstante ist, so erhalten wir das Gewicht P von X aus dem für alle n Gröfsen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ gleichen Gewichte p nach der aus Formel (**32**) folgenden Formel:

$$\frac{1}{P} = a^2 n \frac{1}{p}. \tag{44}$$

Beispiel 7: In einer Rechnung wird die halbe Summe zweier Winkel $\sigma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ gebraucht. Das Gewicht der beiden Winkelwerthe ist $p = 5$. Dann ergiebt sich für das Gewicht P der halben Winkelsumme σ nach Formel (**44**):

$$\frac{1}{P} = a^2 n\frac{1}{p} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10} \text{ oder } P = 10.$$

9. Für $X = f(x, y, z, \ldots..)$ folgt aus Formel (**33**) für die Berechnung des Gewichtes P von X aus den Gewichten $p_x, p_y, p_z, \ldots.$ von $x, y, z, \ldots.$:

$$\frac{1}{P} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{p_x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \frac{1}{p_y} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \frac{1}{p_z} + \cdots\cdots \tag{45}$$

Beispiel 8: Die drei Seiten eines Dreiecks sind gemessen zu $a = 123{,}62$m, $b = 86{,}80$m, $c = 108{,}05$m. Die Gewichte p_a, p_b, p_c dieser Seitenlängen sind proportional den reziproken Werthen der Seitenlängen und als Gewichtseinheit ist das Gewicht einer Seitenlänge von 100m zu nehmen, so dafs $(p = 1) : p_a : p_b : p_c = \frac{1}{100} : \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$ und $\frac{1}{p_a} = \frac{a}{100} = 1{,}24$, $\frac{1}{p_b} = \frac{b}{100} = 0{,}87$, $\frac{1}{p_c} = \frac{c}{100} = 1{,}08$, ist.

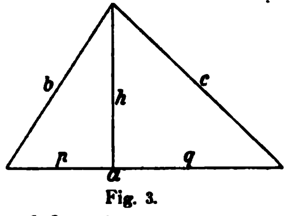


Fig. 3.

Hiernach ergiebt sich für die Höhe und den Höhenfufspunkt:

$$p = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} = 45{,}06\text{m},$$

$$q = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} = 78{,}56\text{m},$$

$$h = \sqrt{b^2 - p^2} = \sqrt{c^2 - q^2} = 74{,}19\text{m}.$$

Die zur Berechnung der Gewichte p_p, p_q, p_h der Stücke p, q, h zu bildenden Differenzialquotienten sind:

$$\frac{\partial p}{\partial a} = \frac{1}{2} - \frac{b^2}{2a^2} + \frac{c^2}{2a^2} = +\frac{1}{a}\left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right) = +\frac{q}{a} = +\frac{78{,}6}{124} = +0{,}63,$$

$$\frac{\partial p}{\partial b} = +\frac{b}{a} = +\frac{86{,}8}{124} = +0{,}70, \qquad \frac{\partial p}{\partial c} = -\frac{c}{a} = -\frac{108}{124} = -0{,}87,$$

$$\frac{\partial q}{\partial a} = \frac{1}{2} + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{c^2}{2a^2} = \frac{1}{a}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right) = +\frac{p}{a} = +\frac{45{,}1}{124} = +0{,}36,$$

$$\frac{\partial q}{\partial b} = -\frac{b}{a} = -0{,}70, \qquad \frac{\partial q}{\partial c} = +\frac{c}{a} = +0{,}87,$$

$$\frac{\partial h}{\partial a} = -\frac{p}{h}\frac{\partial p}{\partial a} = -\frac{45{,}1}{74{,}2}0{,}63 = -0{,}38,$$
$$\frac{\partial h}{\partial b} = +\frac{b}{h} - \frac{p}{h}\frac{\partial p}{\partial b} = \frac{86{,}8}{74{,}2} - 0{,}61 \,.\, 0{,}70 = +0{,}74,$$
$$\frac{\partial h}{\partial c} = -\frac{p}{h}\frac{\partial p}{\partial c} = +0{,}61 \,.\, 0{,}87 = +0{,}53.$$

Hiermit ergeben sich die reziproken Werthe der Gewichte p_p, p_q, p_h nach Formel (**45**) zu:

$$\frac{1}{p_p} = \left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)^2 \frac{1}{p_a} + \left(\frac{\partial p}{\partial b}\right)^2 \frac{1}{p_b} + \left(\frac{\partial p}{\partial c}\right)^2 \frac{1}{p_c}$$
$$= 0{,}63^2 \cdot 1{,}24 + 0{,}70^2 \cdot 0{,}87 + 0{,}87^2 \cdot 1{,}08 = 1{,}75,$$
$$\frac{1}{p_q} = \left(\frac{\partial q}{\partial a}\right)^2 \frac{1}{p_a} + \left(\frac{\partial q}{\partial b}\right)^2 \frac{1}{p_b} + \left(\frac{\partial q}{\partial c}\right)^2 \frac{1}{p_c}$$
$$= 0{,}36^2 \cdot 1{,}24 + 0{,}70^2 \cdot 0{,}87 + 0{,}87^2 \cdot 1{,}08 = 1{,}41,$$
$$\frac{1}{p_h} = \left(\frac{\partial h}{\partial a}\right)^2 \frac{1}{p_a} + \left(\frac{\partial h}{\partial b}\right)^2 \frac{1}{p_b} + \left(\frac{\partial h}{\partial c}\right)^2 \frac{1}{p_c}$$
$$= 0{,}38^2 \cdot 1{,}24 + 0{,}74^2 \cdot 0{,}87 + 0{,}53^2 \cdot 1{,}08 = 0{,}95,$$

und die Gewichte zu:

$$p_p = 0{,}57, \quad p_q = 0{,}71, \quad p_h = 1{,}05.$$

§ 11. Beispiele zum I. Teil.

Beispiel 1: Die Städte Bonn und Godesberg werden durch ein gemeinschaftliches Pumpwerk mit Wasser versehen. Zu dem in Bonn vorhandenen Hochreservoir der Wasserleitung soll ein zweites Hochreservoir in Godesberg möglichst genau in gleicher Höhe erbaut werden. Es soll angegeben werden, wie grofs der Fehler des durch geometrisches Nivellement zu bestimmenden Höhenunterschiedes zwischen dem an dem Bonner Hochreservoir angebrachten Nivellementsbolzen und dem auf dem Grundstück für das Godesberger Hochreservoir gesetzten Bolzenstein voraussichtlich höchstens sein wird.

1. Der Bolzen ◎ 1 an dem Bonner Hochreservoir ist durch zwei Nivellements an die beiden 1km von einander entfernten Bolzensteine 5477 und 5478 der Landesaufnahme angeschlossen worden.

Der Höhenunterschied zwischen ◎ 5478 und ◎ 1 ist bei dem ersten Nivellement erhalten aus 55 Einzelhöhenunterschieden, die bei verschiedenen Zielweiten beobachtet worden sind. Die durchschnittlichen Zielweiten z und die aus anderweitigen umfangreichen Ermittlungen bekannten mittleren Fehler m eines Einzelhöhenunterschiedes bei den betreffenden Zielweiten sind

für 29 Unterschiede: $z = 50^{\mathrm{m}}$, $m = \pm 1{,}2^{\mathrm{mm}}$,
„ 9 „ : $z = 25^{\mathrm{m}}$, $m = \pm 0{,}9^{\mathrm{mm}}$,
„ 17 „ : $z = 12^{\mathrm{m}}$, $m = \pm 0{,}6^{\mathrm{mm}}$.

Hiermit ergiebt sich der mittlere Fehler m_1 des aus dem ersten Nivellement folgenden Höhenunterschiedes Δh_1 zwischen ◎ 5478 und ◎ 1 nach den Formeln (**29**) und (**30**) zu:

$$m_1 = \pm\sqrt{\left(1{,}2\sqrt{29}\right)^2 + \left(0{,}9\sqrt{9}\right)^2 + \left(0{,}6\sqrt{17}\right)^2} = \pm 7{,}4^{\mathrm{mm}}.$$

Bei dem zweiten Nivellement ist der Höhenunterschied zwischen ◎ 5478 und ◎ 1 erhalten aus dem Höhenunterschied der 1km langen Strecke zwischen ◎ 5478 und ◎ 5477, dessen mittlerer Fehler nach der Veröffentlichung der Landesaufnahme zu $\pm 2{,}0^{\mathrm{mm}}$ angenommen werden kann, und 46 Einzelhöhenunterschieden, deren Zielweiten z und mittlere Fehler m sind

für 22 Unterschiede: $z = 50^{m}$, $m = \pm 1{,}2^{mm}$,
„ 5 „ : $z = 25^{m}$, $m = \pm 0{,}9^{mm}$,
„ 19 „ : $z = 12^{m}$, $m = \pm 0{,}6^{mm}$.

Hiermit ergiebt sich der mittlere Fehler m_2 des aus dem zweiten Nivellement folgenden Höhenunterschiedes Δh_2 zwischen ◎ 5478 und ◎ 1 wie oben:

$$m_2 = \pm \sqrt{2{,}0^2 + (1{,}2\sqrt{22})^2 + (0{,}9\sqrt{5})^2 + (0{,}6\sqrt{19})^2} = \pm 6{,}8\,\text{mm}.$$

Der endgültige Höhenunterschied ΔH ist aus Δh_1 und Δh_2 gerechnet nach:

$$\Delta H = \frac{\Delta h_1 + \Delta h_2}{2},$$

so dafs sich der mittlere Fehler M_1 dieses Höhenunterschiedes nach Formel (**31**) ergiebt zu:

$$M_1 = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} m_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} m_2\right)^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} 7{,}4\right)^2 + \left(\frac{1}{2} 6{,}8\right)^2} = \pm 5{,}0\,\text{mm}.$$

2. Der Bolzen ◎ 5478 ist mit der Höhenmarke ○ G. B. der Europäischen Gradmessung auf dem Godesberger Bahnhof, wovon bei der Einnivellirung des Bolzens ◎ 2 beim Godesberger Hochreservoir am zweckmäfsigsten ausgegangen wird, durch eine $L = 6{,}5^{km}$ lange Strecke des mit gleichmäfsigen Zielweiten von $z = 50^{m}$ durchgeführten Nivellements der Landesaufnahme verbunden.

Aus der Länge L einer mit gleichmäfsigen Zielweiten z nivellirten Strecke ergiebt sich die Anzahl n der beobachteten Einzelhöhenunterschiede nach:

$$n = \frac{L}{2z},$$

und damit der mittlere Fehler M des Höhenunterschiedes der Strecke von der Länge L aus dem mittleren Fehler m eines Einzelhöhenunterschiedes nach Formel (**30**) zu:

$$M = \pm m\sqrt{n} = \pm m\sqrt{\frac{L}{2z}}.$$

Wird L in Kilometern genommen, so ist hiernach der mittlere Fehler $\mathfrak{m}$ einer Strecke von 1 Kilometer:

$$\mathfrak{m} = \pm m\sqrt{\frac{1}{2z}}, \quad \text{danach:}$$

$$\frac{M}{\mathfrak{m}} = \frac{\pm m\sqrt{\frac{L}{2z}}}{\pm m\sqrt{\frac{1}{2z}}} = \sqrt{L} \quad \text{und somit:}$$

$$M = \pm \mathfrak{m}\sqrt{L}.$$

Der mittlere Eehler M einer mit gleichmäfsigen Zielweiten nivellirten Strecke von L Kilometer Länge ist also gleich dem mittleren Fehler $\mathfrak{m}$ einer Strecke von 1 Kilometer Länge multiplizirt mit der Quadratwurzel aus der Länge L der Strecke.

Hiernach folgt der mittlere Fehler M_2 der $L = 6{,}5^{km}$ langen Strecke zwischen ◎ 5478 und ○ G. B. mit dem nach den Veröffentlichungen der Landesaufnahme angenommenen mittleren Fehler $\mathfrak{m} = \pm 2{,}0^{mm}$ für 1 Kilometer zu:

$$M_2 = \pm \mathfrak{m}\sqrt{L} = \pm 2{,}0\sqrt{6{,}5} = \pm 5{,}1\,\text{mm}.$$

3. Der Höhenunterschied zwischen ○ G. B. und ◎ 2 beim Godesberger Hochreservoir kann nach angestellten Ermittlungen nivellirt werden

in 3 Aufstellungen mit Zielweiten von 50 m,
„ 6 „ „ „ „ 25 m,
und „ 20 „ „ „ „ 12 m.

Es können dasselbe Nivellirinstrument und dieselben Latten benutzt werden, wie bei den Nivellements zwischen ◎ 5478 und ◎ 1, so dafs dieselben mittleren Fehler angesetzt werden können, wie unter Nr. 1 und ein konstanter Längenfehler der Latten nicht berücksichtigt zu werden braucht.

Demnach ergiebt sich der mittlere Fehler m des aus einem einmaligen Nivellement folgenden Höhenunterschiedes zwischen ○ G. B. und ◎ 2 wie unter Nr. 1 zu

$$m = \pm\sqrt{(1{,}2\sqrt{3})^2 + (0{,}9\sqrt{6})^2 + (0{,}6\sqrt{20})^2} = \pm 4{,}0 \text{ mm}.$$

Das Nivellement wird, um grobe Fehler auszuschliefsen, zweimal in gleicher Weise durchgeführt. Das arithmetische Mittel der Ergebnisse beider Messungen wird als endgültiger Höhenunterschied genommen, wonach dessen mittlerer Fehler M_3 nach Formel (**32**) sein wird:

$$M_3 = \pm\frac{1}{2}\, m\sqrt{2} = \pm\frac{1}{2}\, 4{,}0\sqrt{2} = \pm 2{,}8 \text{ mm}.$$

4. Aus den mittleren Fehlern $M_1 = \pm 5{,}0$ mm, $M_2 = \pm 5{,}1$ mm, $M_3 = \pm 2{,}8$ mm der Höhenunterschiede zwischen ◎ 1 und ◎ 5478, ◎ 5478 und ○ G. B., ○ G. B. und ◎ 2 wird der mittlere Fehler M des Gesamthöhenunterschiedes zwischen ◎ 1 und ◎ 2 nach Formel (**29**) erhalten zu:

$$M = \pm\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = \pm\sqrt{5{,}0^2 + 5{,}1^2 + 2{,}8^2} = \pm 7{,}7 \text{ mm}.$$

Wird der voraussichtlich höchstens vorkommende Fehler nach der im § 8 gewonnenen Regel (**27**) gleich dem 4 fachen Betrage des mittleren Fehlers angenommen, so ergiebt er sich zu: $4M = \pm 4 \cdot 7{,}7 = \pm 30{,}8$ mm oder rund zu: ± 3 Centimeter.

Beispiel 2: Für den Höhenunterschied Δh zweier Punkte P und P_1 ergiebt sich aus dem Höhenwinkel $\alpha = +2°16'30''$ der Ziellinie nach dem Nullpunkte einer auf P_1 stehenden Latte und dem Höhenwinkel $\alpha_1 = +3°35'15''$ der Ziellinie nach einer im Abstande $l = 4{,}000$ m vom Nullpunkte an der Latte angebrachten Zielscheibe:

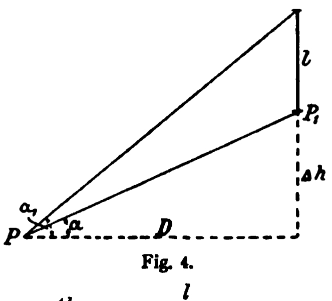


Fig. 4.

$$\Delta h = D\, tg\,\alpha, \quad | \quad \Delta h + l = D\, tg\,\alpha_1,$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta h + l} = tg\,\alpha\, cotg\,\alpha_1,$$

$$\Delta h = \frac{l}{cotg\,\alpha\, tg\,\alpha_1 - 1} = \frac{4{,}000}{cotg(+2°16'30'')\, tg(+3°35'15'') - 1} = +6{,}919 \text{ m}.$$

Aus dem mittleren Fehler $m_{\alpha''} = \pm 8''$ oder $m_\alpha = \frac{1}{\varrho} m_{\alpha''} = \pm 0{,}000039$ der beiden Höhenwinkel α und dem mittleren Fehler $m_l = \pm 0{,}2$ mm $= \pm 0{,}0002$ m des Lattenstücks l ergiebt sich dann der mittlere Fehler M des Höhenunterschiedes Δh mit den partiellen Differentialquotienten des Ausdrucks für Δh nach α, α_1 und l:

$$\frac{\partial \Delta h}{\partial l} = +\frac{1}{cotg\,\alpha\, tg\,\alpha_1 - 1} = +\frac{\Delta h}{l} = +1{,}73,$$

$$\frac{\partial \Delta h}{\partial \alpha} = +\frac{l}{(cotg\,\alpha\, tg\,\alpha_1 - 1)^2} \cdot \frac{tg\,\alpha_1}{sin\,\alpha^2} = +\Delta h^2 \cdot \frac{tg\,\alpha_1}{l\, sin\,\alpha^2} = +476{,}1,$$

$$\frac{\partial \Delta h}{\partial \alpha_1} = -\frac{l}{(cotg\,\alpha\, tg\,\alpha_1 - 1)^2} \cdot \frac{cotg\,\alpha}{cos\,\alpha_1^2} = -\Delta h^2 \cdot \frac{cotg\,\alpha}{l\, cos\,\alpha_1^2} = -302{,}4,$$

nach Formel (**33**) zu:

$$M = \pm \sqrt{(1{,}73 \cdot 0{,}0002)^2 + (476 \cdot 0{,}000\,039)^2 + (302 \cdot 0{,}000\,039)^2} = \pm 0{,}022\,\mathrm{m}.$$

Beispiel 3: Bei einer Dreieckswinkelmessung werden zwei verschiedene Theodolite I und II verwendet. Der mittlere Fehler einer einmal in beiden Lagen des Fernrohrs beobachteten Richtung ist für den Theodoliten I: $m_I = \pm 1{,}5''$, für den Theodoliten II: $m_{II} = \pm 2{,}4''$. Es soll angegeben werden, wie oft die Beobachtungen der Winkel mit dem Theodoliten II wiederholt werden müssen, damit die Beobachtungsergebnisse ebenso genau werden, wie bei einer 8maligen Beobachtung der Winkel mit dem Theodoliten I, und wie grofs das Gewicht und der mittlere Fehler der als arithmetisches Mittel aus sämtlichen Beobachtungsergebnissen gebildeten endgültigen Winkelwerthe ist. Hierbei ist das Gewicht einer einmaligen, in beiden Lagen des Fernrohrs ausgeführten Beobachtung eines Winkels mit dem Theodoliten I als Gewichtseinheit zu nehmen.

1. Ein Winkel w wird aus den beobachteten Richtungen r_l und r_r für den linken und den rechten Winkelschenkel erhalten nach:

$$w = r_r - r_l.$$

Somit wird der mittlere Fehler m_w eines Winkels aus dem mittleren Fehler m_r einer Richtung nach Formel (**30**) erhalten zu:

$$m_w = \pm m_r \sqrt{2}.$$

Hiernach finden wir als mittleren Fehler $\mathfrak{m}$ der Gewichtseinheit oder eines einmal mit dem Theodoliten I in beiden Fernrohrlagen beobachteten Winkels:

$$\mathfrak{m} = \pm m_I \sqrt{2} = \pm 1{,}5 \sqrt{2} = \pm 2{,}1''$$

und als mittleren Fehler $m_{w_{II}}$ eines einmal mit dem Theodoliten II in beiden Fernrohrlagen beobachteten Winkels:

$$m_{w_{II}} = \pm m_{II} \sqrt{2} = \pm 2{,}4 \sqrt{2} = \pm 3{,}4''.$$

Die Gewichtskonstante $k = \mathfrak{m}\mathfrak{m}$ ist:

$$k = \mathfrak{m}\mathfrak{m} = 1{,}5^2 \cdot 2 = 4{,}5$$

und das Gewicht p_{II} eines mit dem Theodoliten II beobachteten Winkels nach Formel (**34**):

$$p_{II} = \frac{k}{m_{w_{II}} m_{w_{II}}} = \frac{1{,}5^2 \cdot 2}{2{,}4^2 \cdot 2} = \frac{2{,}25}{5{,}76} = 0{,}39.$$

2. Der endgültige Werth W eines Winkels ergiebt sich als arithmethisches Mittel aus n Beobachtungsergebnissen $w_1, w_2, w_3, \ldots w_n$ zu:

$$W = \frac{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots w_n}{n},$$

und das Gewicht P des endgültigen Werthes W aus dem Gewichte p der Beobachtungsergebnisse nach Formel (**44**) zu:

$$\frac{1}{P} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot n \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{np} \text{ oder } P = np.$$

Hiernach wird das Gewicht P_I der endgültigen Werthe W_I, die aus $n_I = 8$ mit dem Theodoliten I gewonnenen Beobachtungsergebnissen vom Gewichte $\mathfrak{p} = 1$ abgeleitet werden:

$$P_I = n_I\, \mathfrak{p} = 8 \cdot 1 = 8$$

und das Gewicht P_{II} der endgültigen Werthe W_{II}, die aus n_{II} mit dem Theodoliten II gewonnenen Beobachtungsergebnissen vom Gewichte $p_{II} = 0{,}39$ abgeleitet werden:

$$P_{II} = n_{II}\, p_{II} = n_{II} \cdot 0{,}39.$$

Soll nun, wie verlangt, die Genauigkeit der mit dem Theodoliten I und II gewonnenen Endergebnisse W_I und W_{II} gleich sein, so müssen auch die Gewichte $P_I = 8$ und $P_{II} = n_{II} \cdot 0{,}39$ gleich sein, oder es mufs sein:

$$n_{II} \cdot 0{,}39 = 8 \text{ und } n_{II} = \frac{8}{0{,}39} = 20{,}5 \text{ oder rund } = 21,$$

wonach die Winkel 21 mal mit dem Theodoliten II beobachtet werden müssen, damit die Beobachtungsergebnisse ebenso genau werden, wie bei einer 8maligen Beobachtung der Winkel mit dem Theodoliten I.

Der mittlere Fehler M der endgültigen Werthe W_I und W_{II} ergiebt sich aus dem mittleren Fehler m der Gewichtseinheit und den Gewichten $P_I = P_{II} = n_I = 8$ nach Formel (**35**) zu:

$$M = \pm m \sqrt{\frac{1}{n_I}} = \pm 2{,}1 \sqrt{\frac{1}{8}} = \pm 0{,}74''$$

oder aus dem mittleren Fehler $m_{w_{II}} = \pm 3{,}4''$, wenn wir den Beobachtungen mit dem Theodoliten II das Gewicht = 1 beilegen und demnach das Gewicht von W_{II} mit $n_{II} = 21$ einsetzen, zu:

$$M = \pm m_{w_{II}} \sqrt{\frac{1}{n_{II}}} = \pm 3{,}4 \sqrt{\frac{1}{21}} = \pm 0{,}74''.$$

Beispiel 4: Die Entfernung b eines auf dem rechten Rheinufer liegenden Punktes P_a von einem auf dem linken Rheinufer liegenden Punkte P_b soll durch Messungen am linken Rheinufer derart bestimmt werden, dafs der mittlere Fehler m_b nicht gröfser als $\pm 0{,}04^m$ wird.

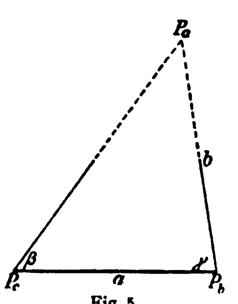


Fig. 5.

Der Punkt P_a kann von dem Punkte P_b und von einem rund 350^m von P_b entfernten Punkte P_c anvisiert werden. Zur Messung der Entfernung a zwischen P_b und P_c stehen Latten zur Verfügung, deren Länge nach Normalmafsstäben geprüft ist und mit denen die Entfernung a auf dem nahezu horizontalen Leinpfad so genau gemessen werden kann, dafs der mittlere Fehler einer einmaligen Messung $m_a = \pm 0{,}004\sqrt{a} = \pm 0{,}004\sqrt{350} = \pm 0{,}075^m$ sein wird. Zur Messung der Winkel β und γ auf P_c und P_b steht ein Theodolit zur Verfügung, für den der mittlere Fehler einer einmaligen Messung eines Winkels in beiden Fernrohrlagen festgestellt ist zu: $m'' = \pm 8''$ oder $m = \frac{1}{\varrho} m'' = \pm 0{,}000\,039$. Die Winkel β und γ sind ungefähr bestimmt zu: $\beta = 52^\circ 20'$, $\gamma = 83^\circ 00'$.

Es soll angegeben werden, wie oft die Messung der Entfernung und der Winkel zu wiederholen ist, damit die verlangte Genauigkeit erreicht wird.

Die Entfernung b wird erhalten zu:

$$b = a \frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)} = 350 \cdot \frac{\sin 52^\circ 20'}{\sin 135^\circ 20'} = 350 \cdot \frac{0{,}792}{0{,}703} = 350 \cdot 1{,}13 = 396^m.$$

Die zur Anwendung der Formel (**33**) für die Berechnung des mittleren Fehlers m_b der Entfernung b erforderlichen Zahlenwerthe der Differenzialquotienten ergeben sich wie folgt:

$$\frac{\partial b}{\partial a} = \frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{\sin 52^\circ 20'}{\sin 135^\circ 20'} = \frac{0{,}792}{0{,}703} = 1{,}13,$$

$$\frac{\partial b}{\partial \beta} = a \cdot \frac{\sin(\beta+\gamma)\cos\beta - \sin\beta\cos(\beta+\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)^2}$$

$$= a \frac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)^2} = a \frac{\sin 83^\circ 00'}{(\sin 135^\circ 20')^2} = 350 \frac{0{,}993}{0{,}703^2} = 704,$$

$$\frac{\partial b}{\partial \gamma} = -a \frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)^2}\cos(\beta+\gamma) = -b\,\mathrm{cotg}(\beta+\gamma) =$$

$$= -396 \cdot \mathrm{cotg}\,135^\circ 20' = +396 \cdot 1{,}012 = 401.$$

Wird die Messung der Entfernung a n_a mal ausgeführt und wird das arithmetische Mittel der n_a Messungsergebnisse als endgültiger Werth von a angenommen, so wird der mittlere Fehler dieses Werthes nach Formel (**32**):

$$\pm \frac{1}{n_a} m_a \sqrt{n_a} = \pm m_a \sqrt{\frac{1}{n_a}} = \pm 0{,}075 \sqrt{\frac{1}{n_a}}$$

sein. Ebenso wird, wenn die Winkel β und γ n mal gemessen werden und die arithmetischen Mittel der n Messungsergebnisse als endgültige Werthe der Winkel angenommen werden, der mittlere Fehler dieser Werthe $\pm m\sqrt{\frac{1}{n}} = \pm 0{,}000\,039\sqrt{\frac{1}{n}}$ sein. Danach ergiebt sich der mittlere Fehler m_b der Entfernung b nach Formel (**33**) wie folgt:

$$m_b = \pm\sqrt{\left(1{,}13 . 0{,}075\sqrt{\frac{1}{n_a}}\right)^2 + \left(704 . 0{,}000\,039\sqrt{\frac{1}{n}}\right)^2 + \left(401 . 0{,}000\,039\sqrt{\frac{1}{n}}\right)^2}$$

$$= \pm\sqrt{0{,}007\,18\,\frac{1}{n_a} + 0{,}001\,00\,\frac{1}{n}}$$

Der mittlere Fehler m_b soll nicht gröſser als $\pm 0{,}04^m$ sein. Setzen wir den Werth 0,04 für m_b in die obige Gleichung ein und quadriren, so erhalten wir:

$$0{,}0016 = 0{,}007\,18\,\frac{1}{n_a} + 0{,}001\,00\,\frac{1}{n}.$$

Nach dieser Gleichung können n_a und n festgesetzt werden. Wird bestimmt, daſs die Entfernung a und die Winkel β und γ gleich oft gemessen werden sollen, daſs also $n_a = n$ sein soll, so folgt aus obiger Gleichung, daſs die Messungen

$$n_a = n = \frac{0{,}007\,18 + 0{,}001\,00}{0{,}0016} = 5 \text{ mal auszuführen sind.}$$

Würde bestimmt, daſs die Entfernung a $n_a = 4$ mal gemessen werden solle, so würde der aus dem mittleren Fehler des endgültigen Werthes von a herrührende Theilbetrag $0{,}007\,18\frac{1}{n_a}$ des Quadrates des mittleren Fehlers m_b der Entfernung b gleich $0{,}007\,18\,\frac{1}{4} = 0{,}0018$, also bereits gröſser als der für m_b^2 festgesetzte Betrag 0,0016. Demnach wird also m_b nur dann nicht gröſser als $\pm 0{,}04^m$, wenn die Entfernung a mindestens 5 mal gemessen wird.

Beispiel 5: **1.** Die Geschwindigkeit v des Wassers in einer Sekunde wird aus der Anzahl t der Touren, die ein Woltmannscher Flügel in der Zeit z macht und aus den Konstanten α und β des Flügels erhalten nach:

$$v = \alpha + \beta\frac{t}{z}.$$

Hieraus folgt für den mittleren Fehler m_v der Geschwindigkeit v nach Formel (**33**):

$$m_v = \pm\sqrt{m_\alpha{}^2 + \left(\frac{t}{z} m_\beta\right)^2 + \left(\frac{\beta}{z} m_t\right)^2 + \left(\beta\frac{t}{z^2} m_z\right)^2}.$$

Ist $\alpha = +0{,}025$, $\beta = +0{,}278$, $t = 100$, $z = 22{,}2''$, also

$$v = +0{,}025 + 0{,}278\,\frac{100}{22{,}2} = 1{,}277^m,$$

und $m_\alpha = \pm 0{,}00\,47$, $m_\beta = \pm 0{,}00\,108$, $m_t = 0$, $m_z = \pm 1{,}3''$, so wird:

$$m_v = \pm\sqrt{0{,}00\,47^2 + \left(\frac{100}{22{,}2}\,0{,}00\,108\right)^2 + \left(\frac{0{,}278}{22{,}2} \cdot 0{,}0\right)^2 + \left(0{,}278\,\frac{100}{22{,}2^2}\,1{,}3\right)^2}$$

$$= \pm\sqrt{0{,}00\,00\,22 + 0{,}00\,00\,24 + 0{,}0 + 0{,}00\,53\,73} = \pm 0{,}074^m.$$

2. Werden die in einer Vertikalen bei den Tiefen $T_0 = 0$, T_1, $T_2, \ldots . T_n$, T_s ermittelten Wassergeschwindigkeiten v_0, v_1, $v_2, \ldots .$ v_n, v_s als Ordinaten zu den, als Abscissen genommenen Tiefen T aufgetragen, so stellt die durch die Abscissenlinie, durch die Ordinaten v_0 der Oberfläche und v_s der Sohle sowie durch die Verbindungslinien der Endpunkte der Ordinaten v_0, v_1, v_2, ... v_n, v_s begrenzte Fläche die Vertikalgeschwindigkeitsfläche dar. Der Inhalt F dieser Fläche wird erhalten nach:

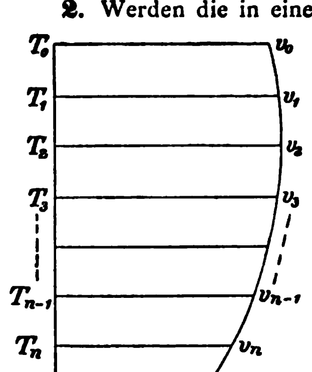


Fig. 6.

$$F = \frac{1}{2}\left(v_0 T_1 + v_1 T_2 + v_2 (T_3 - T_1) + \cdots v_{n-1}(T_n - T_{n-2}) + v_n (T_s - T_{n-1}) + v_s (T_s - T_n)\right).$$

Die Tiefen T können so genau ermittelt werden, dafs deren Fehler hier nicht berücksichtigt zu werden brauchen. Wird dann als mittlerer Fehler m_v der Geschwindigkeiten ein den Geschwindigkeiten v_0, v_1, $v_2, \cdots v_n$, v_s entsprechender Mittelwerth genommen, so ergiebt sich für den mittleren Fehler m_F der Vertikalgeschwindigkeitsfläche nach Formel (**31**):

$$m_F = \pm \frac{1}{2} m_v \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + (T_3 - T_1)^2 + \cdots (T_n - T_{n-2})^2 + (T_s - T_{n-1})^2 + (T_s - T_n)^2}$$

Die Vertikalgeschwindigkeitsfläche F ergiebt sich für:

$v_0 = 0{,}786$, $T_1 = 0{,}10$, $v_1 = 0{,}781$, $T_2 = 0{,}20$, $v_2 = 0{,}739$, $T_3 = 0{,}30$, $v_3 = 0719$, $T_4 = 0{,}45$, $v_4 = 0{,}581$, $v_s = 0{,}305$, $T_s = 0{,}63$ zu:

$$F = \frac{1}{2}(0{,}786 \cdot 0{,}1 + 0{,}781 \cdot 0{,}2 + 0{,}739 \cdot 0{,}2 + 0{,}719 \cdot 0{,}25 + 0{,}581 \cdot 0{,}33 + 0{,}305 \cdot 0{,}18)$$
$$= 0{,}405 \text{ qm}$$

und ihr mittlerer Fehler m_F mit $m_v = \pm 0{,}066^m$ zu:

$$m_F = \pm \frac{1}{2}\, 0{,}066 \sqrt{0{,}1^2 + 0{,}2^2 + 0{,}2^2 + 0{,}25^2 + 0{,}33^2 + 0{,}18^2} = \pm 0{,}018 \text{ qm}.$$

3. Aus der Vertikalgeschwindigkeitsfläche F und der Sohlentiefe T_s ergiebt sich die mittlere Vertikalgeschwindigkeit V nach:

$$V = \frac{F}{T_s}$$

und somit der mittlere Fehler m_V der mittleren Vertikalgeschwindigkeit nach Formel (**28**):

$$m_V = \frac{1}{T_s} m_F .$$

Für obiges Beispiel wird:

$$V = \frac{0{,}405}{0{,}63} = 0{,}643^m \text{ und } m_V = \pm \frac{1}{0{,}63} 0{,}018 = \pm 0{,}029^m.$$

4. Der Flächeninhalt f_n eines einzelnen Streifens des Querprofils, in dessen vertikaler Mittellinie die Geschwindigkeitsmessung ausgeführt wird, ergiebt sich aus der Breite b_n des Streifens und aus den Tiefen T_{n-1} und T_n an den Grenzen des Streifens nach:

$$f_n = \frac{1}{2} b_n (T_{n-1} + T_n).$$

Die Breite b_n des Streifens kann so genau ermittelt werden, dafs ihr mittlerer Fehler $m_b = 0$ genommen werden kann. Dann ergiebt sich für den mittleren Fehler m_f der Fläche aus dem mittleren Fehler m_T der Tiefen T nach Formel (**32**):

$$m_f = \pm \frac{1}{2} b_n m_T \sqrt{2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} b_n m_T .$$

Ferner wird die Wassermenge q_n, die in der Sekunde durch einen einzelnen Querprofilstreifen fliefst, aus der Fläche f_n des Streifens und aus der mittleren Vertikalgeschwindigkeit V_n erhalten nach:

$$q_n = f_n V_n$$

und der mittlere Fehler m_q der Wassermenge q_n aus dem mittleren Fehler m_f der Fläche f_n und dem mittleren Fehler m_V der Geschwindigkeit V nach Formel (**33**) zu:

$$m_q = \pm \sqrt{(V_n m_f)^2 + (f_n m_V)^2}.$$

Die Gesammtwassermenge Q, die in einer Sekunde durch das ganze Querprofil fliefst, ist gleich der Summe der durch die einzelnen Querprofilstreifen fliefsenden Wassermengen q_n und demnach der mittlere Fehler m_Q der Gesammtwassermenge Q nach Formel (**29**) gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der mittleren Fehler m_q der einzelnen Wassermengen m_q.

Hiernach wird die Wassermenge Q, die in einer Sekunde durch das, bereits im § 9, Nr. 5 behandelte Querprofil fliefst, und ihr mittlerer Fehler m_Q wie folgt erhalten:

Nr.	Breite b.	Tiefe T.	Fläche f.	Geschwindigkeit V.	Wassermenge q.	Mittler Fehler m_f.	Mittler Fehler m_V.	$(Vm_f)^2$.	$(fm_V)^2$.
0		0,00				±	±		
1	3,6	0,40	0,72	0,182	0,131	0,090	0,040	0,00 027	0,00 083
2	2,5	0,57	1,21	0,438	0,530	0,089	0,035	152	180
3	2,5	0,72	1,61	0,643	1,035	0,089	0,029	327	218
4	2,5	0,82	1,92	0,810	1,555	0,089	0,027	520	268
5	2,5	0,85	2,09	1,036	2,165	0,089	0,024	850	252
6	2,5	0,85	2,12	1,157	2,453	0,089	0,023	0,01 061	238
7	2,5	0,78	2,04	1,019	2,079	0,089	0,025	0,00 823	260
8	2,5	0,67	1,81	0,794	1,437	0,089	0,028	500	257
9	2,5	0,55	1,52	0,779	1,184	0,089	0,030	480	208
10	2,5	0,45	1,25	0,550	0,688	0,089	0,032	240	160
11	2,5	0,26	0,89	0,400	0,356	0,089	0,036	127	102
12	3,2	0,00	0,42	0,140	0,059	0,080	0,045	012	036
			$F = 17{,}60^{qm}$		$Q = 13{,}672^{cbm}$			$m_Q^2 = 0{,}07\,381$	
								$m_Q = \pm 0{,}272^{cbm}$	

Der mittlere Fehler m_T der Sohlentiefe T ist, wie im § 9, Nr. 5, zu: $\pm 0{,}05^m$ genommen. Die mittleren Fehler m_V ergeben sich, wie unter Nr. 2 und 3 durch ein Beispiel erläutert ist.

Beispiel 6: **1.** Der mittlere Profilradius r eines Durchflufsprofils ergiebt sich aus der Querprofilfläche und dem benetzten Umfange p nach:

$$r = \frac{F}{p},$$

woraus für die Berechnung des mittleren Fehlers m_r des Profilradius r aus dem mittleren Fehler m_F der Fläche F und dem mittleren Fehler m_p des benetzten Umfanges p nach Formel (**33**) folgt:

$$m_r = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{p}\,m_F\right)^2 + \left(\frac{F}{p^2}\,m_p\right)^2}.$$

In dem im § 9, Nr. 5 behandelten Beispiele ist $F = 17{,}61$ qm, $p = 31{,}8$, also:

$$r = \frac{17{,}61}{31{,}8} = 0{,}554.$$

Ferner ist: $m_F = \pm 0{,}43$ qm, $m_p = \pm 0{,}05$ m und somit

$$m_r = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{31{,}8}\,0{,}43\right)^2 + \left(\frac{17{,}6}{31{,}8^2}\,0{,}05\right)^2} = \pm 0{,}0135.$$

2. Nach den Formeln von Ganguillet u. Kutter wird die mittlere Wassergeschwindigkeit V erhalten aus den Konstanten α und β, dem Profilradius r und dem relativen Gefälle τ nach:

$$V = \left(\alpha - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{r}+\beta}\right)\sqrt{r\tau}.$$

Für $\alpha = 100$, $\beta = 2{,}44$, $r = 0{,}554$, $\tau = 0{,}000\,231$ wird:

$$V = \left(100 - \frac{100\cdot 2{,}44}{\sqrt{0{,}554}+2{,}44}\right)\sqrt{0{,}554\cdot 0{,}000\,231} = 0{,}263\,\text{m}.$$

Differenziren wir den Ausdruck für V nach α, β, r und τ und setzen in die sich ergebenden Differenzialquotienten gleich die Zahlenwerthe ein, so erhalten wir:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{r}+\beta}\right)\sqrt{r\tau} = \frac{V}{\alpha} = \frac{0{,}263}{100} = 0{,}002\,63,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \beta} = -\sqrt{r\tau}\,\frac{(\sqrt{r}+\beta)\,\alpha - \alpha\beta}{(\sqrt{r}+\beta)^2} = -\frac{\alpha r\sqrt{\tau}}{(\sqrt{r}+\beta)^2} = \frac{100\cdot 0{,}554\sqrt{0{,}000\,231}}{(\sqrt{0{,}554}+2{,}44)^2} = 0{,}0830,$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \alpha\sqrt{\tau}\,\frac{1}{2\sqrt{r}} - \alpha\beta\sqrt{\tau}\,\frac{(\sqrt{r}+\beta)\frac{1}{2\sqrt{r}} - \sqrt{r}\,\frac{1}{2\sqrt{r}}}{(\sqrt{r}+\beta)^2} = \alpha\sqrt{\tau}\,\frac{1}{2\sqrt{r}}\left(1 - \frac{\beta^2}{(\sqrt{r}+\beta)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\alpha\sqrt{\tau}\left(\frac{\sqrt{r}+2\beta}{(\sqrt{r}+\beta)^2}\right) = \frac{1}{2}\,100\sqrt{0{,}000\,231}\left(\frac{\sqrt{0{,}554}+4{,}88}{(\sqrt{0{,}554}+2{,}44)^2}\right) = 0{,}421,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \left(\alpha - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{r}+\beta}\right)\sqrt{r}\,\frac{1}{2\sqrt{\tau}} = \frac{V}{2\tau} = \frac{0{,}263}{0{,}000\,462} = 569.$$

Mit diesen Zahlenwerthen der Differenzialquotienten ergiebt sich der mittlere Fehler m_V der mittleren Geschwindigkeit aus den mittleren Fehlern $m_\alpha = 0{,}0$, $m_\beta = \pm 0{,}25$ der Konstanten α und β, $m_r = \pm 0{,}0135$ des mittleren Profilradius r und $m_\tau = \pm 0{,}000\,05$ des relativen Gefälles τ nach Formel (**33**) zu:

$$m_V = \pm\sqrt{(0{,}002\,63\cdot m_\alpha)^2 + (0{,}0830\cdot m_\beta)^2 + (0{,}421\cdot m_r)^2 + (569\cdot m_\tau)^2}$$
$$= \pm\sqrt{(0{,}002\,63\cdot 0{,}0)^2 + (0{,}0830\cdot 0{,}25)^2 + (0{,}421\cdot 0{,}0135)^2 + (569\cdot 0{,}000\,05)^2}$$
$$= \pm\sqrt{0{,}0 + 0{,}00\,04\,31 + 0{,}00\,00\,32 + 0{,}00\,08\,09} = \pm 0{,}036\,\text{m}.$$

3. Die in einer Sekunde durch das Profil fliefsende Wassermenge Q ergiebt sich nach:

$$Q = FV,$$

und der mittlere Fehler m_Q nach:

$$m_Q = \pm\sqrt{(V m_F)^2 + (F m_V)^2},$$

wonach sich mit den bisher erhaltenen Zahlenwerthen ergiebt:

$$Q = 17{,}61\cdot 0{,}263 = 4{,}631\,\text{cbm},$$

$$m_Q = \pm\sqrt{(0{,}263\cdot 0{,}43)^2 + (17{,}6\cdot 0{,}036)^2} = \pm 0{,}644\,\text{cbm}.$$

II. TEIL.

Methode der kleinsten Quadrate.

I. Abschnitt.

Einleitung.

§ 12. Die zu lösenden Aufgaben.

1. Im I. Teil haben wir uns mit der Theorie der Beobachtungsfehler beschäftigt und haben auf Grund einer allgemeinen Hypothese Regeln und Formeln aufgestellt für die Beobachtungsfehler. Wir haben insbesondere einfache Maſse für die Genauigkeit unserer Beobachtungsergebnisse und der durch Rechnung aus den Beobachtungsergebnissen abgeleiteten Gröſsen unter der Bezeichnung des wahrscheinlichen, des mittleren und des durchschnittlichen Fehlers festgestellt und haben sodann gezeigt, wie diese Genauigkeitsmaſse aus vorliegenden Beobachtungsfehlern abzuleiten sind. Ferner haben wir noch durch Einführung der Gewichte einen weiteren Ausdruck für die Werthschätzung unserer Beobachtungsergebnisse gewonnen. Endlich haben wir gezeigt, wie nach Bestimmung der Genauigkeit bestimmter Beobachtungen für weitere unter gleichen Verhältnissen zur Ausführung gelangende Beobachtungen eine Grenze festgesetzt werden kann, die die Beobachtungsfehler nicht überschreiten sollen.

2. Unsere Beobachtungen haben nun aber in der Regel nicht den Zweck, nur ein Maſs für die Genauigkeit der Beobachtungsergebnisse zu liefern oder danach Fehlergrenzen für weitere Beobachtungen zu bestimmen. Vielmehr haben sie meistens in erster Linie den Zweck, möglichst zuverlässige und genaue Werthe für die beobachteten Gröſsen oder andere mit den beobachteten Gröſsen in bestimmter Beziehung stehende Gröſsen zu erlangen. Dementsprechend haben wir nun die Aufgabe zu lösen, aus den Ergebnissen unserer Beobachtungen möglichst zuverlässige und genaue Werthe für die zu bestimmenden Gröſsen abzuleiten.

Wie bereits besprochen, sind die Beobachtungsergebnisse immer mit unvermeidlichen Fehlern behaftet, auch wenn wir unsere Beobachtungen so sorgfältig ausführen wie nur möglich. Diese Fehler übertragen sich auch auf alle Werthe, die aus den Beobachtungsergebnissen abgeleitet werden. Deshalb können

wir die fehlerfreien wahren Werthe für die zu bestimmenden Gröfsen nicht erlangen, vielmehr müssen wir uns damit begnügen, aus den vorliegenden mit unvermeidlichen Fehlern behafteten Beobachtungsergebnissen die wahrscheinlichsten Werthe der zu bestimmenden Gröfsen abzuleiten.

Demnach ist die erste von uns zu lösende Aufgabe, nach den vorliegenden Beobachtungsergebnissen die wahrscheinlichsten Werthe der beobachteten Gröfsen oder anderer mit den beobachteten Gröfsen in bestimmter Beziehung stehender Gröfsen zu ermitteln.

3. Durch Vergleichung der wahrscheinlichsten Werthe der zu bestimmenden Gröfsen, oder der diesen entsprechenden Werthe der beobachteten Gröfsen mit den vorliegenden Beobachtungsergebnissen erhalten wir dann aber auch nicht die wahren Werthe der Beobachtungsfehler, sondern die wahrscheinlichsten Werthe der Beobachtungsfehler.

Die bis jetzt aufgestellten Formeln für die Berechnung der als Genauigkeitsmafse dienenden Gröfsen gelten aber nur für die wahren Werthe der Beobachtungsfehler.

Daher ist die zweite von uns zu lösende Aufgabe, aus den wahrscheinlichsten Werthen der Beobachtungsfehler ein Mafs für die Genauigkeit der vorliegenden Beobachtungsergebnisse und der aus den Beobachtungsergebnissen abgeleiteten Gröfsen zu bestimmen.

Als Genauigkeitsmafs nehmen wir im folgenden ausschliefslich den mittleren Fehler, weil er in einfachster Beziehung zu den in den Rechnungen vielfach zu benutzenden Gewichten steht und weil wir, wenn es nötig sein sollte, den durchschnittlichen Fehler d und den wahrscheinlichen Fehler w am besten nach den Formeln (**17**) und (**18**) aus dem mittleren Fehler berechnen können.

4. Die sich durch die Lösung unserer Aufgaben ergebenden Rechnungsverfahren finden nur Anwendung, wenn mehr Beobachtungsergebnisse vorliegen, als zur einfachen, nicht versicherten Bestimmung der gesuchten Gröfsen nothwendig sind, wenn also überschüssige Beobachtungsergebnisse vorliegen.

Liegen weniger Beobachtungsergebnisse vor, als zur einfachen, nicht versicherten Bestimmung der gesuchten Gröfsen nothwendig sind, so ergeben sich aus den Beobachtungsergebnissen überhaupt keine bestimmten Werthe der gesuchten Gröfsen.

Liegen grade so viele Beobachtungsergebnisse vor, wie zur einfachen nicht versicherten Bestimmung der gesuchten Gröfsen nothwendig sind, so ergeben sich aus den Beobachtungsergebnissen zwar bestimmte Werthe der gesuchten Gröfsen; diese Werthe können dann aber ohne Anwendung des im folgenden entwickelten Verfahrens gefunden werden.

§ 13. Grundsätze für die Lösung der ersten Aufgabe.

1. Bei der Lösung der im § 12 bezeichneten ersten Aufgabe, aus den vorliegenden Beobachtungsergebnissen die wahrscheinlichsten Werthe der beobachteten Gröfsen oder anderer mit den beobachteten Gröfsen in bestimmter Beziehung stehender Gröfsen zu ermitteln, gehen wir von den Grundsätzen aus:

> **1. die gesuchten Gröfsen als einheitliches Endergebnis aus sämtlichen vorliegenden Bestimmungen derart zu gewinnen, dafs jedes Beobachtungsergebnis seinem Gewichte entsprechend berücksichtigt wird, und**

2. die gesuchten Gröfsen so zu bestimmen oder die Fehler der Beobachtungsergebnisse so auszugleichen, dafs die Quadratsumme der auf die Gewichtseinheit zurückgeführten wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler ein Minimum wird.

2. Für den ersten der beiden aufgestellten Grundsätze sei angeführt:

Wir wollen solche Werthe für die zu bestimmenden Gröfsen ermitteln, die den wahren Werthen möglichst nahe kommen; wir wollen also mit dem Endergebnis unserer Arbeiten der Wahrheit so gut wie möglich entsprechen. Alle Beobachtungsergebnisse und alle sonstigen Bestimmungen sind nun Zeugnisse für die Wahrheit; und deshalb werden wir der Wahrheit um so besser entsprechen, je mehr Zeugnisse wir einheitlich zusammenfassen und je richtiger wir ungleich zuverlässige Zeugnisse in dem einheitlichen Endergebnis ihrem Gewichte nach berücksichtigen.

Die Aufserachtlassung unseres ersten Grundsatzes ist vielfach die Hauptursache davon, dafs aus den Beobachtungsergebnissen kein befriedigendes Endergebnis gewonnen wird. Besonders ist dies der Fall bei dem in der Praxis früher üblichen Verfahren, von einer Reihe vorliegender Beobachtungsergebnisse eine Anzahl möglichst gut übereinstimmender Beobachtungsergebnisse auszuwählen und nur diese zur Feststellung des Endergebnisses zu benutzen. Dies Verfahren beruht auf der Annahme, dafs die zufällige Übereinstimmung einiger Beobachtungsergebnisse ein so sicheres Kennzeichen für ihre Zuverlässigkeit ist, dafs demgegenüber alle mehr abweichenden Beobachtungsergebnisse unberücksichtigt bleiben können. Diese Annahme kann aber weder durch die Theorie noch durch günstigen praktischen Erfolg begründet werden; vielmehr haben grade die mit dieser Annahme gemachten schlechten Erfahrungen in erster Linie dazu geführt, das nachfolgend darzustellende Rechnungsverfahren immer mehr in die Praxis einzuführen. Auch das Vorgehen, unseren ersten Grundsatz zwar anzuerkennen, aber nach dem Erfolg diejenigen Beobachtungsergebnisse ganz auszuschliefsen oder mit vermindertem Gewichte anzusetzen, die bei der rechnerischen Verwerthung der Beobacbtungsergebnisse ungewöhnlich grofse Fehler aufweisen, ist in der Regel von den verderblichsten Folgen begleitet; denn durch die Ausschliefsung oder Gewichtsverminderung wird in der Regel nur eine Verschlechterung des Endergebnisses erzielt. Nur wenn bestimmte Thatsachen voraus bekannt sind, die einen Verdacht gegen ein Beobachtungsergebnis sicher begründen, oder wenn durch sorgfältige Nachmessung die Unrichtigkeit eines Beobachtungsergebnisses sicher erwiesen ist, darf die Ausschliefsung des Beobachtungsergebnisses oder die Verminderung seines Gewichtes erfolgen. »Jede Beobachtung, die nicht einen protokollarischen Verdachtsgrund gegen sich hat, habe ich als einen Zeugen für die Wahrheit zu betrachten, und ebenso wenig wie ich einen Zeugen torquieren darf, bis er sagt, was ich gesagt haben will, ebenso wenig darf ich auch ohne weiteres sein Zeugnis verwerfen, weil es von den übrigen bedeutend abweicht.«*)

Zur weiteren Erläuterung des vorstehenden seien noch zwei Beispiele angeführt:

Bei der Berechnung der geographischen Koordinaten der trigonometrischen Punkte III. Ordnung einer weit ausgedehnten Triangulation wurden im Anschlufs an das Dreiecksnetz I. und II. Ordnung zunächst für die Dreiecksseiten die Azimuthe und Längen in der Weise bestimmt, dafs dafür zwei möglichst gut übereinstimmende Ergebnisse gesucht, und das arithmetische Mittel aus diesen beiden

*) Gerling, »Die Ausgleichungs-Rechnungen der praktischen Geometrie.« Seite 68.

Ergebnissen als Endergebnis genommen wurde. Sodann wurden aus den so erlangten Azimuthen und Längen zwei Werthe für die geographischen Koordinaten eines jeden Punktes berechnet. Stimmten diese beiden Werthe genügend überein, so wurde das arithmetische Mittel aus beiden Werthen als Endergebnis genommen; stimmten sie nicht genügend überein, so wurden weitere Werthe der Koordinaten aus anderen Azimuthen und Längen berechnet, bis sich zwei genügend übereinstimmende Werthe fanden, deren Mittel das Endergebnis bilden konnte. Als später aus den geographischen Koordinaten rechtwinklig sphärische Koordinaten abgeleitet, dann zur Kontrole aus diesen Koordinaten die Richtungen und Längen der Dreiecksseiten berechnet und mit den direkt aus den Beobachtungsergebnissen gewonnenen Richtungen und Längen verglichen wurden, ergaben sich viele Abweichungen, die weit über das zulässige Mafs hinausgingen. Durch eine unseren Grundsätzen entsprechende Neuberechnung der rechtwinkligen Koordinaten wurde ein durchaus befriedigender Anschlufs an die Beobachtungsergebnisse erzielt und damit zugleich erwiesen, dafs nur das unzweckmäfsige Verfahren bei der ersten Berechnung die Ursache der Unbrauchbarkeit der Endergebnisse war.

Bei einer zweiten umfangreichen Triangulation wurden die Winkel im Dreiecksnetze I. und II. Ordnung mit einem alten, grofsen, aber wenig zuverlässigen Theodoliten nach der Repetitionsmethode beobachtet. Die jedenfalls für das benutzte Instrument nicht geeignete Winkelmessungsmethode, vielleicht auch nicht genügende Sorgfalt bei der für den Erfolg einer jeden Triangulation in erster Linie mitbestimmenden Festlegung der Signale und Beobachtungsstandpunkte gegen das Centrum der Stationen führte dazu, dafs bereits bei der Berechnung des Dreiecksnetzes I. Ordnung Fehler hervortraten, die weit über die bei den Dreiecksnetzen IV. Ordnung zulässigen Fehler hinausgingen. Es wurden nun alle die Richtungen ausgeschlossen, bei denen die grofsen Fehler hervortraten und es wurde eine zweite Berechnung durchgeführt, die ein scheinbar gutes Endergebnis lieferte. Je weiter aber die Rechnung durch das Dreiecksnetz II., III. und IV. Ordnung fortgeführt wurde, desto gröfser wurden die hervortretenden Fehler und desto mehr Richtungen mufsten ausgeschlossen werden, um zu einem leidlichen Abschlufs zu gelangen. In der Revisionsinstanz wurde darauf die ganze Rechnung verworfen und eine neue Berechnung mit Benutzung sämtlicher Beobachtungsergebnisse angeordnet. Der Erfolg rechtfertigte diese Mafsregel vollständig; während in dem Dreiecksnetze I. Ordnung die grofsen Fehler bestehen blieben, nahmen die Fehler bei der fortschreitenden Rechnung immer mehr ab, so dafs sie im Dreiecksnetze IV. Ordnung durchweg innerhalb der zulässigen Grenzen blieben und somit die für die anzuschliefsenden Detailmessungen in erster Linie wichtige gegenseitig richtige Lage der benachbarten trigonometrischen Punkte gewährleistet war.

3. Die uneingeschränkte Durchführung unseres ersten Grundsatzes kann nun aber unter Umständen doch unzweckmäfsig sein, einmal weil der dadurch bedingte Arbeitsaufwand in keinem richtigen Verhältnis zu dem Nutzen stehen kann, und sodann auch, weil sachliche in der Art der vorliegenden Aufgabe liegende Bedenken dagegen obwalten können.

Wenn beispielsweise ein trigonometrisches Netz niederer Ordnung von einiger Ausdehnung zu berechnen ist, so würde es einen ganz ungerechtfertigt hohen Arbeitsaufwand verursachen, wenn die zusammenhängenden Teile des Netzes in ihrem ganzen Umfange einheitlich behandelt würden. Vielmehr ist es in diesem Falle

und in ähnlichen Fällen durchaus berechtigt, unsern Grundsatz mit der Einschränkung anzuwenden, dafs eine Zerlegung des Netzes in kleinere einfach zu berechnende Teile ausgeführt wird und dafs nur die zur Bestimmung dieser kleinen Netzteile, bezw. einzelner trigonometrischer Punkte vorliegenden Beobachtungsergebnisse je für sich zu einem einheitlichen Endergebnis zusammengefafst werden.

Wenn ferner beispielsweise die Beobachtungsergebnisse vorliegen zur Bestimmung der Verbesserungen, die den Ablesungen an einem Federbarometer beizufügen sind, um daraus brauchbare Werthe für die Gröfse des Luftdrucks zu erhalten, so wird es in der Regel sachlich nicht gerechtfertigt sein, sämtliche vorliegende Beobachtungsergebnisse zusammenzufassen und sie als ein einheitliches Ganzes zur Berechnung der gesuchten Verbesserungen zu benutzen; denn die Beobachtungen, die zur Bestimmung der einzelnen Verbesserungen vorgenommen werden, finden in der Regel unter ganz verschiedenartigen Umständen statt, so dafs nur die getrennte Behandlung der verschiedenen Beobachtungsreihen ein brauchbares Endergebnis erwarten läfst.

4. Die nach unserm ersten Grundsatze zu berücksichtigenden Gewichte der Beobachtungsergebnisse müssen nach den dafür im I. Teil gegebenen Sätzen und Formeln ermittelt werden. Die Änderung der so ermittelten Gewichte behufs schätzungsweiser Berücksichtigung aller Nebenumstände, die die Beobachtungsergebnisse allenfalls beeinflufst haben könnten, ist in der Regel weit mehr schädlich als nützlich. Geringere Gewichtsunterschiede können bei den Aufgaben, die wir hier vorzugsweise ins Auge fassen, ganz unbedenklich vernachlässigt werden. Das Bestreben, alle unbedeutenden Nebenumstände in den Gewichten zum Ausdruck zu bringen, führt, wie oft beobachtet werden kann, zu einer sich meistens sehr rasch steigernden krankhaften Sucht, alles weniger gut erscheinende durch Gewichtsannahmen gut zu machen und zu einer durchaus nutzlosen Erschwerung aller Rechnungen.

5. Nach dem zweiten Grundsatze, die gesuchten Gröfsen so zu bestimmen oder die hervortretenden Fehler so auszugleichen, dafs die Quadratsumme der auf die Gewichtseinheit zurückgeführten wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler ein Minimum wird, führt das nachfolgend darzustellende Rechnungsverfahren die Bezeichnung **Methode der kleinsten Quadrate** oder **Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.**

Dieser Grundsatz ist gewissermafsen willkürlich gewählt, aber er ist zweckmäfsig gewählt. Wir müssen ohne weiteres anerkennen, dafs die Werthe der gesuchten Gröfsen die besten sind, denen solche Werthe der beobachteten Gröfsen entsprechen, die möglichst wenig von den thatsächlich vorliegenden Beobachtungsergebnissen abweichen, die also möglichst kleine Werthe der wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler liefern. Solche Werthe der gesuchten Gröfsen können wir auf verschiedene Weise finden, z. B. indem wir davon ausgehen, die Summe der absoluten Werthe der wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler möglichst klein zu machen, oder die Summe der zweiten, vierten oder irgend einer andern Potenz der Beobachtungsfehler möglichst klein zu machen. Wir können auch keinen strengen Beweis dafür führen, dafs wir nicht auf eine andere Weise im gegebenen Falle etwas besseres erreichen, als dadurch, dafs wir die Quadratsumme der wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler möglichst klein machen. Wir können aber wohl behaupten, dafs wir auf letztere Weise Ergebnisse erhalten, die sich den Beobachtungsergebnissen gut anpassen und dafs wir diese Ergebnisse in einfachster und

elegantester Weise erhalten. Ferner können wir noch für unsern zweiten Grundsatz anführen, dafs das Prinzip der kleinsten Quadratsumme auch dem alten Grundsatze entspricht, das einfache arithmetische Mittel der vorliegenden Beobachtungsergebnisse als den wahrscheinlichsten Werth der gesuchten Gröfse anzunehmen, wenn die zur Bestimmung der letzteren ausgeführten Beobachtungen gleich genau und unabhängig von einander sind.

6. Bei Besprechung der Gewichte im § 10 haben wir klargelegt, dafs die Gewichtszahlen uns anzeigen, wie oft wir die Gröfsen für die die Gewichte gelten, in der Rechnung zu berücksichtigen haben, um sie ihrem Genauigkeitswerthe entsprechend richtig zu verwerthen. Demgemäfs müssen wir bei Bildung der Quadratsumme auch die Quadrate der wahrscheinlichsten Fehler v_1, v_2, v_3, ... v_n der Beobachtungsergebnisse λ_1, λ_2, λ_3, ... λ_n so oft ansetzen, wie die Gewichtszahlen p_1, p_2, p_3, ... p_n anzeigen, wonach wir also auch die Quadratsumme $p_1 v_1 v_1 + p_2 v_2 v_2 + p_3 v_3 v_3 + \ldots. p_n v_n v_n = [pvv]$ zu einem Minimum machen müssen. Diese Quadratsumme erhalten wir aber auch, indem wir die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler v_1, v_2, v_3, ... v_n durch Multiplikation mit $\sqrt{p_1}$, $\sqrt{p_2}$, $\sqrt{p_3}$, ... $\sqrt{p_n}$ auf die Gewichtseinheit zurückführen und danach die Quadratsumme der auf die Gewichtseinheit zurückgeführten Beobachtungsfehler $v_1\sqrt{p_1}$, $v_2\sqrt{p_2}$, $v_3\sqrt{p_3}$, ... $v_n\sqrt{p_n}$ bilden. Für den zweiten Grundsatz haben wir demnach allgemein die Formel:

$$p_1 v_1 v_1 + p_2 v_2 v_2 + p_3 v_3 v_3 + \ldots. p_n v_n v_n = [p v v] = \text{Minimum}. \tag{46}$$

§ 14. Grundsatz für die Lösung der zweiten Aufgabe.

1. Bei der Lösung unserer zweiten Aufgabe, aus den wahrscheinlichsten Werthen der Beobachtungsfehler ein Mafs für die Genauigkeit der vorliegenden Beobachtungsergebnisse und der daraus abgeleiteten Gröfsen zu bestimmen, gehen wir von dem folgenden, ebenfalls nicht streng zu beweisenden Grundsatze aus:

Wir nehmen als Mittelwerth der Quadrate der wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler, oder als Quadrat des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit den Werth an, der sich ergiebt, wenn wir die Quadratsumme der wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler durch die Anzahl der überschüssigen Beobachtungsergebnisse dividiren.

Hierbei gelten als überschüssige Beobachtungsergebnisse die, die übrig bleiben, wenn wir aus den überhaupt vorhandenen n Beobachtungsergebnissen die q Beobachtungsergebnisse ausscheiden, die zur einfachen nicht versicherten Bestimmung der gesuchten Gröfsen erforderlich sind. Demnach rechnen wir den mittleren Fehler $\mathfrak{m}$ der Gewichtseinheit nach der Formel:

$$\mathfrak{m} = \pm\sqrt{\frac{[p v v]}{n - q}}. \tag{47}$$

2. Zur Erläuterung dieses Grundsatzes diene:

Wenn nur so viele Beobachtungsergebnisse vorliegen, wie zur einfachen, nicht versicherten Bestimmung der gesuchten Gröfsen erforderlich sind, so stimmen die Werthe der beobachteten Gröfsen, die rückwärts aus den danach gefundenen Gröfsen abgeleitet werden, genau überein mit den vorliegenden Beobachtungsergebnissen und wir erhalten als Werthe der wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler Null. Mithin liefern in diesem Falle die Beobachtungsergebnisse keinen Beitrag zu der Quadratsumme der wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler. Erst wenn ein

oder mehrere weitere überschüssige Beobachtungsergebnisse hinzukommen, erhalten wir Beiträge zur Quadratsumme der wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler und zwar Beiträge, worin nur die Widersprüche der neu hinzutretenden Beobachtungsergebnisse gegen die zur einfachen nicht versicherten Bestimmung genügenden Stücke zum Ausdruck gelangen. Deshalb dividiren wir, um das Quadrat des mittleren Fehlers zu erhalten, die Quadratsumme auch nicht durch die Anzahl aller vorhandenen Beobachtungsergebnisse, sondern durch die Anzahl der überschüssigen Beobachtungsergebnisse.

Wenn z. B. die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes aus den gemessenen Abständen dieses Punktes von gegebenen Punkten bestimmt werden sollen, so sind zur einfachen, nicht versicherten Bestimmung der Koordinaten zwei solche Abstände nötig. Leiten wir dann aus den Koordinaten, die aus diesen notwendigen zwei Abständen gefunden worden sind, rückwärts wieder Werthe für diese Abstände ab, so stimmen sie mit den Messungsergebnissen genau überein. Kommt indefs noch ein dritter überschüssiger Abstand hinzu und bestimmen wir nun aus den drei Abständen die wahrscheinlichsten Werthe der Koordinaten, so zeigen auch die rückwärts aus den erhaltenen Koordinaten abgeleiteten Werthe der Abstände Abweichungen von den Messungsergebnissen und liefern damit einen Beitrag zur Quadratsumme der wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler, der der Verschärfung der Bestimmung der Koordinaten durch das eine weitere Beobachtungsergebnis entspricht. Ganz ebenso verhält es sich mit jedem noch weiter hinzukommenden überschüssigen Abstande.

3. Beziehen sich unsere Beobachtungen auf eine Gröfse, deren wahrer Werth uns voraus bekannt ist, so sind sämtliche vorliegende Beobachtungsergebnisse als überschüssige anzusehen, womit die Formel (**47**) übergeht in:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{n}}.$$

Diese Formel entspricht der Formel (**13**) $m = \pm \sqrt{\frac{[(v)\,(v)]}{n}}$, wie es auch sein mufs; denn in diesem Falle erhalten wir durch Vergleichung der vorliegenden Beobachtungsergebnisse mit dem wahren Werthe der beobachteten Gröfse die wahren Werthe der Beobachtungsfehler, für die die Formel (**13**) gilt.

Wenn wir also beispielsweise aus vorliegenden Dreieckswinkelbeobachtungen den mittleren Fehler der Dreieckswinkelsumme ermitteln wollen, so ist uns voraus bekannt, dafs der wahre Werth der Dreieckswinkelsumme 180° ist*). Durch Vergleichung der beobachteten Dreieckswinkelsumme mit diesem wahren Werthe erhalten wir also die wahren Beobachtungsfehler, und jede beobachtete Dreieckswinkelsumme liefert einen vollen Beitrag zur Fehlerquadratsumme; deshalb müssen wir letztere dann auch durch die Anzahl aller beobachteten Dreieckswinkelsummen dividiren, um das Quadrat des mittleren Fehlers zu erhalten.

§ 15. Aufstellung besonderer Rechnungsverfahren für besondere Fälle der zu lösenden Aufgabe.

1. Bei den vorkommenden praktischen Aufgaben können wir verschiedene besondere Fälle unterscheiden, für die zweckmäfsig auch besondere Rechnungsverfahren aufgestellt werden, um das Endergebnis möglichst einfach gewinnen zu können. Zur Unterscheidung der verschiedenen Verfahren führen wir kurze Bezeichnungen dafür ein.

*) Abgesehen von dem event. zu berücksichtigenden sphärischen Excefs.

In erster Linie unterscheiden wir die beiden Fälle, wo als Endergebnis unserer Rechnung entweder die wahrscheinlichsten Werthe der beobachteten Gröſsen selbst oder aber die wahrscheinlichsten Werthe anderer, mit den beobachteten Gröſsen in bestimmter Beziehung stehender Gröſsen gewonnen werden.

Im ersten Falle, wo sich die Beobachtungen direkt auf die gesuchten Gröſsen selbst beziehen, bezeichnen wir die Beobachtungen als direkte Beobachtungen, während wir sie als vermittelnde Beobachtungen bezeichnen, wenn, wie im zweiten Falle, sich die Beobachtungen auf Gröſsen beziehen, die uns die Kenntnis der gesuchten Gröſsen vermitteln.

Sodann unterscheiden wir die beiden Fälle, wo entweder die beobachteten Gröſsen von einander unabhängig sind, oder wo sie von einander abhängig sind dadurch, daſs sie bestimmte Bedingungen erfüllen müssen.

Dementsprechend bezeichnen wir die Beobachtungen im erstern Falle als unabhängige Beobachtungen, im zweiten Falle als bedingte Beobachtungen.

Somit ergeben sich die folgenden Hauptfälle, für die wir besondere Rechnungsverfahren aufstellen:

1. direkte unabhängige Beobachtungen oder kurz direkte Beobachtungen,
2. vermittelnde unabhängige Beobachtungen oder kurz vermittelnde Beobachtungen,
3. direkte bedingte Beobachtungen oder kurz bedingte Beobachtungen
4. vermittelnde bedingte Beobachtungen.

Ferner behandeln wir noch den Fall besonders, wo der mittlere Fehler aus den Differenzen zwischen den Ergebnissen ausgeführter Doppelbeobachtungen verschiedener Gröſsen ermittelt werden soll.

Endlich sondern wir von den bedingten Beobachtungen noch den einfachen Fall ab, wo nur die eine Bedingung vorliegt, daſs die Summe der beobachteten Gröſsen einen bestimmten Sollbetrag erfüllen muſs.

2. Die Lösung einer vorliegenden Aufgabe kann in der Regel nicht nur nach einem, sondern nach mehreren der aufzustellenden Rechnungsverfahren erfolgen*). Die Auswahl unter den anwendbaren Verfahren kann dann lediglich nach dem praktischen Gesichtspunkte erfolgen, daſs das Verfahren eingeschlagen wird, das am einfachsten zum Ziele führt.

3. Was wir im folgenden als Beobachtungsergebnisse in die Rechnungen einführen, sind in der Regel nicht die unmittelbaren Beobachtungsergebnisse, sondern Gröſsen, die aus letzteren durch mehr oder minder weitläufige Rechnungen derart abgeleitet worden sind, daſs die abgeleiteten Gröſsen von einander unabhängig geblieben sind.

Wenn beispielsweise die Höhe eines Punktes im Anschluſs an gegebene Punkte nach den Ergebnissen eines geometrischen Nivellements berechnet werden soll, so führen wir in die Ausgleichungsrechnung nicht die unmittelbaren Lattenablesungen ein; sondern wir bilden zuerst aus den Lattenablesungen die Höhenunterschiede zwischen je zwei Aufstellungspunkten der Latten, addiren diese sodann zugweise, womit wir die Höhenunterschiede zwischen den gegebenen und dem neu zu bestimmenden Punkte erhalten, addiren ferner diese Höhenunterschiede zu den gegebenen Höhen und führen endlich erst die so erhaltenen Einzelwerthe für die Höhe des zu bestimmenden Punktes als Beobachtungsergebnisse in die Ausgleichungsrechnung ein.

---

*) Vergleiche z. B. die drei verschiedenen Lösungen derselben Aufgabe in den §§ 21, 35, 52 und 53.

II. Abschnitt.

Direkte Beobachtungen.

§ 16. Direkte gleich genaue Beobachtungen.

1. Schon lange bevor theoretische Gesetze für die Beobachtungsfehler aufgestellt waren, war es allgemeiner Brauch, bei mehrfacher, gleich genauer und unabhängiger Bestimmung einer Gröſse das einfache arithmetische Mittel der erhaltenen einzelnen Beobachtungsergebnisse als den wahrscheinlichsten Werth der gesuchten Gröſse anzunehmen. Wir folgen diesem Brauche und liefern dann den Nachweis, daſs er unsern allgemeinen Ausgleichungsgrundsätzen entspricht.

Ist also zur Bestimmung einer Gröſse eine Reihe von n unabhängigen, gleich genauen Beobachtungen ausgeführt worden und haben diese die Beobachtungsergebnisse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ geliefert, so nehmen wir als den wahrscheinlichsten Werth x der beobachteten Gröſse:

$$x = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots \lambda_n}{n} = \frac{[\lambda]}{n}. \tag{48}$$

Die Berechnung von x kann meistens vereinfacht werden, indem die Werthe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ in einen Näherungswerth l und die kleinen Gröſsen $dl_1, dl_2, dl_3, \ldots dl_n$ zerlegt werden, indem also gesetzt wird:

$$\begin{cases} \lambda_1 = l + dl_1, \\ \lambda_2 = l + dl_2, \\ \lambda_3 = l + dl_3, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_n = l + dl_n. \end{cases} \tag{49}$$

Dann wird:

$$x = \frac{(l + dl_1) + (l + dl_2) + (l + dl_3) + \cdots (l + dl_n)}{n}, \text{ oder:}$$

$$x = l + \frac{dl_1 + dl_2 + dl_3 + \cdots dl_n}{n} = l + \frac{[dl]}{n}. \tag{50}$$

Die Abweichungen $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$ des wahrscheinlichsten Werthes x der beobachteten Gröſse von den einzelnen Beobachtungsergebnissen, oder die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler sind:

$$\begin{cases} v_1 = x - \lambda_1, \\ v_2 = x - \lambda_2, \\ v_3 = x - \lambda_3, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ v_n = x - \lambda_n. \end{cases} \tag{51}$$

Die Summe dieser Fehler ist:

$$[v] = nx - [\lambda],$$

oder, da nach Formel (48): $nx = [\lambda]$, also: $nx - [\lambda] = 0$ ist,:

$$[v] = 0. \tag{52}$$

Demnach ist die Summe der wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler gleich Null, wenn das einfache arithmetische Mittel mehrerer gleichgenauen und unabhängigen Beobachtungsergebnisse als wahrscheinlichster Werth der beobachteten Gröſse angenommen wird. Durch Benutzung dieses Satzes erhalten wir eine Probe für die richtige Berechnung von x aus den Beobachtungsergebnissen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$.

Beispiel: Ein Winkel ist mit demselben Instrumente unter gleichen Umständen 12 mal in beiden Lagen des Fernrohrs beobachtet worden. Das Gewicht einer jeden Beobachtung ist $p = 1$. Die Beobachtungsergebnisse sind:

$\lambda_1 = 289^\circ\, 26'\, 19{,}6''$,	$\lambda_7 = 289^\circ\, 26'\, 18{,}9''$,
$\lambda_2 = 289\;\; 26\;\; 18{,}0$,	$\lambda_8 = 289\;\; 26\;\; 18{,}0$,
$\lambda_3 = 289\;\; 26\;\; 20{,}3$,	$\lambda_9 = 289\;\; 26\;\; 20{,}4$,
$\lambda_4 = 289\;\; 26\;\; 19{,}2$,	$\lambda_{10} = 289\;\; 26\;\; 20{,}0$,
$\lambda_5 = 289\;\; 26\;\; 18{,}8$,	$\lambda_{11} = 289\;\; 26\;\; 19{,}9$,
$\lambda_6 = 289\;\; 26\;\; 19{,}7$,	$\lambda_{12} = 289\;\; 26\;\; 18{,}7$.
	$[dl] = 231{,}5''$.

Aus diesen gleichgenauen Beobachtungsergebnissen ergiebt sich der wahrscheinlichste Werth x des Winkels nach den Formeln (**49**) und (**50**), indem $l = 289^\circ\, 26'$ gesetzt wird, mit:

$$x = l + \frac{[dl]}{n} = 289^\circ\, 26' + \frac{231{,}5''}{12} = 289^\circ\, 26'\, 19{,}3''.$$

Die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler sind nach Formel (**51**):

$v_1 = x - \lambda_1 = -0{,}3''$,	$v_7 = x - \lambda_7 = +0{,}4''$,
$v_2 = x - \lambda_2 = +1{,}3$,	$v_8 = x - \lambda_8 = +1{,}3$,
$v_3 = x - \lambda_3 = -1{,}0$,	$v_9 = x - \lambda_9 = -1{,}1$,
$v_4 = x - \lambda_4 = +0{,}1$,	$v_{10} = x - \lambda_{10} = -0{,}7$,
$v_5 = x - \lambda_5 = +0{,}5$,	$v_{11} = x - \lambda_{11} = -0{,}6$,
$v_6 = x - \lambda_6 = -0{,}4$,	$v_{12} = x - \lambda_{12} = +0{,}6$.

Die Summe dieser Fehler ist:

$$[v] = +4{,}2'' - 4{,}1'' = +0{,}1''.$$

Diese Summe soll nach Formel (**52**) gleich Null sein. Die kleine Abweichung $+0{,}1''$ der Summe von Null erklärt sich durch die Abrundung des Werthes von x bezw. von $\frac{[dl]}{n}$; sie mufs gleich sein der Abweichung des $n$fachen Quotienten $\frac{[dl]}{n}$ von $[dl]$, oder es mufs genau sein: $[v] = n \cdot \left(\frac{[dl]}{n}\right) - [dl]$, also im vorliegenden Falle: $[v] = 12 \cdot 19{,}3 - 231{,}5 = 231{,}6 - 231{,}5 = +0{,}1$. Die Abrundung des Werthes von x kann höchstens 0,5 Einheiten der letzten Stelle dieses Werthes betragen und demnach darf auch $[v]$ um höchstens $0{,}5 \cdot n$ Einheiten der letzten Stelle des Werthes von x von Null abweichen, im vorliegenden Falle also höchstens um $12 \cdot 0{,}05'' = 0{,}6''$.

2. Dafs das Princip des einfachen arithmetischen Mittels mit dem im § 13 aufgestellten Grundsatze übereinstimmt, wonach die Summe der Quadrate der wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler $[vv]$ ein Minimum sein soll, ergiebt sich wie folgt: Nach den Formeln (**51**) ist:

$$\begin{aligned}
v_1 v_1 &= xx - 2x\lambda_1 + \lambda_1 \lambda_1, \\
v_2 v_2 &= xx - 2x\lambda_2 + \lambda_2 \lambda_2, \\
v_3 v_3 &= xx - 2x\lambda_3 + \lambda_3 \lambda_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
v_n v_n &= xx - 2x\lambda_n + \lambda_n \lambda_n, \\
\hline
[vv] &= n \cdot xx - 2x[\lambda] + [\lambda_n \lambda_n].
\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir den Werth von x, wofür $[vv]$ ein Minimum wird, indem wir den Ausdruck für $[vv]$ nach x differenziren, den Differenzialquotienten gleich Null setzen und die damit erhaltene Gleichung nach x auflösen: Es ist:

$$\frac{d[vv]}{dx} = 2 \cdot n \cdot x - 2[\lambda], \text{ und demnach:}$$
$$2nx - 2[\lambda] = 0, \text{ oder:}$$
$$x = \frac{[\lambda]}{n},$$

welcher Werth von x mit dem dafür in Formel (**48**) gegebenen Werthe übereinstimmt.

3. Aufser dem wahrscheinlichsten Werthe x der beobachteten Gröfse haben wir nun weiter aus den wahrscheinlichsten Werthen $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$ der Beobachtungsfehler den mittleren Fehler der Gewichtseinheit und der Beobachtungsergebnisse, sowie den mittleren Fehler und das Gewicht von x zu bestimmen.

Zur einfachen nicht versicherten Bestimmung der gesuchten Gröfse genügt ein Beobachtungsergebnis; demnach sind, wenn n Beobachtungsergebnisse vorliegen, $n - 1$ Beobachtungsergebnisse überschüssig. Mithin erhalten wir nach dem im § 14 aufgestellten Grundsatze den mittleren Fehler $\mathfrak{m}$ der Gewichtseinheit nach der Formel:

$$\mathfrak{m} = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}},$$

oder, da die Gewichte p der gleichgenauen Beobachtungsergebnisse sämtlich einander gleich sind, nach:

$$\mathfrak{m} = \pm \sqrt{p} \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}. \tag{53}$$

Ferner erhalten wir für den mittleren Fehler m der Beobachtungsergebnisse nach Formel (**35**):

$$m = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{p}} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}. \tag{54}$$

Das Gewicht P des arithmetischen Mittels

$$x = \frac{1}{n}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots \lambda_n)$$

ergiebt sich nach Formel (**44**) aus:

$$\frac{1}{P} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot n \cdot \frac{1}{p} \text{ zu:}$$

$$P = np, \tag{55}$$

und damit der mittlere Fehler M von x wieder nach Formel (**35**) zu:

$$M = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{P}} = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{np}} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} = \pm m \sqrt{\frac{1}{n}}. \tag{56}$$

Beispiel: In dem von uns bereits benutzten Beispiele der Berechnung des wahrscheinlichsten Werthes eines Winkels ergiebt sich die Quadratsumme der wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler zu:

$v_1 v_1 = 0{,}09,$	$v_7 v_7 = 0{,}16,$
$v_2 v_2 = 1{,}69,$	$v_8 v_8 = 1{,}69,$
$v_3 v_3 = 1{,}00,$	$v_9 v_9 = 1{,}21,$
$v_4 v_4 = 0{,}01,$	$v_{10} v_{10} = 0{,}49,$
$v_5 v_5 = 0{,}25,$	$v_{11} v_{11} = 0{,}36,$
$v_6 v_6 = 0{,}16,$	$v_{12} v_{12} = 0{,}36,$
	$[vv] = 7{,}47.$

Das Gewicht einer einmaligen Beobachtung des Winkels in beiden Lagen des Fernrohrs ist $p = 1$, demnach ergiebt sich der mittlere Fehler $\mathfrak{m}$ der Gewichtseinheit zu:

(53) $$\mathfrak{m} = \pm \sqrt{p} \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm \sqrt{1} \sqrt{\frac{7,47}{12-1}} = \pm 0,82'',$$

sodann der mittlere Fehler m der Beobachtungsergebnisse zu:

(54) $$m = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{p}} = \pm 0,82 \sqrt{\frac{1}{1}} = \pm 0,82''.$$

Ferner ergiebt sich das Gewicht P des wahrscheinlichsten Werthes x des Winkels zu:

(55) $$P = np = 12 \cdot 1 = 12,$$

und endlich der mittlere Fehler M von x zu:

(56) $$M = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{P}} = \pm 0,82 \sqrt{\frac{1}{12}} = \pm 0,24''.$$

4. Die Quadratsumme der wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler $[vv]$ kann in geeigneten Fällen auch direkt aus den Beobachtungsergebnissen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ oder aus den Gröfsen $dl_1, dl_2, dl_3, \ldots dl_n$ berechnet werden. Wird in den unter Nr. 2 für $[vv]$ erhaltenen Ausdruck

$$[vv] = nxx - 2x[\lambda] + [\lambda\lambda]$$

nach Formel (48) $\frac{[\lambda]}{n}$ für x eingesetzt, so folgt:

$$[vv] = n \frac{[\lambda]}{n} \frac{[\lambda]}{n} - 2 \frac{[\lambda]}{n} [\lambda] + [\lambda\lambda], \text{ oder:}$$

$$[vv] = [\lambda\lambda] - \frac{[\lambda][\lambda]}{n}$$

und wenn hierin: $\lambda_1 = l + dl_1$, $\lambda_2 = l + dl_2$, $\lambda_3 = l + dl_3$, ... $\lambda_n = l + dl_n$, also: $[\lambda\lambda] = nll + 2l[dl] + [dl\,dl]$ und $[\lambda] = nl + [dl]$ gesetzt wird, so wird:

$$[vv] = nll + 2l[dl] + [dl\,dl] - \frac{nl\,nl + 2nl[dl] + [dl][dl]}{n}$$

$$= [dl\,dl] - \frac{[dl][dl]}{n}.$$

Demnach ist:

(57) $$[vv] = [\lambda\lambda] - \frac{[\lambda][\lambda]}{n} = [dl\,dl] - \frac{[dl][dl]}{n}.$$

Beispiel: Eine Mefslatte ist 10mal mit Normalmafsstäben verglichen worden, und dabei haben sich folgende Abweichungen von der Solllänge ergeben:

$\lambda_1 = +1,8$ mm,	$\lambda_6 = +2,3$ mm,
$\lambda_2 = +2,0$ „	$\lambda_7 = +2,2$ „
$\lambda_3 = +1,5$ „	$\lambda_8 = +1,7$ „
$\lambda_4 = +1,8$ „	$\lambda_9 = +1,9$ „
$\lambda_5 = +1,9$ „	$\lambda_{10} = +2,4$ „

Hiernach soll der mittlere Fehler einer Lattenvergleichung festgestellt werden. Hierzu bilden wir die Quadrate der einzelnen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_{10}$ und danach $[\lambda]$, sowie $[\lambda\lambda]$, wodurch wir erhalten: $[\lambda] = +19,5$, $[\lambda\lambda] = 38,73$. Dann ergiebt sich

(57) $$[vv] = [\lambda\lambda] - \frac{[\lambda][\lambda]}{n} = 38,73 - \frac{19,5 \cdot 19,5}{10} = 0,71,$$

und damit der mittlere Fehler einer Lattenvergleichung zu:

(54) $$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{0,71}{10-1}} = \pm 0,28 \text{ mm}.$$

§ 17. Direkte ungleich genaue Beobachtungen.

1. Sind die unabhängigen Beobachtungsergebnisse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$, die zur Bestimmung einer Gröfse vorliegen, nicht gleich genau, müssen ihnen vielmehr die Gewichte $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ zugeschrieben werden, so kann das einfache arithmetische Mittel nach Formel (**48**) nicht als der wahrscheinlichste Werth der beobachteten Gröfse angenommen werden, sondern es mufs dann, wie wir bei Besprechung der Gewichte im § 10 schon für einen einzelnen Fall festgestellt haben, der wahrscheinlichste Werth x der beobachteten Gröfse berechnet werden nach:

$$x = \frac{p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + p_3\lambda_3 + \cdots p_n\lambda_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots p_n} = \frac{[p\lambda]}{[p]}. \tag{58}$$

Diese Formel ergiebt sich ohne weiteres aus der Formel (**48**), wenn wir uns dessen erinnern, dafs wir die Gewichte erklärt haben als Verhältniszahlen, die angeben, wie oft wir die betreffenden Beobachtungsergebnisse in der Rechnung berücksichtigen sollen.

Wir bezeichnen den sich nach Formel (**58**) ergebenden Werth von x als das allgemeine arithmetische Mittel der Beobachtungsergebnisse.

Ebenso wie beim einfachen arithmetischen Mittel kann auch hier die Berechnung von x meistens vereinfacht werden, indem die Werthe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ in einen Näherungswerth l und die kleinen Gröfsen $dl_1, dl_2, dl_3, \ldots dl_n$ zerlegt werden, indem also wieder gesetzt wird:

$$\left\{\begin{aligned} \lambda_1 &= l + dl_1, \\ \lambda_2 &= l + dl_2, \\ \lambda_3 &= l + dl_3, \\ &\ldots\ldots, \\ \lambda_n &= l + dl_n. \end{aligned}\right. \tag{59}$$

Dann wird:

$$x = \frac{p_1(l + dl_1) + p_2(l + dl_2) + p_3(l + dl_3) + \cdots p_n(l + dl_n)}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots p_n}, \text{ oder:}$$

$$x = \frac{(p_1 l + p_2 l + p_3 l + \cdots p_n l) + (p_1 dl_1 + p_2 dl_2 + p_3 dl_3 + \cdots p_n dl_n)}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots p_n}, \text{ oder:}$$

$$x = l + \frac{p_1 dl_1 + p_2 dl_2 + p_3 dl_3 + \cdots p_n dl_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots p_n} = l + \frac{[p\,dl]}{p}. \tag{60}$$

Die Abweichungen $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$ des wahrscheinlichsten Werthes x der beobachteten Gröfse von den einzelnen Beobachtungsergebnissen, oder die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler sind wieder wie beim einfachen arithmetischen Mittel:

$$\left\{\begin{aligned} v_1 &= x - \lambda_1, \\ v_2 &= x - \lambda_2, \\ v_3 &= x - \lambda_3, \\ &\ldots\ldots, \\ v_n &= x - \lambda_n. \end{aligned}\right. \tag{61}$$

Multipliziren wir diese Gleichungen mit den Gewichten $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ und addiren die erhaltenen Gleichungen, so folgt:

$$\begin{aligned} p_1 v_1 &= p_1 x - p_1\lambda_1, \\ p_2 v_2 &= p_2 x - p_2\lambda_2, \\ p_3 v_3 &= p_3 x - p_3\lambda_3, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ p_n v_n &= p_n x - p_n\lambda_n, \\ \hline [pv] &= [p]x - [p\lambda], \end{aligned}$$

oder, da nach Formel (**58**): $[p]x = [p\lambda]$, also: $[p]x - [p\lambda] = 0$ ist,:

(**62**) $$[pv] = 0.$$

Demnach ist die Summe der mit den Gewichten multiplizirten wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler gleich Null, wenn das allgemeine arithmetische Mittel mehrerer ungleich genauen und unabhängigen Beobachtungsergebnisse als wahrscheinlichster Werth der beobachteten Gröfse angenommen wird, was wir wiederum zur Probe für die richtige Berechnung von x benutzen.

Beispiel 1: Bei der Triangulation eines Teils des Regierungsbezirks Düsseldorf ist auf dem Standpunkte Wermelskirchen die Richtung nach Radevormwald als einfaches arithmetisches Mittel aus

16 Einzelbeobachtungen erhalten zu: $\lambda_1 = 150° 45' 36{,}47''$, dann aus
4 " " " : $\lambda_2 = 150\ 45\ 36{,}16$, endlich aus
4 " " " : $\lambda_3 = 150\ 45\ 36{,}68$.

Um aus diesen 3 Werthen den wahrscheinlichsten Werth x der Richtung zu finden, nehmen wir als Gewichtseinheit das Gewicht einer einmaligen Beobachtung der Richtung, womit wir nach Formel (**55**) für die Werthe λ_1, λ_2, λ_3, die Gewichte $p_1 = 16$, $p_2 = 4$, $p_3 = 4$ erhalten. Mit dem Näherungswerthe $l = 150° 45' 36{,}00''$ ergiebt sich sodann:

$p_1 = 16,$	$dl_1 = +0{,}47'',$	$p_1 dl_1 = +\ 7{,}52,$
$p_2 = 4,$	$dl_2 = +0{,}16$,	$p_2 dl_2 = +\ 0{,}64,$
$p_3 = 4,$	$dl_3 = +0{,}68$,	$p_3 dl_3 = +\ 2{,}72,$
$[p] = 24,$		$[pdl] = +10{,}88,$
		$\frac{[pdl]}{[p]} = +0{,}453'',$

und:

(**60**) $$x = l + \frac{[pdl]}{[p]} = 150° 45' 36{,}00'' + 0{,}453'' = 150° 45' 36{,}453''.$$

Ferner ergiebt sich nach Formel (**61**):

$v_1 = x - \lambda_1 = -0{,}017''$, und: $p_1 v_1 = -0{,}272$,
$v_2 = x - \lambda_2 = +0{,}293$, $p_2 v_2 = +1{,}172$,
$v_3 = x - \lambda_3 = -0{,}227$, $p_3 v_3 = -0{,}908$,
$[pv] = -0{,}008$.

$[pv]$ soll nach Formel (**62**) gleich Null sein. Die Abweichung $-0{,}008$ erklärt sich durch die Abrundung des Werthes von x bezw. von $\frac{[pdl]}{[p]}$; sie mufs gleich sein der Abweichung des $[p]$ fachen Quotienten $\frac{[pdl]}{[p]}$ von $[pdl]$, oder es mufs genau sein: $[pv] = [p]\left(\frac{[pdl]}{[p]}\right) - [pdl]$, also im vorliegenden Falle: $[pv] = 24 \cdot 0{,}453 - 10{,}88 = 10{,}872 - 10{,}880 = -0{,}008$. Die Abrundung von x kann höchstens 0,5 Einheiten der letzten Stelle dieses Werthes betragen und demnach darf auch $[v]$ höchstens $0{,}5 \cdot [p]$ Einheiten der letzten Stelle des Werthes von x von Null abweichen, im vorliegenden Falle also höchstens um: $24 \cdot 0{,}0005'' = 0{,}012''$.

Beispiel 2: In demselben trigonometrischen Netze sind auf dem excentrischen Standpunkte S_3 des Punktes Düsseldorf zur Bestimmung der Richtungen nach Metzkausen, Höhscheid und Köln folgende Winkel beobachtet:

Metzkausen-Höhscheid	12mal zu:	46° 17' 36,70'',
Höhscheid-Köln	8mal zu:	43 13 23,50 ,
Metzkausen-Hülfspunkt	22mal zu:	57 04 44,11 ,
Hülfspunkt-Köln	22mal zu:	32 26 11,36 .

Aus diesen Beobachtungsergebnissen soll der wahrscheinlichste Werth des Winkels Metzkausen-Köln abgeleitet werden.

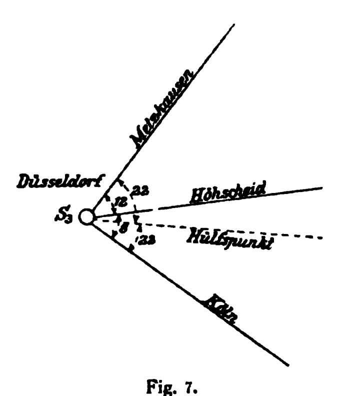


Fig. 7.

Wir nehmen als Gewichtseinheit das Gewicht einer einmaligen Beobachtung eines Winkels. Dann erhalten wir nach Formel (**55**) als Gewicht der vorliegenden Beobachtungsergebnisse: 12, 8, 22 und 22. Aus den Beobachtungsergebnissen erhalten wir zwei Werthe des Winkels Metzkausen - Köln und zwar den einen Werth als Summe der Winkel Metzkausen - Höhscheid und Höhscheid - Köln $\lambda_1 = 89° 31' 00{,}20''$, den andern Werth als Summe der Winkel Metzkausen-Hülfspunkt und Hülfspunkt-Köln: $\lambda_2 = 89° 30' 55{,}47''$. Nach Formel (**41**) ergiebt sich das Gewicht p_1 des ersten Werthes λ_1 aus $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$ zu: $p_1 = 4{,}8$ und das Gewicht p_2 des zweiten Werthes λ_2 aus: $\frac{1}{p_2} = \frac{1}{22} + \frac{1}{22} = \frac{1}{11}$ zu: $p_2 = 11$. Mit dem Näherungswerthe $l = 89° 30' 55''$ erhalten wir dann nach Formel (**60**):

$$p_1 = 4{,}8, \quad p_2 = 11{,}0, \quad [p] = 15{,}8, \qquad dl_1 = 5{,}20'', \quad dl_2 = 0{,}47'', \qquad p_1\,dl_1 = 24{,}96, \quad p_2\,dl_2 = 5{,}17, \quad [p\,dl] = 30{,}13, \quad \frac{[p\,dl]}{[p]} = 1{,}91'',$$

$$x = l + \frac{[p\,dl]}{[p]} = 89° 30' 55'' + 1{,}91 = 89° 30' 56{,}91'',$$

und ferner nach Formel (**61**):

$$v_1 = x - \lambda_1 = -3{,}29'', \quad v_2 = x - \lambda_2 = +1{,}44'', \qquad p_1 v_1 = -15{,}79, \quad p_2 v_2 = +15{,}84, \quad [pv] = +0{,}05.$$

$[pv]$ soll gleich Null sein, wird aber wegen der Abrundung von x bezw. von $\frac{[p\,dl]}{[p]}$ hier $[pv] = [p]\left(\frac{[p\,dl]}{[p]}\right) - [p\,dl] = 30{,}18 - 30{,}13 = +0{,}05$. $[p]$ darf hier höchstens $15{,}8 \cdot 0{,}005'' = 0{,}08''$ sein.

Beispiel 3: Aus den Anfangsneigungen und den Winkeln der vier in dem Knotenpunkte 172 zusammentreffenden Polygonzüge ergeben sich für die Neigung der Polygonseite 172—194 gegen die Abscissenlinie 4 Werthe und zwar

aus Zug 38 mit 5 Winkeln:
$\lambda_{38} = 92° 20' 25''$,
aus Zug 39 mit 3 Winkeln:
$\lambda_{39} = 92° 20' 11''$,
aus Zug 40 mit 5 Winkeln:
$\lambda_{40} = 92° 21' 26''$,
aus Zug 41 mit 6 Winkeln:
$\lambda_{41} = 92° 21' 00''$.

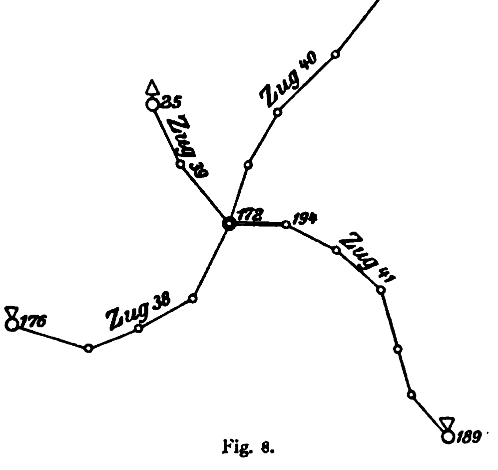


Fig. 8.

Die Polygonwinkel sind sämtlich mit gleicher Genauigkeit beobachtet worden, und wenn wir das Gewicht der Beobachtung eines Polygonwinkels als Gewichtseinheit nehmen, erhalten wir nach Formel (**42**) für die Gewichte der Neigungen $\frac{1}{p_{38}} = 5$, $\frac{1}{p_{39}} = 3$, $\frac{1}{p_{40}} = 5$, $\frac{1}{p_{41}} = 6$. Damit ergiebt sich der wahrscheinlichste Werth x der Neigung 172—194 nach Formel (**60**), wenn wir den Näherungswerth $l = 92° 20' 00''$ nehmen,:

$p_{38} = 0{,}20$,	$dl_{38} = 25''$,	$p_{38}\,dl_{38} = 5{,}0$,
$p_{39} = 0{,}33$,	$dl_{39} = 11''$,	$p_{39}\,dl_{39} = 3{,}6$,
$p_{40} = 0{,}20$,	$dl_{40} = 86''$,	$p_{40}\,dl_{40} = 17{,}2$,
$p_{41} = 0{,}17$,	$dl_{41} = 60''$,	$p_{41}\,dl_{41} = 10{,}2$,
$[p] = 0{,}90$,		$[p\,dl] = 36{,}0$,
		$\frac{[p\,dl]}{[p]} = 40''$,

$$x = l + \frac{[p\,dl]}{[p]} = 92° 20' 00'' + 40'' = 92° 20' 40''.$$

Ferner erhalten wir nach Formel (**61**):

$v_{38} = x - \lambda_{38} = +15''$,	$p_{38}v_{38} = +\ 3{,}0$,
$v_{39} = x - \lambda_{39} = +29''$,	$p_{39}v_{39} = +\ 9{,}6$,
$v_{40} = x - \lambda_{40} = -46''$,	$p_{40}v_{40} = -\ 9{,}2$,
$v_{41} = x - \lambda_{41} = -20''$,	$p_{41}v_{41} = -\ 3{,}4$,
	$[pv] = +12{,}6 - 12{,}6 = 0{,}0$.

2. Um nachzuweisen, dafs auch die Formel (**58**) für das allgemeine arithmetische Mittel unserm zweiten, im § 13 aufgestellten allgemeinen Grundsatze entspricht, bilden wir nach Formel (**61**) die Quadrate der wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler v, multipliziren sie mit den Gewichten p, addiren alles und erhalten damit:

$$\begin{aligned} p_1 v_1 v_1 &= p_1 xx - 2p_1 \lambda_1 x + p_1 \lambda_1 \lambda_1, \\ p_2 v_2 v_2 &= p_2 xx - 2p_2 \lambda_2 x + p_2 \lambda_2 \lambda_2, \\ p_3 v_3 v_3 &= p_3 xx - 2p_3 \lambda_3 x + p_3 \lambda_3 \lambda_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_n v_n v_n &= p_n xx - 2p_n \lambda_n x + p_n \lambda_n \lambda_n, \\ \hline [pvv] &= [p]xx - 2[p\lambda]x + [p\lambda\lambda]. \end{aligned}$$

Dann finden wir den Werth von x, für den $[pvv]$ ein Minimum wird, indem wir den Ausdruck für $[pvv]$ nach x differenziren, den Differenzialquotienten $\frac{d[pvv]}{dx}$ gleich Null setzen und die damit erhaltene Gleichung nach x auflösen:

$$\frac{d[pvv]}{dx} = 2[p]x - 2[p\lambda],$$
$$2[p]x - 2[p\lambda] = 0,$$
$$x = \frac{[p\lambda]}{[p]}.$$

Dieser Werth von x stimmt mit dem dafür in Formel (**58**) gegebenen überein, wie es sein soll.

3. Der mittlere Fehler $\mathfrak{m}$ einer Beobachtung vom Gewichte $\mathfrak{p} = 1$, oder der Gewichtseinheit, ergiebt sich aus den wahrscheinlichsten Beobachtungsfehlern $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$ nach Formel (**47**) zu:

$$\mathfrak{m} = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}, \qquad (63)$$

da hier ebenso wie beim einfachen arithmetischen Mittel $q=1$ Beobachtungsergebnis zur einfachen nicht versicherten Bestimmung der gesuchten Gröfse genügt, mithin $n-1$ überschüssige Beobachtungen ausgeführt worden sind, wenn n Beobachtungsergebnisse vorliegen.

Sodann ergeben sich die mittleren Fehler $m_1, m_2, m_3, \ldots . m_n$ der Beobachtungsergebnisse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots . \lambda_n$, deren Gewichte $p_1, p_2, p_3, \ldots . p_n$ sind, nach Formel (**35**) zu:

(**64**)
$$\begin{cases} m_1 = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{p_1}}, \\ m_2 = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{p_2}}, \\ m_3 = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{p_3}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m_n = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{p_n}}. \end{cases}$$

Für das Gewicht P des allgemeinen arithmetischen Mittels

$$x = \frac{p_1}{[p]}\lambda_1 + \frac{p_2}{[p]}\lambda_2 + \frac{p_3}{[p]}\lambda_3 + \cdots\cdots \frac{p_n}{[p]}\lambda_n$$

ergiebt sich ferner nach Formel (**43**):

$$\frac{1}{P} = \left(\frac{p_1}{[p]}\right)^2 \frac{1}{p_1} + \left(\frac{p_2}{[p]}\right)^2 \frac{1}{p_2} + \left(\frac{p_3}{[p]}\right)^2 \frac{1}{p_3} + \cdots\cdots \left(\frac{p_n}{[p]}\right)^2 \frac{1}{p_n}$$

$$= \frac{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots p_n}{[p]^2} = \frac{1}{[p]} \text{ und damit:}$$

(**65**)
$$P = [p].$$

Hiermit folgt dann endlich für den mittleren Fehler M des allgemeinen arithmetischen Mittels x nach Formel (**35**):

(**66**)
$$M = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{P}} = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{[p]}} = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{[p](n-1)}}.$$

Beispiel 1: In unserm Beispiel 1 ergiebt sich die Quadratsumme $[pvv]$ der auf die Gewichtseinheit reduzirten wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler zu:

$$\begin{aligned} p_1 v_1 v_1 &= 0{,}005, \\ p_2 v_2 v_2 &= 0{,}343, \\ p_3 v_3 v_3 &= 0{,}206, \\ \hline [pvv] &= 0{,}554, \end{aligned}$$

und hiermit der mittlere Fehler $\mathfrak{m}$ der Gewichtseinheit, oder einer einmaligen Beobachtung einer Richtung zu:

(**63**)
$$\mathfrak{m} = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{0{,}554}{3-1}} = \pm 0{,}53''.$$

Sodann ergeben sich die mittleren Fehler m_1, m_2, m_3 der Beobachtungsergebnisse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ zu:

(**64**)
$$\begin{cases} m_1 = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{p_1}} = \pm 0{,}53 \sqrt{\frac{1}{16}} = \pm 0{,}13'', \\ m_2 = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{p_2}} = \pm 0{,}53 \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm 0{,}26'', \\ m_3 = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{p_3}} = \pm 0{,}53 \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm 0{,}26'', \end{cases}$$

ferner das Gewicht P des wahrscheinlichsten Werthes x der Richtung Wermelskirchen-Radevormwald zu:

$$P = [p] = 24. \tag{65}$$

und damit endlich der mittlere Fehler M des wahrscheinlichsten Werthes x der Richtung zu:

$$M = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{P}} = \pm 0{,}53 \sqrt{\frac{1}{24}} = \pm 0{,}11''. \tag{66}$$

Beispiel 3*): Im Beispiel 3 erhalten wir die Quadratsumme $[pvv]$ der auf die Gewichtseinheit reduzirten wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler zu:

$$\begin{aligned} p_{38} v_{38} v_{38} &= 45, \\ p_{39} v_{39} v_{39} &= 278, \\ p_{40} v_{40} v_{40} &= 423, \\ p_{41} v_{41} v_{41} &= 68, \\ \hline [pvv] &= 814. \end{aligned}$$

Hiermit ergiebt sich der mittlere Fehler $\mathfrak{m}$ der Gewichtseinheit, oder einer Beobachtung eines Polygonwinkels zu:

$$\mathfrak{m} = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} + \pm \sqrt{\frac{814}{4-1}} = \pm 16''. \tag{63}$$

Sodann ergeben sich die mittleren Fehler m_{38}, m_{39}, m_{40}, m_{41} der Bestimmung der Neigung 172—194 in den einzelnen Polygonzügen 38, 39, 40, 41 zu:

$$\left\{ \begin{aligned} m_{38} &= \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{p_{38}}} = \pm 16 \sqrt{5} = \pm 35'', \\ m_{39} &= \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{p_{39}}} = \pm 16 \sqrt{3} = \pm 27'', \\ m_{40} &= \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{p_{40}}} = \pm 16 \sqrt{5} = \pm 35'', \\ m_{41} &= \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{p_{41}}} = \pm 16 \sqrt{6} = \pm 38'', \end{aligned} \right. \tag{64}$$

ferner das Gewicht P des wahrscheinlichsten Werthes x der Neigung 172—194 zu:

$$P = [p] = 0{,}90, \tag{65}$$

und endlich der mittlere Fehler M des wahrscheinlichsten Werthes x der Neigung 172—194 zu:

$$M = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{P}} = \pm 16 \sqrt{\frac{1}{0{,}90}} = \pm 17''. \tag{66}$$

4. Die Rechnung nach den Formeln (**58**) bis (**66**) wird in der Regel einfacher und übersichtlicher durch schematische Anordnung, wie die folgende Darstellung unseres Beispiels 3 zeigt:

---

*) Beim Beispiel 2 sehen wir von der Berechnung der mittleren Fehler und Gewichte ab, da nur zwei Beobachtungsergebnisse vorliegen, die keinen auch nur einigermafsen zuverlässigen Werth des mittleren Fehlers liefern.

Nr. der Beobachtung.	$\frac{1}{p}$.	Gewichte p.		Beobachtungsergebnisse λ.			$dl = \lambda - l$.	$p\,dl$.	$v = x - \lambda$.		pv.			pvv.	$\sqrt{\frac{1}{p}}$.	$m = \pm\, m\sqrt{\frac{1}{p}}$.
				°	'	"	"			"						"
38	5	0,20		92	20	25	25	5,0	+	15	+	3,0		45	2,2	35
39	3	0,33		92	20	11	11	3,6	+	29	+	9,6		278	1,7	27
40	5	0,20		92	21	26	86	17,2	—	46	—	9,2		423	2,2	35
41	6	0,17		92	21	00	60	10,2	—	20	—	3,4		68	2,4	38
$P=[p]$		0,90	l	92	20	00	$[p\,dl]$	36,0			+	12,6	$[pvv]$	814	8,5	135
$\sqrt{\frac{1}{[p]}}$		1,05	$\frac{[p\,dl]}{[p]}$			40					—	12,6	$\frac{[pvv]}{n-1}$	271		
$M = \pm\, m\sqrt{\frac{1}{[p]}}$		±17"	x	92	20	40				$[pv]$		0,0	m	±16"		

5. Die Quadratsumme der auf die Gewichtseinheit reduzirten wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler $[pvv]$ kann ebenso wie für gleich genaue auch für ungleich genaue Beobachtungsergebnisse in geeigneten Fällen direkt aus den Beobachtungsergebnissen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots. \lambda_n$ oder den Werthen $dl_1, dl_2, dl_3, \ldots. dl_n$ berechnet werden; denn wenn in den unter Nr. 2 für $[pvv]$ erhaltenen Ausdruck

$$[pvv] = [p]\,xx - 2[p\lambda]\,x + [p\lambda\lambda]$$

für x nach Formel (58) $\frac{[p\lambda]}{[p]}$ eingesetzt wird, so folgt:

$$[pvv] = [p]\frac{[p\lambda]}{[p]}\frac{[p\lambda]}{[p]} - 2[p\lambda]\frac{[p\lambda]}{[p]} + [p\lambda\lambda], \text{ oder:}$$

$$[pvv] = [p\lambda\lambda] - \frac{[p\lambda]\,[p\lambda]}{[p]}$$

und wenn hierin: $\lambda_1 = l + dl_1$, $\lambda_2 = l + dl_2$, $\lambda_3 = l + dl_3$, $\ldots.\ \lambda_n = l + dl_n$, also: $[p\lambda\lambda] = [p]\,ll + 2l[p\,dl] + [p\,dl\,dl]$ und $[p\lambda] = [p]\,l + [p\,dl]$ gesetzt wird, so wird:

$$[pvv] = [p]\,ll + 2l[p\,dl] + [p\,dl\,dl] - \frac{[p]\,l\,[p]\,l + 2[p]\,l\,[p\,dl] + [p\,dl]\,[p\,dl]}{[p]}$$

$$= [p\,dl\,dl] = \frac{[p\,dl]\,[p\,dl]}{[p]}.$$

Demnach ist:

$$[pvv] = [p\lambda\lambda] - \frac{[p\lambda]\,[p\lambda]}{[p]} = [p\,dl\,dl] - \frac{[p\,dl]\,[p\,dl]}{[p]}. \tag{67}$$

Beispiel: Es liegen die Ergebnisse wiederholter Messungen einer Linie von nahezu 200m Länge und die Gewichte dieser Ergebnisse vor wie folgt:

$\lambda_1 = 200{,}45$,	$p_1 = 5{,}6$,
$\lambda_2 = 200{,}78$,	$p_2 = 8{,}4$,
$\lambda_3 = 200{,}32$,	$p_3 = 2{,}8$,
$\lambda_4 = 200{,}63$,	$p_4 = 7{,}0$,
$\lambda_5 = 200{,}81$,	$p_5 = 4{,}2$,
	$[p] = 28{,}0$.

Die Gewichtseinheit ist das Gewicht einer einmaligen Messung einer Linie von 100m Länge. Es soll der mittlere Fehler der Gewichtseinheit festgestellt werden. Wir nehmen $l = 200$, so dafs wird:

$dl_1 = 0{,}45$,	$p_1 dl_1 = 2{,}52$,	$p_1 dl_1 dl_1 = 1{,}134$,
$dl_2 = 0{,}78$,	$p_2 dl_2 = 6{,}55$,	$p_2 dl_2 dl_2 = 5{,}109$,
$dl_3 = 0{,}32$,	$p_3 dl_3 = 0{,}90$,	$p_3 dl_3 dl_3 = 0{,}288$,
$dl_4 = 0{,}63$,	$p_4 dl_4 = 4{,}41$,	$p_4 dl_4 dl_4 = 2{,}778$,
$dl_5 = 0{,}81$,	$p_5 dl_5 = 3{,}40$,	$p_5 dl_5 dl_5 = 2{,}754$,
	$[pdl] = 17{,}78$,	$[pdldl] = 12{,}063$.

Hiermit erhalten wir:

$$[pvv] = [pdldl] - \frac{[pdl]\,[pdl]}{[p]} = 12{,}063 - \frac{17{,}78 \cdot 17{,}78}{28{,}0} = 0{,}773 \tag{67}$$

und den mittleren Fehler m der Gewichtseinheit:

$$\mathrm{m} = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{0{,}773}{5-1}} = \pm\, 0{,}44^{\mathrm{m}}. \tag{63}$$

§ 18. Berechnung des mittleren Fehlers aus Beobachtungsdifferenzen.

1. Wir können oft in einfacher Weise eine gröfsere Anzahl Differenzen zwischen den Ergebnissen zweier gleich genauen Beobachtungen gleichartiger Gröfsen erlangen, die einen werthvollen Anhalt für die Genauigkeit der Beobachtungen geben, und deshalb wollen wir noch feststellen, wie aus solchen Beobachtungsdifferenzen der mittlere Fehler abzuleiten ist.

2. Wenn uns die Beobachtung einer Reihe gleichartiger Gröfsen die Ergebnisse $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \ldots \lambda'_n$ geliefert hat und wir dann bei einer zweiten Beobachtung derselben Reihe von Gröfsen die Ergebnisse $\lambda''_1, \lambda''_2, \lambda''_3, \ldots \lambda''_n$ erhalten haben, so werden die Differenzen dieser Beobachtungsergebnisse

$$\begin{cases} \Delta_1 = \lambda'_1 - \lambda''_1, \\ \Delta_2 = \lambda'_2 - \lambda''_2, \\ \Delta_3 = \lambda'_3 - \lambda''_3, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \Delta_n = \lambda'_n - \lambda''_n \end{cases} \tag{68}$$

im allgemeinen zusammengesetzt sein aus einer regelmäfsigen Differenz und aus den zufälligen Differenzen $d_1, d_2, d_3, \ldots d_n$.

Die regelmäfsige Differenz ist entweder für alle Beobachtungsergebnisse gleich, oder sie ist für die verschiedenen Beobachtungsergebnisse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ proportional bestimmten bekannten Gröfsen $l_1, l_2, l_3, \ldots l_n$. Im erstern Falle bezeichnen wir die regelmäfsige Differenz mit k, im zweiten Falle mit $kl_1, kl_2, kl_3, \ldots kl_n$.

Die Gröfse k mufs im allgemeinen aus den Beobachtungsdifferenzen $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots \Delta_n$ abgeleitet werden und wir betrachten daher die Beobachtungsdifferenzen als Ergebnisse direkter Beobachtungen von k, oder $kl_1, kl_2, kl_3, \ldots kl_n$.

3. Wir behandeln zunächst den einfacheren Fall, dafs die regelmäfsige Differenz für alle Beobachtungsergebnisse gleich ist.

In diesem Falle erhalten wir für den wahrscheinlichsten Werth von k, wenn alle Beobachtungsergebnisse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ gleiches Gewicht haben, nach Formel (48):

$$k = \frac{[\Delta]}{n}, \tag{69}$$

oder wenn die Beobachtungsergebnisse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$, verschiedene Gewichte $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ haben, nach Formel (58):

$$k = \frac{[p\Delta]}{[p]}. \tag{70}$$

Dann ergeben sich die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler oder hier die wahrscheinlichsten Werthe $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_n$ der zufälligen Differenzen nach den Formeln (51) und (61) übereinstimmend zu:

$$(71) \qquad \begin{cases} \delta_1 = k - \Delta_1, \\ \delta_2 = k - \Delta_2, \\ \delta_3 = k - \Delta_3, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \delta_n = k - \Delta_n. \end{cases}$$

Die Quadratsumme dieser zufälligen Differenzen kann direkt aus den Beobachtungsdifferenzen $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots \Delta_n$ berechnet werden und zwar bei gleich genauen Beobachtungen nach Formel (57) aus:

$$(72) \qquad [\delta\delta] = [\Delta\Delta] - \frac{[\Delta]}{n}[\Delta] = [\Delta\Delta] - nkk,$$

oder bei ungleich genauen Beobachtungen nach Formel (67) aus:

$$(73) \qquad [p\delta\delta] = [p\Delta\Delta] - \frac{[p\Delta]}{[p]}[p\Delta] = [p\Delta\Delta] - [p]kk.$$

Beispiel 1: Bei der Aufnahme eines Polygonzuges mit dreifsig 20m langen Strecken sind die Höhenwinkel jedesmal auf dem Anfangspunkte und dem Endpunkte der Strecke mit einem Freihandhöhenwinkelmesser gleich genau beobachtet worden. Die Ergebnisse der beiden Beobachtungen λ' und λ'', die Unterschiede beider Ergebnisse $\Delta = \lambda' - \lambda''$, sowie die Quadrate der Unterschiede $\Delta\Delta$ sind in nachfolgender Tabelle enthalten:

λ'. °	λ''. °	Δ. °	ΔΔ.	λ'. °	λ''. °	Δ. °	ΔΔ.	λ'. °	λ''. °	Δ. °	ΔΔ.
+0,2	+1,0	−0,8	0,64	+1,3	+1,9	−0,6	0,36	+ 3,4	+ 3,8	− 0,4	0,16
+0,5	+1,0	−0,5	0,25	+1,0	+1,7	−0,7	0,49	+ 3,5	+ 4,1	− 0,6	0,36
+1,1	+1,8	−0,7	0,49	+0,8	+1,5	−0,7	0,49	+ 3,3	+ 3,9	− 0,6	0,36
+0,9	+1,6	−0,7	0,49	+1,4	+2,1	−0,7	0,49	+ 3,1	+ 3,6	− 0,5	0,25
+0,7	+1,3	−0,6	0,36	+1,5	+2,1	−0,6	0,36	+ 3,2	+ 3,8	− 0,6	0,36
+1,3	+2,0	−0,7	0,49	+1,7	+2,4	−0,7	0,49	+ 2,7	+ 3,6	− 0,9	0,81
+1,8	+2,3	−0,5	0,25	+2,3	+2,8	−0,5	0,25	+ 2,6	+ 3,2	− 0,6	0,36
+2,0	+2,7	−0,7	0,49	+2,8	+3,3	−0,5	0,25	+ 2,1	+ 2,8	− 0,7	0,49
+1,9	+2,4	−0,5	0,25	+2,9	+3,6	−0,7	0,49	+ 2,0	+ 2,5	− 0,5	0,25
+1,5	+1,9	−0,4	0,16	+3,0	+3,8	−0,3	0,09	+ 1,9	+ 2,6	− 0,7	0,49
								+58,4	+76,6	−18,2 =[Δ]	11,52 =[ΔΔ]

Hieraus ergiebt sich zunächst als wahrscheinlichster Werth der regelmäfsigen Abweichung zwischen den auf dem Anfangspunkt und den auf dem Endpunkte jeder Strecke beobachteten Höhenwinkeln:

$$(69) \qquad k = \frac{[\Delta]}{n} = \frac{-18{,}2}{30} = -0{,}61^\circ,$$

was der aus den vorliegenden Beobachtungsergebnissen folgende wahrscheinlichste Werth des doppelten Indexfehlers des benutzten Höhenwinkelmessers ist.

Ferner ergiebt sich für die Quadratsumme der zufälligen Differenzen der Höhenwinkel:

$$(72) \qquad [\delta\delta] = [\Delta\Delta] - \frac{[\Delta]}{n}[\Delta] = 11{,}52 - \frac{18{,}2}{30}18{,}2 = 0{,}48.$$

4. In dem zweiten Falle, wo die regelmäfsigen Differenzen nicht für alle Beobachtungsergebnisse gleich sind, sondern wo sie proportional den bekannten Gröfsen $l_1, l_2, l_3, \dots l_n$, also gleich $kl_1, kl_2, kl_3, \dots kl_n$ sind, liefern uns die Beobachtungsdifferenzen

$$(74) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta_1 &= \lambda'_1 - \lambda''_1, \\ \Delta_2 &= \lambda'_2 - \lambda''_2, \\ \Delta_3 &= \lambda'_3 - \lambda''_3, \\ &\dots\dots\dots, \\ \Delta_n &= \lambda'_n - \lambda''_n \end{aligned} \right.$$

keine unmittelbaren Bestimmungen des Faktors k, sondern direkte Bestimmungen der Gröfsen $kl_1, kl_2, kl_3, \dots kl_n$, und wir erhalten k als arithmetisches Mittel aus den Werthen $k_1 = \frac{\Delta_1}{l_1}$, $k_2 = \frac{\Delta_2}{l_2}$, $k_3 = \frac{\Delta_3}{l_3}$, ... $k_n = \frac{\Delta_n}{l_n}$. Diese Werthe haben verschiedene Gewichte $p_{k_1}, p_{k_2}, p_{k_3}, \dots p_{k_n}$, die wir, da

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\Delta_1}{l_1} = \frac{1}{l_1}(\lambda'_1 - \lambda''_1), \\ k_2 &= \frac{\Delta_2}{l_2} = \frac{1}{l_2}(\lambda'_2 - \lambda''_2), \\ k_3 &= \frac{\Delta_3}{l_3} = \frac{1}{l_3}(\lambda'_3 - \lambda''_3), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots, \\ k_n &= \frac{\Delta_n}{l_n} = \frac{1}{l_n}(\lambda'_n - \lambda''_n) \end{aligned}$$

ist, aus den Gewichten $p_1, p_2, p_3, \dots p_n$ der Beobachtungsergebnisse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_n$ nach Formel (**44**) erhalten zu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_{k_1}} &= \frac{1}{l_1 l_1} \cdot 2 \cdot \frac{1}{p_1} \quad \text{oder} \quad p_{k_1} = \frac{1}{2} p_1 l_1 l_1, \\ \frac{1}{p_{k_2}} &= \frac{1}{l_2 l_2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{p_2} \quad \text{„} \quad p_{k_2} = \frac{1}{2} p_2 l_2 l_2, \\ \frac{1}{p_{k_3}} &= \frac{1}{l_3 l_3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{p_3} \quad \text{„} \quad p_{k_3} = \frac{1}{2} p_3 l_3 l_3, \\ &\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots, \\ \frac{1}{p_{k_n}} &= \frac{1}{l_n l_n} \cdot 2 \cdot \frac{1}{p_n} \quad \text{„} \quad p_{k_n} = \frac{1}{2} p_n l_n l_n. \end{aligned}$$

Diese Gewichte vereinfachen sich, wenn die Gewichte $p_1, p_2, p_3, \dots p_n$ der Beobachtungsergebnisse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_n$ sämtlich $= p$ sind zu:

$$\begin{aligned} p_{k_1} &= \frac{1}{2} p l_1 l_1, \\ p_{k_2} &= \frac{1}{2} p l_2 l_2, \\ p_{k_3} &= \frac{1}{2} p l_3 l_3, \\ &\dots\dots\dots, \\ p_{k_n} &= \frac{1}{2} p l_n l_n. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir als wahrscheinlichsten Werth von k nach Formel (**58**) bei gleich genauen Beobachtungen:

$$k = \frac{[p_k k]}{[p_k]} = \frac{\frac{1}{2} p \left[l l \frac{\Delta}{l} \right]}{\frac{1}{2} p [ll]} \quad \text{oder:}$$

$$(75) \qquad k = \frac{[l\Delta]}{[ll]},$$

und bei ungleich genauen Beobachtungen:

$$k = \frac{[p_k k]}{[p_k]} = \frac{\left[\frac{1}{2} p l l \frac{\Delta}{l}\right]}{\left[\frac{1}{2} p l l\right]} \text{ oder:}$$

(76) $$k = \frac{[p l \Delta]}{[p l l]}.$$

Die wahrscheinlichsten Werthe der Beobachtungsfehler oder der zufälligen Differenzen $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_n$ ergeben sich sodann nach:

(77) $$\begin{cases} \delta_1 = k l_1 - \Delta_1, \\ \delta_2 = k l_2 - \Delta_2, \\ \delta_3 = k l_3 - \Delta_3, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \delta_n = k l_n - \Delta_n. \end{cases}$$

Aus den hiernach für $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_n$ folgenden Zahlenwerthen ist dann die Quadratsumme $[\delta\delta]$ oder $[p\delta\delta]$ zu bilden.

Beispiel 2: Bei der Aufnahme einiger Polygonzüge mit 20 Strecken sind die Streckenlängen zweimal von verschiedenen Landmessern mit verschiedenen Längenmeſswerkzeugen gemessen worden. Behufs Ermittlung des mittleren Fehlers der Streckenmessung soll die Quadratsumme $[p\delta\delta]$ der zufälligen Differenzen $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_n$ beider Messungen berechnet werden.

Die Längenmessungen sind, auſser mit zufälligen Fehlern, mit regelmäſsigen, aus der Ungenauigkeit und der Handhabung der verwendeten Längenmeſswerkzeuge entspringenden Fehlern behaftet, die sich proportional den gemessenen Längen fortpflanzen.

Diese regelmäſsigen Fehler sind verschieden für Messungen, die von verschiedenen Landmessern mit verschiedenen Meſswerkzeugen ausgeführt werden. Demnach besteht auch zwischen zwei in solcher Weise verschieden ausgeführten Messungen ein regelmäſsiger Unterschied, der für die einzelnen gemessenen Strecken proportional ihrer Länge ist. Sind also $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ die Streckenlängen, so sind $k\lambda_1, k\lambda_2, k\lambda_3, \ldots k\lambda_n$ die regelmäſsigen Unterschiede zweier Messungen derselben. Dann erhalten wir für k:

(76) $$k = \frac{[p\lambda\Delta]}{[p\lambda\lambda]},$$

und für die zufälligen Differenzen $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_n$ beider Messungen:

(77) $$\begin{cases} \delta_1 = k\lambda_1 - \Delta_1, \\ \delta_2 = k\lambda_2 - \Delta_2, \\ \delta_3 = k\lambda_3 - \Delta_3, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \delta_n = k\lambda_n - \Delta_n. \end{cases}$$

Dementsprechend ist in den folgenden Tabellen $[p\delta\delta]$ aus den Ergebnissen λ' und λ'' beider Messungen der Polygonstrecken und aus den Gewichten p berechnet worden:

Nr.	λ'.	λ''.	p.	$\varDelta=\lambda'-\lambda''$.	$p\lambda$.	$p\lambda\lambda$.	$p\lambda\varDelta$.	$k\lambda$.	$\delta=k\lambda-\varDelta$.	$\delta\delta$.	$p\delta\delta$.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
1	157,80	157,92	8,6	−0,12	1360	215 000	−163,2	−0,03	+0,09	0,00 81	0,070
2	123,60	123,70	11,9	−0,10	1480	184 000	−148,0	−0,02	+0,08	0,00 64	0,076
3	127,96	127,84	11,1	+0,12	1420	182 000	+170,4	−0,02	−0,14	0,01 96	0,218
4	130,70	130,70	11,1	0,00	1450	190 000	0,0	−0,02	−0,02	0,00 04	0,004
5	115,24	115,40	12,8	−0,16	1470	169 000	−235,2	−0,02	+0,14	0,01 96	0,251
6	79,36	79,32	18,9	+0,04	1490	118 000	+ 59,6	−0,01	−0,05	0,00 25	0,047
7	77,82	77,98	18,9	−0,16	1470	115 000	−235,2	−0,01	+0,15	0,02 25	0,425
8	114,90	114,70	12,8	+0,20	1470	169 000	+294,0	−0,02	−0,22	0,04 84	0,620
9	112,88	112,84	12,8	+0,04	1450	164 000	+ 58,0	−0,02	−0,06	0,00 36	0,046
10	204,40	204,68	6,6	−0,28	1350	277 000	−378,0	−0,04	+0,24	0,05 76	0,380
11	84,14	84,14	17,4	0,00	1460	123 000	0,0	−0,02	−0,02	0,00 04	0,007
12	76,76	76,88	20,7	−0,12	1590	122 000	−190,8	−0,01	+0,11	0,01 21	0,250
13	112,26	112,32	12,8	−0,06	1430	160 000	− 85,8	−0,02	+0,04	0,00 16	0,020
14	195,40	195,26	6,9	+0,14	1350	263 000	+189,0	−0,04	−0,18	0,03 24	0,224
15	82,00	82,02	18,9	−0,02	1550	127 000	− 31,0	−0,01	+0,01	0,00 01	0,002
16	150,88	150,90	9,2	−0,02	1390	210 000	− 27,8	−0,03	−0,01	0,00 01	0,001
17	112,72	112,60	12,8	+0,12	1450	164 000	+174,0	−0,02	−0,14	0,01 96	0,251
18	151,36	151,60	9,2	−0,24	1400	213 000	−336,0	−0,03	+0,21	0,04 41	0,406
19	96,18	96,12	16,0	+0,06	1540	148 000	+ 92,4	−0,02	−0,08	0,00 64	0,010
20	122,63	122,52	11,9	+0,11	1460	180 000	+160,6	−0,02	−0,13	0,01 69	0,201
	2428,99	9,44		+0,83	$[p\lambda\lambda]$	3 493 000	+1198,0	−0,43	+1,07	$[p\delta\delta]$	3,509
				−1,28			−1831,0		−1,05		
			$[\varDelta]$	−0,45		$[p\lambda\varDelta]$	− 633,0		+0,02		

$$k=\frac{[p\lambda\varDelta]}{[p\lambda\lambda]}=\frac{-633{,}0}{3\,493\,000}=-0{,}000\,181$$

Die in der Spalte 6 unserer Tabelle erhaltenen Produkte $p\lambda$ sind verhältnismäfsig wenig von einander verschieden und wir erhalten daher einen durchaus genügend genauen Werth von k, wenn wir diese Produkte als gleich annehmen. Dann vereinfacht sich die Formel (**76**) auf:

$$k=\frac{[\varDelta]}{[\lambda]},$$

wonach wir den konstanten Unterschied der beiden Längenmessungen in einfachster Weise erhalten. Mit den in Spalte 2, 3 und 4 unserer Tabelle erhaltenen Zahlenwerthen wird

$$k=\frac{[\varDelta]}{[\lambda]}=\frac{-0{,}45}{2429}=-0{,}000\,185,$$

also nur um 4 Einheiten der sechsten Decimalstelle abweichend von dem nach Formel (**76**) erhaltenen Werthe, was für die Berechnung der regelmäfsigen Differenzen $k\lambda$ von keiner praktischen Bedeutung ist.

Die Anwendung der einfachen Formel $k=\frac{[\varDelta]}{[\lambda]}$ ermöglicht es auch, für die Berechnung von k ohne Mehraufwand an Arbeit ein weit umfangreicheres Beobachtungsmaterial zu benutzen, als zur Berechnung des mittleren Fehlers in der Regel benutzt wird. Beispielsweise sind die in unserer Tabelle mitgetheilten

Streckenlängen aus den Polygonstreckentabellen eines Bezirks von 5 Gemarkungen entnommen, worin die erste und zweite Streckenmessung je von demselben Landmesser mit denselben Meſswerkzeugen und denselben Arbeitern durchgeführt ist. Die Gesamtlänge der Strecken beträgt nach der ersten Messung 96 023,67 m, nach der zweiten Messung 96 038,93 m, also der Gesamtunterschied $[\Delta] = 96\,023{,}67 - 96\,038{,}93 = -15{,}26$ m. Danach wird:

$$k = \frac{[\Delta]}{[\lambda]} = \frac{-15{,}26}{96\,030} = -0{,}000\,159 \text{ m}.$$

Benutzen wir diesen Werth von k, so gestaltet sich die Berechnung der Quadratsumme $[p\delta\delta]$ wie folgt:

Nr.	λ'.	λ''.	$\Delta = \lambda' - \lambda''$.	$k\lambda$.	$\delta = k\lambda - \Delta$.	$\delta\delta$.	p.	$p\delta\delta$.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1	157,80	157,92	−0,12	−0,02	+0,10	0,0100	8,6	0,086
2	123,60	123,70	−0,10	−0,02	+0,08	0,0064	11,9	0,076
3	127,96	127,84	+0,12	−0,02	−0,14	0,0196	11,1	0,218
4	130,70	130,70	0,00	−0,02	−0,02	0,0004	11,1	0,004
5	115,24	115,40	−0,16	−0,02	+0,14	0,0196	12,8	0,251
6	79,36	79,32	+0,04	−0,01	−0,05	0,0025	18,9	0,047
7	77,82	77,98	−0,16	−0,01	+0,15	0,0225	18,9	0,425
8	114,90	114,70	+0,20	−0,02	−0,22	0,0484	12,8	0,620
9	112,88	112,84	+0,04	−0,02	−0,06	0,0036	12,8	0,046
10	204,40	204,68	−0,28	−0,03	+0,25	0,0625	6,6	0,412
11	84,14	84,14	0,00	−0,01	−0,01	0,0001	17,4	0,002
12	76,76	76,88	−0,12	−0,01	+0,11	0,0121	20,7	0,250
13	112,26	112,32	−0,06	−0,02	+0,04	0,0016	12,8	0,020
14	195,40	195,26	+0,14	−0,03	−0,17	0,0289	6,9	0,199
15	82,00	82,02	−0,02	−0,01	+0,01	0,0001	18,9	0,002
16	150,88	150,90	−0,02	−0,02	0,00	0,0000	9,2	0,000
17	112,72	112,60	+0,12	−0,02	−0,14	0,0196	12,8	0,251
18	151,36	151,60	−0,24	−0,02	+0,22	0,0484	9,2	0,445
19	96,18	96,12	+0,06	−0,02	−0,08	0,0064	16,0	0,102
20	122,63	122,52	+0,11	−0,02	−0,13	0,0169	11,9	0,201
	2428,99	9,41	+0,83	−0,37	+1,10		$[p\delta\delta]$	3,657
			−1,28		−1,02			
			−0,45		+0,08			

5. Das Gewicht der Beobachtungsdifferenzen Δ ergiebt sich aus dem Gewichte p der gleich genauen Beobachtungsergebnisse λ, da $\Delta = \lambda' - \lambda''$ ist, nach Formel (**42**) zu: $\frac{1}{2}p$. Da wir nun k als arithmetisches Mittel aus $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots \Delta_n$ gefunden haben, und $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_n$ die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler sind, so ergiebt sich für den mittleren Fehler m der Gewichtseinheit nach Formel (**53**):

$$m = \pm \sqrt{\frac{1}{2}p}\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-1}}, \text{ oder:}$$

$$m = \pm \sqrt{p}\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{2(n-1)}}, \tag{78}$$

und hiernach für den mittleren Fehler m eines Beobachtungsergebnisses vom Gewichte p nach Formel (**54**):

$$m = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p}} = \pm\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{2(n-1)}}, \tag{79}$$

endlich für den mittleren Fehler m_k von k, dessen Gewicht p_k, wenn die regelmäfsige Differenz für alle Beobachtungsergebnisse gleich ist, nach Formel (**55**) $p_k = n\cdot\frac{1}{2}p = \frac{1}{2}np$ ist, nach Formel (**56**):

$$m_k = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_k}} = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{2}{np}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}p}\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-1}}\sqrt{\frac{2}{np}},\ \text{oder:}$$

$$m_k = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_k}} = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{2}{np}} = \pm\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n(n-1)}}, \tag{80}$$

oder wenn die regelmäfsige Differenz proportional den Gröfsen $l_1, l_2, l_3, \ldots l_n$ ist, wo nach Formel (**65**) das Gewicht $p_k = \frac{1}{2}p[ll]$ ist, nach Formel (**66**):

$$m_k = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_k}} = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{2}{p[ll]}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}p}\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-1}}\sqrt{\frac{2}{p[ll]}},\ \text{oder:}$$

$$m_k = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_k}} = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{2}{p[ll]}} = \pm\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{[ll](n-1)}}. \tag{81}$$

Beispiel 1: Aus der unter Nr. 3 erhaltenen Quadratsumme $[\delta\delta] = 0{,}48$ der zufälligen Differenzen für $n = 30$ gleich genaue Doppelbeobachtungen von Höhenwinkeln mit den Gewichten $p = 1$, ergiebt sich der mittlere Fehler $\mathfrak{m} = m$ einer Beobachtung eines Höhenwinkels für 20m lange Strecken nach Formel (**78**) und (**79**) zu:

$$\mathfrak{m} = m = \pm\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{2(n-1)}} = \pm\sqrt{\frac{0{,}48}{2(30-1)}} = \pm 0{,}09°,$$

ferner der mittlere Fehler m_k des regelmäfsigen Unterschiedes $k = -0{,}61°$ zwischen 2 Beobachtungen eines Höhenwinkels zu:

$$m_k = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{2}{np}} = \pm 0{,}09\sqrt{\frac{2}{30}} = \pm 0{,}02°, \tag{80}$$

endlich der mittlere Fehler M des arithmetischen Mittels aus den zwei für jede Strecke vorliegenden Höhenwinkeln, dessen Gewicht nach Formel (**55**) $P = 2$ ist, zu:

$$M = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P}} = \pm 0{,}09\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm 0{,}06°. \tag{56}$$

6. In ganz ähnlicher Weise ergeben sich für ungleich genaue Beobachtungen mit den Gewichten $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ die Gewichte der Beobachtungsdifferenzen $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots \Delta_n$ zu: $\frac{1}{2}p_1, \frac{1}{2}p_2, \frac{1}{2}p_3, \ldots \frac{1}{2}p_n$ und damit für den mittleren Fehler der Gewichtseinheit nach Formel (**63**):

$$\mathfrak{m} = \pm\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{2(n-1)}}, \tag{82}$$

ferner für die mittleren Fehler der Beobachtungsergebnisse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ nach Formel (**64**):

$$(83)\quad \begin{cases} m_1 = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{1}{p_1}}, \\ m_2 = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{1}{p_2}}, \\ m_3 = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{1}{p_3}}, \\ \dots\dots\dots, \\ m_n = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{1}{p_n}}, \end{cases}$$

endlich für den mittleren Fehler m_k von k, dessen Gewicht p_k, wenn die regelmäfsige Differenz für alle Beobachtungsergebnisse gleich ist, nach Formel (**65**) $p_k = \frac{1}{2}[p]$ ist, nach Formel (**66**):

$$(84)\quad m_k = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_k}} = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{2}{[p]}} = \pm\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{[p](n-1)}}.$$

oder wenn die regelmäfsige Differenz proportional den Gröfsen $l_1, l_2, l_3, \dots l_n$ ist, wo nach Formel (**65**) das Gewicht $p_k = \frac{1}{2}[pll]$ ist, nach Formel (**66**):

$$(85)\quad m_k = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_k}} = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{2}{[pll]}} = \pm\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{[pll](n-1)}}.$$

Beispiel 2: Mit der unter Nr. 4 erhaltenen Quadratsumme $[p\delta\delta] = 3{,}509$ der zufälligen Differenzen erhalten wir den mittleren Fehler der Gewichtseinheit zu:

$$(82)\quad \mathfrak{m} = \pm\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{2(n-1)}} = \pm\sqrt{\frac{3{,}509}{2(20-1)}} = \pm 0{,}30^{\text{m}},$$

ferner nach Formel (**83**) den mittleren Fehler der kürzesten Strecke $\lambda_{12} = 76{,}8^{\text{m}}$, deren Gewicht $p_{12} = 20{,}7$ ist,:

$$m_{12} = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_{12}}} = \pm 0{,}30\sqrt{\frac{1}{20{,}7}} = \pm 0{,}07^{\text{m}},$$

einer mittleren Strecke $\lambda_{20} = 122{,}6^{\text{m}}$, deren Gewicht $p_{20} = 11{,}9$ ist,:

$$m_{20} = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_{20}}} = \pm 0{,}30\sqrt{\frac{1}{11{,}9}} = \pm 0{,}09^{\text{m}},$$

der längsten Strecke $\lambda_{10} = 204{,}5^{\text{m}}$, deren Gewicht $p_{10} = 6{,}6$ ist,:

$$m_{10} = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_{10}}} = \pm 0{,}30\sqrt{\frac{1}{6{,}6}} = \pm 0{,}12^{\text{m}},$$

und endlich den mittleren Fehler m_k von k zu:

$$(85)\quad m_k = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{2}{[p\lambda\lambda]}} = \pm 0{,}30\sqrt{\frac{2}{3\,493\,000}} = \pm 0{,}000\,227^{\text{m}}.$$

Die in die Rechnung eingeführten Gewichte $p_1, p_2, p_3, \dots p_{20}$ sind aus der für mittlere Verhältnisse geltenden Abtheilung II der Tafel 3 der Kataster-Anweisung IX vom 25. Oktober 1881 entnommen worden. An dieser Stelle findet sich das Gewicht 1 für die einmalige Messung einer Länge von 822m. Demnach ist $\mathfrak{m} = \pm 0{,}30^{\text{m}}$ der mittlere Fehler der unter mittleren Verhältnissen ausgeführten Messung einer solchen Länge. Das für Längenmessungen gebräuchliche Genauigkeitsmafs, der mittlere Fehler einer einmaligen Messung einer Länge von 100m, ergiebt sich mit dem sich in der bezeichneten Tafel findenden Gewicht $p_{100} = 14{,}8$ zu:

(39) $$\mathfrak{m}_{100} = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{\mathfrak{p}_{100}}} = \pm 0{,}30\sqrt{\frac{1}{14{,}8}} = \pm 0{,}078^{\mathrm{m}}\,*).$$

7. Wenn, wie es oft vorkommt, der wahre Werth von k voraus bekannt ist oder an Stelle dessen ein so genauer Werth von k, dafs er als wahrer Werth angenommen werden kann, der wahrscheinlichste Werth von k also nicht erst aus den Beobachtungsdifferenzen $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots \Delta_n$ zu berechnen ist, so ist die Anzahl der überschüssigen Beobachtungsergebnisse nicht gleich $n-1$, sondern gleich n.

Dann gehen die Formeln (**78**), (**79**), (**82**) und (**83**) für die Berechnung des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit und der Beobachtungsergebnisse**) über in folgende Formeln:

für gleich genaue Beobachtungen mit dem Gewichte p:

(**86**) $$\mathfrak{m} = \pm\sqrt{p}\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{2n}},$$

(**87**) $$m = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p}} = \pm\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{2n}},$$

für ungleich genaue Beobachtungen mit den Gewichten $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$:

(**88**) $$\mathfrak{m} = \pm\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{2n}},$$

(**89**) $$\begin{cases} m_1 = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{1}{p_1}}, \\ m_2 = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{1}{p_2}}, \\ m_3 = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{1}{p_3}}, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ m_n = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{1}{p_n}}. \end{cases}$$

Beispiel 3: In einem Polygonnetze sind 12 Polygonwinkel mit einem Theodoliten unabhängig von einander mit besonderer Aufstellung des Instrumentes und der Signale zur Bezeichnung der Punkte je zweimal beobachtet worden. Die Beobachtungsergebnisse λ' und λ'', die Differenzen $\Delta = \lambda' - \lambda''$, ihre Quadrate $\Delta\Delta$, sowie die Quadratsumme $[\Delta\Delta]$ sind in nachstehender Tabelle enthalten:

λ'.			λ''.			Δ.	$\Delta\Delta$.	λ'.			λ''.			Δ.	$\Delta\Delta$.
°	′	″	°	′	″	″		°	′	″	°	′	″	″	
190	26	35	190	27	08	−33	1089	150	19	45	150	20	03	− 18	324
76	18	19	76	18	36	−17	289	136	42	26	136	42	32	− 6	36
60	38	22	60	37	58	+24	576	189	04	04	189	04	14	− 10	100
111	51	23	111	51	00	+23	529	158	42	09	158	41	41	+ 28	784
223	20	53	223	20	38	+15	225	90	43	00	90	43	00	0	0
189	23	24	189	23	32	− 8	64		54	58		54	40	+110	4416
84	24	38	84	24	18	+20	400							− 92	$=[\Delta\Delta]$
														+ 18	

*) Wir sehen hier davon ab, zu erörtern, wie die Rechnung zu ändern ist, wenn berücksichtigt wird, dafs die in Tafel 3 der Kataster-Anweisung IX enthaltenen Gewichte unter Berücksichtigung der regelmäfsigen Fehler der Längenmessungen gebildet sind, da dies für das vorliegende Beispiel nicht von wesentlicher Bedeutung ist.

**) Der mittlere Fehler m_k von k ist in dem hier betrachteten Falle $= 0$ oder nahezu $= 0$.

Im vorliegenden Falle ist $k = 0$, denn die Beobachtungen der Polygonwinkel werden derart ausgeführt, dafs die Beobachtungsergebnisse mit keinen in Betracht kommenden regelmäfsigen Fehlern behaftet sind, so dafs also auch keine in Betracht kommende regelmäfsige Differenz zwischen den Ergebnissen einer Reihe unabhängiger Doppelbeobachtungen vorhanden ist. Somit wird nach Formel (**71**):

$$\begin{array}{ll} \delta_1 = -\Delta_1, \text{ und:} & \delta_1 \delta_1 = \Delta_1 \Delta_1, \\ \delta_2 = -\Delta_2, & \delta_2 \delta_2 = \Delta_2 \Delta_2, \\ \delta_3 = -\Delta_3, & \delta_3 \delta_3 = \Delta_3 \Delta_3, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\ \delta_n = -\Delta_n, & \delta_n \delta_n = \Delta_n \Delta_n, \\ \hline & [\delta\delta] = [\Delta\Delta]. \end{array}$$

und der mittlere Fehler $\mathfrak{m} = m$ einer einmaligen Messung eines Polygonwinkels vom Gewichte 1 wird nach Formel (**86**) oder (**87**):

$$\mathfrak{m} = m = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{2n}} = \pm \sqrt{\frac{4416}{2 \cdot 12}} = \pm 14''.$$

Beispiel 2: Bei der unter Nr. 4 durchgeführten zweiten Behandlung unsers Beispiels 2, wo wir k berechnet haben aus Doppelmessungen von 96 000 m Streckenlängen kann der für k erhaltene Werth als wahrer Werth angesehen werden. Dann erhalten wir als mittleren Fehler der Gewichtseinheit:

$$\mathfrak{m} = \pm \sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{2n}} = \pm \sqrt{\frac{3{,}657}{2 \cdot 20}} = \pm 0{,}30 \text{ m}. \tag{88}$$

III. Abschnitt.

Direkte Beobachtungen mehrerer Gröfsen, deren Summe einen bestimmten Sollbetrag erfüllen mufs.

§ 19. Direkte gleich genaue Beobachtungen mehrerer Gröfsen, deren Summen einen bestimmten Sollbetrag erfüllen mufs.

Haben wir für eine Reihe von Gröfsen aus direkten Beobachtungen die Werthe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ erlangt, so kommt es vielfach vor, dafs wir diese Beobachtungsergebnisse noch nicht als die wahrscheinlichsten Werthe $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ der Gröfsen anerkennen dürfen, weil die Summe der letzteren einen bestimmten Sollbetrag S erfüllen mufs, weil also

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots x_n = S \tag{90}$$

sein mufs.

Dann erhalten wir aus den Beobachtungsergebnissen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ für jede der Gröfsen zwei Werthe, nämlich erstens das Ergebnis der direkten Beobachtung der betreffenden Gröfse und zweitens den Werth, der sich ergiebt, wenn wir von dem Sollbetrage die Summe aller übrigen Beobachtungsergebnisse subtrahiren. Zuerst erhalten wir also zur Bestimmung des wahrscheinlichsten Werthes x_1 die beiden Werthe:

$$\begin{aligned} \lambda' &= \alpha_1, \\ \lambda'' &= S - (\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots \alpha_n). \end{aligned}$$

Bezeichnen wir nun die Summe der Beobachtungsergebnisse mit Σ und die Abweichung dieser Summe von dem Sollbetrage mit f, setzen also:

(91) $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots \alpha_n = \Sigma,$$

(92) $$f = S - \Sigma,$$

so wird:

$$\begin{aligned} \lambda'' &= S - (\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots \alpha_n) \\ &= S - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots \alpha_n) + \alpha_1 \\ &= S - \Sigma + \alpha_1 \\ &= f + \alpha_1. \end{aligned}$$

Sind die Beobachtungsergebnisse $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ sämtlich gleich genau und haben sie das Gewicht p, so ergiebt sich für die Gewichte p' und p'' der Werthe λ' und λ'' nach Formel (42):

$$p' = p,$$
$$p'' = \frac{1}{n-1} p.$$

Hiermit und mit den für λ' und λ'' gefundenen Werthen erhalten wir den wahrscheinlichsten Werth x_1 der ersten Gröfse nach Formel (58) zu:

$$x_1 = \frac{p'\lambda' + p''\lambda''}{p' + p''} = \frac{p\alpha_1 + \frac{1}{n-1} p(f + \alpha_1)}{p + \frac{1}{n-1} p} = \frac{np\alpha_1 - p\alpha_1 + pf + p\alpha_1}{np - p + p},$$

oder:

$$x_1 = \alpha_1 + \frac{1}{n} f.$$

Bezeichnen wir die Verbesserung, die wir dem Beobachtungsergebnis α_1 beifügen müssen, um den wahrscheinlichsten Werth x_1 zu erhalten, mit v, so wird:

$$v = \frac{1}{n} f, \qquad\qquad x_1 = \alpha_1 + v.$$

Machen wir dieselbe Entwicklung, die wir für x_1 gemacht haben, auch für $x_2, x_3, \ldots x_n$, so erhalten wir immer denselben Werth der Verbesserung v, so dafs allgemein ist:

(93) $$v = \frac{1}{n} f,$$

(94) $$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 + v, \\ x_2 = \alpha_2 + v, \\ x_3 = \alpha_3 + v, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \alpha_n + v, \end{cases}$$

wonach wir den Widerspruch f gleichmäfsig auf die gleich genauen Beobachtungsergebnisse $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ zu vertheilen haben, um die wahrscheinlichsten Werthe $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ der beobachteten Gröfsen zu erhalten.

Beispiel: In einem Dreieck ist jeder der drei Winkel viermal in beiden Lagen des Fernrohrs mit gleicher Genauigkeit gemessen worden. Die Ergebnisse der Messungen sind:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 76^\circ\, 24'\, 35'', \\ \alpha_2 &= 59\;\; 18\;\; 28\;, \\ \alpha_3 &= 44\;\; 16\;\; 49\;, \\ \hline \Sigma &= 179^\circ\, 59'\, 52''. \end{aligned}$$

Der Sollbetrag der Summe der drei Winkel ist 180°, die Summe der Beobachtungsergebnisse $\Sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 179^\circ\, 59'\, 52''$, demnach der Widerspruch f:

(92) $$f = S - \Sigma = 180^\circ - 179^\circ\, 59'\, 52'' = +8'',$$

und die Verbesserung v, die jedem Beobachtungsergebnis beizufügen ist:

(93) $$v = \frac{1}{n} f = \frac{1}{3}(+8) = +2{,}7''.$$

Damit ergeben sich die wahrscheinlichsten Werthe x_1, x_2, x_3 der Winkel zu:

(94) $$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 + v = 76^\circ\,24'\,35'' + 2{,}7'' = 76^\circ\,24'\,37{,}7'', \\ x_2 = \alpha_2 + v = 59\;\;18\;\;28\;\;+2{,}7\;\; = 59\;\;18\;\;30{,}7\;, \\ x_3 = \alpha_3 + v = 44\;\;16\;\;49\;\;+2{,}7\;\; = \underline{44\;\;16\;\;51{,}7\;,} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; 180^\circ\,00'\,00{,}1''. \end{cases}$$

Die Summe der für x_1, x_2, x_3 erhaltenen Werthe ist $180^\circ 00' 00{,}1''$; sie erfüllt also den Sollbetrag bis auf $0{,}1''$. Diese kleine Abweichung vom Sollbetrage rührt aus der Abrundung des Werthes von v her, und sie mufs genau gleich sein der Abweichung der $n$fachen Verbesserung v von f, also hier gleich $nv - f = 3 \cdot 2{,}7'' - 8{,}0'' = +0{,}1''$. Die Abrundung des Werthes von v kann höchstens 0,5 Einheiten seiner letzten Stelle betragen und demnach darf auch die Summe der wahrscheinlichsten Werthe x_1, x_2, x_3, ... x_n höchstens um $0{,}5 \cdot n$ Einheiten der letzten Stelle des Werthes v von Null abweichen, hier also höchstens um $3 \cdot 0{,}05'' = 0{,}15''$.

2. Aufser den wahrscheinlichsten Werthen x_1, x_2, x_3, ... x_n der zu bestimmenden Gröfsen haben wir nun auch noch die als Genauigkeitsmafse erforderlichen mittleren Fehler und Gewichte zu ermitteln.

Um diese zu finden, haben wir zu beachten, dafs hier nur ein einziger Beobachtungsfehler f hervortritt und dafs dies der Fehler des Beobachtungsergebnisses $\Sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots \alpha_n$ ist, der bei der Beobachtung des Sollbetrages S gemacht worden ist. Für das Gewicht p_Σ des Beobachtungsergebnisses Σ ergiebt sich, wenn jede der Gröfsen α_1, α_2, α_3, ... α_n das gleiche Gewicht p hat, nach Formel (**42**):

$$p_\Sigma = \frac{1}{n} p.$$

Da uns nun der Sollbetrag von vornherein bekannt ist, also die einzige für denselben vorliegende Beobachtung eine überschüssige ist, so erhalten wir das Quadrat des mittleren Fehler der Gewichtseinheit, indem wir das mit dem Gewichte p_Σ multiplizirte Quadrat des Beobachtungsfehlers f durch Eins dividiren. Demnach wird:

$$\mathfrak{m}^2 = \frac{p_\Sigma ff}{1} = \frac{1}{n} pff, \text{ oder:}$$

(95) $$\mathfrak{m} = \pm f \sqrt{\frac{1}{n} p}.$$

Ferner wird der mittlere Fehler m_α eines jeden der Werthe α_1, α_2, α_3, ... α_n, deren Gewicht gleich p ist, nach Formel (**35**):

$$m_\alpha = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{p}} = \pm f \sqrt{\frac{1}{n} p} \sqrt{\frac{1}{p}}, \text{ oder:}$$

(96) $$m_\alpha = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{p}} = \pm f \sqrt{\frac{1}{n}}.$$

Um auch das Gewicht P_x und den mittleren Fehler M_x eines jeden der wahrscheinlichsten Werthe x_1, x_2, x_3, ... x_n der beobachteten Gröfsen zu finden, greifen wir zurück auf die Berechnung dieser Werthe. Wir hatten die Gröfsen x gefunden als arithmetisches Mittel aus den beiden Werthen λ' und λ'', deren Gewichte $p' = p$ und $p'' = \frac{1}{n-1} p$ sind, für die also $[p] = p' + p'' = p + \frac{1}{n-1} p = p \frac{n}{n-1}$ ist. Hiermit wird das Gewicht P_x des arithmetischen Mittels x nach Formel (**65**):

$$P_x = p\frac{n}{n-1} \text{ oder}$$

(97) $$\frac{1}{P_x} = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

und der mittlere Fehler M_x desselben nach Formel (66):

(98) $$M_x = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P_x}} = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \pm f\sqrt{\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)}.$$

Beispiel: In unserm Beispiele ist $f = +8$ und $p = 4$, wenn wir das Gewicht einer einmaligen Beobachtung eines Dreieckswinkels in beiden Lagen des Fernrohrs als Gewichtseinheit nehmen. Demnach erhalten wir den mittleren Fehler $\mathfrak{m}$ der Gewichtseinheit oder einer einmaligen Beobachtung eines Dreieckswinkels in beiden Lagen des Fernrohrs zu:

(95) $$\mathfrak{m} = \pm f\sqrt{\frac{1}{n}p} = \pm 8\sqrt{\frac{1}{3}4} = \pm 9{,}2'',$$

sodann den mittleren Fehler m_α eines jeden der Beobachtungsergebnisse $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ zu:

(96) $$m_\alpha = \pm f\sqrt{\frac{1}{n}} = \pm 8\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm 4{,}6'',$$

ferner für das Gewicht P_x eines jeden der wahrscheinlichsten Werthe x_1, x_2, x_3 der Winkel:

(97) $$\frac{1}{P_x} = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} \text{ oder: } P_x = 6,$$

endlich den mittleren Fehler M_x derselben:

(98) $$M_x = \pm f\sqrt{\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \pm 8{,}0\sqrt{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)} = \pm 3{,}8''.$$

Wenn das Gewicht eines jeden der Dreieckswinkel $p = 1$ ist, so wird:

$$\mathfrak{m} = m_\alpha = \pm f\sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \Big| \quad P_x = 1{,}5, \quad \Big| \quad M_x = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{1{,}5}}.$$

§ 20. Direkte ungleich genaue Beobachtungen mehrerer Gröfsen, deren Summe einen bestimmten Sollbetrag erfüllen mufs.

1. Wenn zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe $x, y, z, \ldots$ einer Reihe von Gröfsen, deren Summe einen bestimmten Sollbetrag S erfüllen mufs, für die also

(99) $$x + y + z + \cdots = S$$

sein mufs, die ungleich genauen Beobachtungsergebnisse $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ vorliegen, deren Summe

(100) $$\alpha + \beta + \gamma + \cdots = \Sigma$$

ist, so erhalten wir den Widerspruch f dieser Summe gegen den Sollbetrag wieder nach:

(101) $$f = S - \Sigma.$$

Weiter ergeben sich auch aus den Beobachtungsergebnissen zur Bestimmung eines jeden der wahrscheinlichsten Werthe $x, y, z, \ldots$ der zu bestimmenden Gröfsen wieder zwei Werthe und zwar in erster Linie für x die beiden Werthe

$$\lambda' = \alpha,$$
$$\lambda'' = S - (\beta + \gamma + \cdots) = f + \alpha.$$

Haben nun die ungleich genauen Beobachtungsergebnisse α, β, γ, ... die Gewichte p_α, p_β, p_γ .... so erhalten wir für die Gewichte p' und p'' der beiden Werthe λ' und λ'' nach Formel (**41**):

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{p_\alpha},$$

$$\frac{1}{p''} = \frac{1}{p_\beta} + \frac{1}{p_\gamma} + \cdots = \left[\frac{1}{p}\right] - \frac{1}{p_\alpha},$$

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p''} = \frac{1}{p_\alpha} + \left[\frac{1}{p}\right] - \frac{1}{p_\alpha} = \left[\frac{1}{p}\right].$$

Damit ergiebt sich der wahrscheinlichste Werth x der ersten Gröſse als arithmetisches Mittel der beiden Werthe λ' und λ'' nach Formel (**58**) zu:

$$x = \frac{p'\lambda' + p''\lambda''}{p' + p''} = \frac{\frac{1}{p''}\lambda' + \frac{1}{p'}\lambda''}{\frac{1}{p''} + \frac{1}{p'}} = \frac{\left(\left[\frac{1}{p}\right] - \frac{1}{p_\alpha}\right)\alpha + \frac{1}{p_\alpha}(f + \alpha)}{\left[\frac{1}{p}\right]} \text{ oder:}$$

$$x = \alpha + \frac{\frac{1}{p_\alpha}}{\left[\frac{1}{p}\right]} f.$$

Bezeichnen wir die Verbesserung, die wir dem Beobachtungsergebnis α beifügen müssen, um den wahrscheinlichsten Werth x zu erhalten, mit v_α, so wird:

$$v_\alpha = \frac{\frac{1}{p_\alpha}}{\left[\frac{1}{p}\right]} f, \qquad\qquad x = \alpha + v_\alpha.$$

In gleicher Weise erhalten wir die Verbesserungen v_β, v_γ, ... der Beobachtungsergebnisse β, γ ...., so daſs wird:

$$(\mathbf{102}) \quad \begin{cases} v_\alpha = \dfrac{\frac{1}{p_\alpha}}{\left[\frac{1}{p}\right]} f, \\ v_\beta = \dfrac{\frac{1}{p_\beta}}{\left[\frac{1}{p}\right]} f, \\ v_\gamma = \dfrac{\frac{1}{p_\gamma}}{\left[\frac{1}{p}\right]} f, \\ \ldots\ldots\ldots, \end{cases} \qquad (\mathbf{103}) \quad \begin{cases} x = \alpha + v_\alpha, \\ y = \beta + v_\beta, \\ z = \gamma + v_\gamma, \\ \ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

wonach wir den Widerspruch f proportional den reziproken Werthen der Gewichte p_α, p_β, p_γ, ... auf die ungleich genauen Beobachtungsergebnisse α, β, γ, ... zu vertheilen haben, um die wahrscheinlichsten Werthe x, y, z, ... der beobachteten Gröſsen zu erhalten.

Beispiel: Bei der Triangulation im Regierungsbezirke Düsseldorf haben sich auf dem Punkte Düsseldorf nach Centrirung der auf 4 excentrischen Standpunkten gewonnenen Beobachtungsergebnisse die folgenden 4 Winkel ergeben:

Zielpunkte.		Beobachtungsergebnisse.	°	′	″	Gewichte.		Reziproke Werthe der Gewichte.	
Gladbach	Duisburg	α	103	08	21,79	p_α	12	$\frac{1}{p_\alpha}$	0,083
Duisburg	Metzkausen	β	65	57	09,31	p_β	6	$\frac{1}{p_\beta}$	0,167
Metzkausen	Köln	γ	89	29	42,00	p_γ	15,8	$\frac{1}{p_\gamma}$	0,063
Köln	Gladbach	ε	101	24	44,96	p_ε	12	$\frac{1}{p_\varepsilon}$	0,083
		Σ	359	59	58,06			$\left[\frac{1}{p}\right]$	0,396

Den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ sind die Gewichte, $p_\alpha, p_\beta, p_\gamma, p_\varepsilon$ und die reziproken Werthe der Gewichte $\frac{1}{p_\alpha}, \frac{1}{p_\beta}, \frac{1}{p_\gamma}, \frac{1}{p_\varepsilon}$ beigesetzt, denen als Gewichtseinheit das Gewicht einer einmaligen Beobachtung eines Winkels in beiden Fernrohrlagen zu Grunde liegt.

Die beobachteten 4 Winkel schliefsen den Horizont, ihre Summe mufs demnach $S = 360°$ sein. Die Summe der vorliegenden Beobachtungsergebnisse ist:

(100) $$\Sigma = \alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = 359°\ 59'\ 58{,}06'',$$

und somit der Widerspruch f:

(101) $$f = S - \Sigma = 360°\ 00'\ 00{,}00'' - 359°\ 59'\ 58{,}06'' = +1{,}94''.$$

Hiernach erhalten wir die Verbesserungen $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma, v_\varepsilon$ der Beobachtungsergebnisse und die wahrscheinlichsten Werthe x, y, z, w der Winkel zu:

(102) $$\begin{cases} v_\alpha = \dfrac{\frac{1}{p_\alpha}}{\left[\frac{1}{p}\right]} f = \dfrac{0{,}083}{0{,}396}(+1{,}94) = +0{,}41\,, \\ v_\beta = \dfrac{\frac{1}{p_\beta}}{\left[\frac{1}{p}\right]} f = \dfrac{0{,}167}{0{,}396}(+1{,}94) = +0{,}82\,, \\ v_\gamma = \dfrac{\frac{1}{p_\gamma}}{\left[\frac{1}{p}\right]} f = \dfrac{0{,}063}{0{,}396}(+1{,}94) = +0{,}31\,, \\ v_\varepsilon = \dfrac{\frac{1}{p_\varepsilon}}{\left[\frac{1}{p}\right]} f = \dfrac{0{,}083}{0{,}396}(+1{,}94) = +0{,}41\,, \end{cases}$$
$$[v] = +1{,}95.$$

(103) $$\begin{cases} x = \alpha + v_\alpha = 103°08'21{,}79'' + 0{,}41'' = 103°08'22{,}20'', \\ y = \beta + v_\beta = 65\ 57\ 09{,}31 + 0{,}82 = 65\ 57\ 10{,}13\,, \\ z = \gamma + v_\gamma = 89\ 29\ 42{,}00 + 0{,}31 = 89\ 29\ 42{,}31\,, \\ w = \varepsilon + v_\varepsilon = 101\ 24\ 44{,}96 + 0{,}41 = 101\ 24\ 45{,}37\,, \end{cases}$$
$$360°00'00{,}01''.$$

Für die richtige Berechnung der Verbesserungen v_α, v_β, v_γ, ... und die richtige Bildung der wahrscheinlichsten Werthe x, y, z, ... ergeben sich die Proben, dafs die Summe der Verbesserungen $[v]$ gleich dem Widerspruch f sein mufs und dafs die wahrscheinlichsten Werthe x, y, z .... den Sollbetrag S erfüllen müssen. Wenn die Verbesserungen v_α, v_β, v_γ, ... in der Weise berechnet werden, dafs zunächst der Quotient $\frac{f}{\left[\frac{1}{p}\right]}$ gebildet und dieser dann mit den reziproken Werthen der Gewichte $\frac{1}{p_\alpha}$, $\frac{1}{p_\beta}$, $\frac{1}{p_\gamma}$, ... multiplizirt wird, so wird der Zahlenwerth von $[v]$ genau gleich dem $\left[\frac{1}{p}\right]$ fachen Zahlenwerth des Quotienten $\frac{f}{\left[\frac{1}{p}\right]}$ und dieser Betrag kann in Folge der Abrundung des Zahlenwerthes von $\frac{f}{\left[\frac{1}{p}\right]}$ um $0{,}5\left[\frac{1}{p}\right]$ Einheiten der letzten Stelle dieses Zahlenwerthes von f abweichen. Dieselbe Abweichung wird sich dann auch bei Vergleichung der Summe der Werthe von x, y, z, ... mit dem Sollbetrage ergeben.

2. Für das Quadrat des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit erhalten wir ebenso wie im § 19:

$$\mathfrak{m}^2 = \frac{p_\Sigma ff}{1} = p_\Sigma ff.$$

Da hier $\Sigma = \alpha + \beta + \gamma + \cdots$ ist, so wird nach Formel (**41**)

$$\frac{1}{p_\Sigma} = \frac{1}{p_\alpha} + \frac{1}{p_\beta} + \frac{1}{p_\gamma} + \cdots = \left[\frac{1}{p}\right] \text{ und demnach:}$$

$$\mathfrak{m} = \pm f\sqrt{\frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]}}. \tag{104}$$

Für die mitteren Fehler m_α, m_β, m_γ, ... der Beobachtungsergebnisse α, β, γ, ... ergiebt sich nach Formel (**35**):

$$\text{(105)}\quad \left\{\begin{aligned} m_\alpha &= \pm\,\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}},\\ m_\beta &= \pm\,\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_\beta}},\\ m_\gamma &= \pm\,\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_\gamma}},\\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right.$$

Den wahrscheinlichsten Werth x der ersten beobachteten Gröfse haben wir als arithmetisches Mittel aus den beiden Werthen λ' und λ'' erhalten, und für die Gewichte dieser Werthe haben wir $\frac{1}{p'} = \frac{1}{p_\alpha}$ und $\frac{1}{p''} = \left[\frac{1}{p}\right] - \frac{1}{p_\alpha}$ gefunden. Demnach erhalten wir für das Gewicht P_x von x nach Formel (**65**):

$$P_x = p' + p'' = p_\alpha + \frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right] - \frac{1}{p_\alpha}} = \frac{p_\alpha\left[\frac{1}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right] - \frac{1}{p_\alpha}}, \text{ oder: } \frac{1}{P_x} = \frac{1}{p_\alpha}\left(1 - \frac{\frac{1}{p_\alpha}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right)$$

und für den mittleren Fehler M_x von x nach Formel (**35**):

$$M_x = \pm\,\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P_x}} = \pm\,\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}\left(1 - \frac{\frac{1}{p_\alpha}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right)}.$$

In gleicher Weise erhalten wir die Gewichte P_y, P_z, ... und die mittleren Fehler M_y, M_z, ... der Werthe y, z, ..., so dafs wird:

$$(106)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{P_x} = \dfrac{1}{p_\alpha}\left(1 - \dfrac{\frac{1}{p_\alpha}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right), \\ \dfrac{1}{P_y} = \dfrac{1}{p_\beta}\left(1 - \dfrac{\frac{1}{p_\beta}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right), \\ \dfrac{1}{P_z} = \dfrac{1}{p_\gamma}\left(1 - \dfrac{\frac{1}{p_\gamma}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad (107)\quad \begin{cases} M_x = \pm\, \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{1}{P_x}} = \pm\, \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{1}{p_\alpha}\left(1 - \dfrac{\frac{1}{p_\alpha}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right)}, \\ M_y = \pm\, \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{1}{P_y}} = \pm\, \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{1}{p_\beta}\left(1 - \dfrac{\frac{1}{p_\beta}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right)}, \\ M_z = \pm\, \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{1}{P_z}} = \pm\, \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{1}{p_\gamma}\left(1 - \dfrac{\frac{1}{p_\gamma}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Beispiel: Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit oder der mittlere Fehler einer einmaligen Beobachtung eines Winkels in beiden Fernrohrlagen ergiebt sich zu:

$$(104)\qquad \mathfrak{m} = \pm f\sqrt{\frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]}} = \pm 1{,}94\sqrt{\frac{1}{0{,}396}} = \pm 3{,}08'',$$

ferner ergeben sich die mittleren Fehler m_α, m_β, m_γ, m_ε der vorliegenden Beobachtungsergebnisse α, β, γ, ε zu:

$$(105)\quad \begin{cases} m_\alpha = \pm\, \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{1}{p_\alpha}} = \pm 3{,}08\sqrt{0{,}083} = \pm 0{,}89'', \\ m_\beta = \pm\, \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{1}{p_\beta}} = \pm 3{,}08\sqrt{0{,}167} = \pm 1{,}26'', \\ m_\gamma = \pm\, \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{1}{p_\gamma}} = \pm 3{,}08\sqrt{0{,}063} = \pm 0{,}77'', \\ m_\varepsilon = \pm\, \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{1}{p_\varepsilon}} = \pm 3{,}08\sqrt{0{,}083} = \pm 0{,}89'', \end{cases}$$

und die Gewichte P_x, P_y, P_z, P_w der wahrscheinlichsten Werthe x, y, z, w der Winkel zu:

$$(106)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{P_x} = \dfrac{1}{p_\alpha}\left(1 - \dfrac{\frac{1}{p_\alpha}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right) = 0{,}083\left(1 - \dfrac{0{,}083}{0{,}396}\right) = 0{,}066, & P_x = 15{,}2, \\ \dfrac{1}{P_y} = \dfrac{1}{p_\beta}\left(1 - \dfrac{\frac{1}{p_\beta}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right) = 0{,}167\left(1 - \dfrac{0{,}167}{0{,}396}\right) = 0{,}097, & P_y = 10{,}3, \\ \dfrac{1}{P_z} = \dfrac{1}{p_\gamma}\left(1 - \dfrac{\frac{1}{p_\gamma}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right) = 0{,}063\left(1 - \dfrac{0{,}063}{0{,}396}\right) = 0{,}053, & P_z = 18{,}9, \\ \dfrac{1}{P_w} = \dfrac{1}{p_\varepsilon}\left(1 - \dfrac{\frac{1}{p_\varepsilon}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right) = 0{,}083\left(1 - \dfrac{0{,}083}{0{,}396}\right) = 0{,}066, & P_w = 15{,}2, \end{cases}$$

endlich die mittleren Fehler M_x, M_y, M_z, M_w zu:

$$
(107) \quad
\begin{cases}
M_x = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{1}{P_x}} = \pm 3{,}08\sqrt{0{,}066} = \pm 0{,}79'', \\
M_y = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{1}{P_y}} = \pm 3{,}08\sqrt{0{,}097} = \pm 0{,}96'', \\
M_z = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{1}{P_z}} = \pm 3{,}08\sqrt{0{,}053} = \pm 0{,}71'', \\
M_w = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{1}{P_w}} = \pm 3{,}08\sqrt{0{,}066} = \pm 0{,}79''.
\end{cases}
$$

3. Ebenso wie die Rechnung nach den Formeln (**58**) bis (**66**) wird auch die Rechnung nach den Formeln (**99**) bis (**107**) in der Regel wesentlich einfacher und übersichtlicher durch schematische Anordnung, wie die nachfolgende Anordnung unsers Beispiels 1 zeigt:

Beobachtungsergebnisse α. ° ' "	Gewichte p.	$\frac{1}{p}$.	$\frac{\frac{1}{p}}{\left[\frac{1}{p}\right]}$	$v = \frac{\frac{1}{p}}{\left[\frac{1}{p}\right]} f$. "	$x = \alpha + v$. ° ' "	$\sqrt{\frac{1}{p}}$	$m = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p}}$. "	$1 - \frac{\frac{1}{p}}{\left[\frac{1}{p}\right]}$	$\frac{1}{P} = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\frac{1}{p}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right)$	$\sqrt{\frac{1}{P}}$.	$M = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P}}$. "	P.
103 08 21,79	12	0,083	0,210	+0,41	103 03 22,20	0,288	±0,89	0,790	0,066	0,257	±0,79	15,2
65 57 09,31	6	0,167	0,422	+0,82	65 57 10,13	0,409	±1,26	0,578	0,097	0,311	±0,96	10,3
89 29 42,00	15,8	0,063	0,159	+0,31	89 29 42,31	0,251	±0,77	0,841	0,053	0,230	±0,71	18,9
101 24 44,96	12	0,083	0,210	+0,41	101 24 45,37	0,288	±0,89	0,790	0,066	0,257	±0,79	15,2
359 59 58,06	$= \Sigma$.	0,396	1,001	+1,95	360 00 00,01	1,236	3,81	2,999		1,055	3,25	
360 00 00,00	$= S$.											
+1,94	$= f$.											

$$= \left[\frac{1}{p}\right]. \quad \frac{f}{\left[\frac{1}{p}\right]} = \frac{+1{,}94}{0{,}396} = +4{,}90, \quad \mathfrak{m} = \pm f\sqrt{\frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]}} = \pm 1{,}94\sqrt{2{,}53} = \pm 3{,}08''.$$

§ 21. Beispiel zum II. und III. Abschnitt.

Im Anschlufs an die Punkte **1**, **57**, **58**, **59**, deren Höhen gegeben sind mit:

$H_1 = 58{,}725$,
$H_{57} = 61{,}142$,
$H_{58} = 61{,}128$,
$H_{59} = 60{,}325$,

sind behufs Bestimmung der Höhen der Punkte 2 bis 7 die Züge z_1 bis z_{11} zweimal nivellirt worden. Die beobachteten Höhenunterschiede sind in Abtheilung 1 der nachfolgenden Tabelle (Seite 80) in den Spalten 1 bis 3 nachgewiesen.

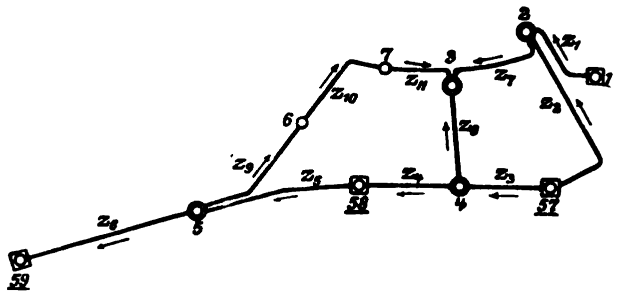


Fig 9.

Den Beobachtungsergebnissen sind in Spalte 4 der Abtheilung 1 der Tabelle ihre Gewichte p beigefügt. Sie sind empirisch gebildet nach der Anzahl der Aufstellungen des Nivellirinstrumentes und nach den Zielweiten. Ihnen liegt als Gewichtseinheit das Gewicht eines einmaligen Nivellements einer Strecke von 250m mit Zielweiten von 50m zu Grunde.

Es sollen die wahrscheinlichsten Werthe H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7 der Höhen der Punkte 2, 3, 4, 5, 6, 7 und der mittlere Fehler $m_{1\,\mathrm{km}}$ eines einmaligen Nivellements einer Strecke von 1 Kilometer Länge mit Zielweiten von 50m berechnet werden.

1. Die Berechnung der gesuchten Höhen und der mittleren Fehler ist in den Abtheilungen 1 bis 5 der nachfolgenden Tabellen (S. 80—83) in schematischer Anordnung nach den in den §§ 16 bis 20 entwickelten Formeln durchgeführt. Zur weiteren Erläuterung diene folgendes:

1. Beobachtungsergebnisse und deren Gewichte.									2. Mittlerer Fehler aus Beobachtungsdifferenzen.		
Der Züge Nr.	Der Züge Anfangs- und Endpunkt.	Beobachtete Höhenunterschiede. m	m	Gewichte p.	Gemittelte Höhenunterschiede Δh. m	m	Gewichte $p_{\Delta h}$.	$\frac{1}{p_{\Delta h}}$	Δ. mm	$\Delta\Delta$.	$p\Delta\Delta$.
1.	2.	3.		4.	5.		6.	7.	1.	2.	3.
1	**1**—2	2,979	×7,020	0,41							
		2,970	×7,030	0,41	2,9748	×7,0252	0,82	1,22	+ 9,5	90,2	37,0
2	**57**—2	0,566	×9,433	0,22							
		0,558	×9,441	0,22	0,5625	×9,4375	0,44	2,27	+ 8,0	64,0	14,1
3	**57**—4	×9,507	0,493	0,56							
		×9,504	0,497	0,56	×9,5052	0,4948	1,12	0,89	+ 3,5	12,2	6,8
4	4—**58**	0,483	×9,517	0,51							
		0,479	×9,519	0,51	0,4815	×9,5185	1,02	0,98	+ 3,0	9,0	4,6
5	**58**—5	0,306	×9,694	0,28							
		0,301	×9,698	0,28	0,3038	×9,6962	0,56	1,79	+ 4,5	20,2	5,7
6	5—**59**	×8,906	1,094	0,25							
		×8,896	1,104	0,25	×8,9010	1,0990	0,50	2,00	+10,0	100,0	25,0
7	2—3	×5,661	4,339	0,32							
		×5,664	4,337	0,32	×5,6622	4,3378	0,64	1,56	— 2,5	6,2	2,0
8	4—3	×6,703	3,297	0,49							
		×6,704	3,295	0,49	×6,7038	3,2962	0,98	1,02	— 1,5	2,2	1,1
9	5—6	×8,237	1,761	0,35							
		×8,234	1,765	0,35	×8,2362	1,7638	0,70	1,43	+ 3,5	12,2	4,3
10	6—7	×7,338	2,662	0,46							
		×7,338	2,662	0,46	×7,3380	2,6620	0,92	1,09	0,0	0,0	0,0
11	7—3	0,358	×9,642	0,55							
		0,351	×9,649	0,55	0,3545	×9,6455	1,10	0,91	+ 7,0	49,0	27,0
		,044	,952	8,80	,0235	,9765	8,80		+49,0	$[p\Delta\Delta]=127,6$	
		,999	,997						— 4,0	$\frac{[p\Delta\Delta]}{2n}=5,8$	
									+45,0	m=±2,4mm	

$$m_{1\,\mathrm{km}} = \pm m\sqrt{\frac{1}{p_{1\,\mathrm{km}}}} = \pm 2,4\sqrt{\frac{1}{0,25}} = \pm 4,8^{\mathrm{mm}}.$$

3. Berechnung der genäherten Höhen der Nebenknotenpunkte, des wahrscheinlichsten Werthes der Höhe des Hauptknotenpunktes und ihrer Gewichte.

Der Anfangspunkte Nr.	Höhe H. (m)	$\frac{1}{p_H}$.	Der Züge Nr.	Höhenunterschied Δh. (m)	(m)	$\frac{1}{p_{\Delta h}}$.	$\eta = H + \Delta h$. (m)	$\frac{1}{p_\eta} = \frac{1}{p_H} + \frac{1}{p_{\Delta h}}$	p_η.	dh. (mm)	$p_\eta dh$.	v. (mm)	$p_\eta v$.
1.	2.	3.	4.	5.		6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.

a) Berechnung der Höhe h_2 des Punktes 2 aus den Zügen 1 und 2.

1.	2.	3.	4.	5.		6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
1	58,7250	0,00	1	2,9748	×7,0252	1,22	61,6998	1,22	0,82	0,8	0,66	+1,6	+1,31
57	61,1420	0,00	2	0,5625	×9,4375	2,27	61,7045	2,27	0,44	5,5	2,42	−3,1	−1,36
	,8670	0,00			,4627	3,49	,4043	3,49	1,26		3,08		−0,05

$$h_2 = \mathfrak{h}_2 + \frac{[p_\eta dh]}{[p_\eta]} = 61{,}6990^m + 2{,}4^{mm} = 61{,}7014^m.$$

$$p_2 = [p_\eta] = 1{,}26. \quad \frac{1}{p_2} = 0{,}79.$$

b) Berechnung der Höhe h_4 des Punktes 4 aus den Zügen 3 und 4.

1.	2.	3.	4.	5.		6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
57	61,1420	0,00	3	×9,5052	0,4948	0,89	60,6472	0,89	1,12	1,2	1,34	−0,3	−0,34
58	61,1280	0,00	4	×9,5185	0,4815	0,98	60,6465	0,98	1,02	0,5	0,51	+0,4	+0,41
	,2700	0,00			,9763	1,87	,2937	1,87	2,14		1,85		+0,07

$$h_4 = \mathfrak{h}_4 + \frac{[p_\eta dh]}{[p_\eta]} = 60{,}6460^m + 0{,}9^{mm} = 60{,}6469^m.$$

$$p_4 = [p_\eta] = 2{,}14. \quad \frac{1}{p_4} = 0{,}47.$$

c) Berechnung der Höhe h_5 des Punktes 5 aus den Zügen 5 und 6.

1.	2.	3.	4.	5.		6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
58	61,1280	0,00	5	0,3038	×9,6962	1,79	61,4318	1,79	0,56	7,8	4,37	−3,7	−2,07
59	60,3250	0,00	6	1,0990	×8,9010	2,00	61,4240	2,00	0,50	0,0	0,00	+4,1	+2,05
	,4530	0,00			,5972	3,79	,8558	3,79	1,06		4,37		−0,02

$$h_5 = \mathfrak{h}_5 + \frac{[p_\eta dh]}{[p_\eta]} = 61{,}4240^m + 4{,}1^{mm} = 61{,}4281^m.$$

$$p_5 = [p_\eta] = 1{,}06. \quad \frac{1}{p_5} = 0{,}94.$$

d) Berechnung der Höhe H_3 des Punktes 3 aus allen Zügen.

1.	2.	3.	4.	5.		6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
2	61,7014	0,79	7	×5,6622	4,3378	1,56	57,3636	2,35	0,43	13,6	5,85	−7,7	−3,31
4	60,6469	0,47	8	×6,7038	3,2962	1,02	57,3507	1,49	0,67	0,7	0,47	+5,2	+3,48
5	61,4281	0,94	9	×8,2362	1,7638	1,43							
			10	×7,3380	2,6620	1,09							
			11	0,3545	×9,6455	0,91	57,3568	4,37	0,23	6,8	1,56	−0,9	−0,21
	,7764	2,20			,7053	6,01	,0711	8,21	1,33		7,88		−0,03

$$H_3 = \mathfrak{h}_3 + \frac{[p_\eta dh]}{[p_\eta]} = 57{,}3500^m + 5{,}9^{mm} = 57{,}3559^m.$$

$$P_3 = [p_\eta] = 1{,}33. \quad \frac{1}{P_3} = 0{,}75.$$

4. Ausgleichung der Fehler in den einzelnen Netzteilen.

Nr. der Punkte.	Nr. der Züge.	Höhenunterschiede α. m	m	$\frac{1}{p}$.	$\frac{\frac{1}{p}}{\left[\frac{1}{p}\right]}$.	$v = \frac{\frac{1}{p}}{\left[\frac{1}{p}\right]} f$. mm	$x = \alpha + v$. m	m
1.	2.	3.		4.	5.	6.	7.	
N. N.	1.2	61,7014		0,79	0,336	− 2,6	61,6988	
◎2	7	×5,6622	4,3378	1,56	0,664	− 5,1	×5,6571	4,3429
◎3								
	Σ	57,3636		2,35	1,000	− 7,7	57,3559	
	S	57,3559						
	f	− 7,7mm						
N. N.	3.4	60,6469		0,47	0,315	+ 1,6	60,6485	
◎4	8	×6,7038	3,2962	1,02	0,685	+ 3,6	×6,7074	3,2926
◎3								
	Σ	57,3507		1,49	1,000	+ 5,2	57,3559	
	S	57,3559						
	f	+ 5,2mm						
N. N.	5.6	61,4281		0,94	0,215	− 0,2	61,4279	
◎5	9	×8,2362	1,7638	1,43	0,327	− 0,3	×8,2359	1,7641
⊙6	10	×7,3380	2,6620	1,09	0,249	− 0,2	×7,3378	2,6622
⊙7	11	0,3545	×9,6455	0,91	0,208	− 0,2	0,3543	×9,6457
◎3								
	Σ	57,3568		4,37	0,999	− 0,9	57,3559	
	S	57,3559						
	f	− 0,9mm						

2. In Abtheilung 1 ist zuerst das einfache arithmetische Mittel der beobachteten gleich genauen Höhenunterschiede gebildet. Die erhaltenen Werthe sind als gemittelte Höhenunterschiede Δh in Spalte 5 eingetragen. Die Mittelbildung ist durch Zusammenfassung der Zahlenwerthe der Höhenunterschiede und ihrer dekadischen Ergänzung zu einem Gesamtergebnis in der Weise erfolgt, dafs beispielsweise für den Zug 1 zu den Zahlenwerthen 2,979 und 2,970 des Höhenunterschiedes die den dekadischen Ergänzungen ×7,020 und ×7,030 entsprechenden Zahlenwerthe 2,980 und 2,970 hinzugenommen sind und aus allen 4 Zahlenwerthen das einfache arithmethische Mittel $\Delta h = 2{,}9748$ gebildet ist, dem dann wieder die dekadische Ergänzung ×7,0252 beigesetzt ist zur Benutzung für die Sicherung der folgenden Rechnungen.

3. In Spalte 6 und 7 der Abtheilung 1 sind weiter die Gewichte $p_{\Delta h}$ der gemittelten Höhenunterschiede Δh, sowie ihre reziproken Werthe $\frac{1}{p_{\Delta h}}$ gebildet.

5. Die wahrscheinlichsten Werthe der Höhen, Höhenunterschiede und Beobachtungsfehler, sowie der mittlere Fehler.

Nr. der Punkte.	Nr. der Züge.	Wahrscheinlichste Werthe der Höhen H. m	Wahrscheinlichste Werthe der Höhenunterschiede ΔH. m	m	Gemittelte Höhenunterschiede Δh. m	m	$V = \Delta H - \Delta h$. mm	VV.	$p_{\Delta h}$.	$p_{\Delta h}\, VV$.
1.	2.	3.	4.		5.		6.	7.	8.	9.
⧇ **1**		58,7250								
	1		2,9738	×7,0262	2,9748	×7,0252	− 1,0	1,0	0,82	0,8
◎ 2		61,6988								
	2		0,5568	×9,4432	0,5625	×9,4375	− 5,7	32,5	0,44	14,3
⧇ **57**		61,1420								
	3		×9,5065	0,4935	×9,5052	0,4948	+ 1,3	1,7	1,12	1,9
◎ 4		60,6485								
	4		0,4795	×9,5205	0,4815	×9,5185	− 2,0	4,0	1,02	4,1
⧇ **58**		61,1280								
	5		0,2999	×9,7001	0,3038	×9,6962	− 3,9	15,2	0,56	8,5
◎ 5		61,4279								
	6		×8,8971	1,1029	×8,9010	1,0990	− 3,9	15,2	0,50	7,6
⧇ **59**		60,3250								
	7		×5,6571	4,3429	×5,6622	4,3378	− 5,1	26,0	0,64	16,6
◎ 3		57,3559								
	8		×6,7074	3,2926	×6,7038	3,2962	+ 3,6	13,0	0,98	12,7
	9		×8,2359	1,7641	×8,2362	1,7638	− 0,3	0,1	0,70	0,1
◎ 6		59,6638								
	10		×7,3378	2,6622	×7,3380	2,6620	− 0,2	0,0	0,92	0,0
◎ 7		57,0016								
	11		0,3543	×9,6457	0,3545	×9,6455	− 0,2	0,0	1,10	0,0
				9939		,9765	+ 4,9	$[p_{\Delta h}\, VV] = 66,6$		
							− 22,3			
							− 17,4	$\frac{[p_{\Delta h}\, VV]}{11-6} = 13,3$		

$$m = \pm \sqrt{\frac{[p_{\Delta h}\, VV]}{5}} = \pm 3{,}6^{\text{mm}}$$

$$m_{1\,\text{km}} = \pm m \sqrt{\frac{1}{p_{1\,\text{km}}}} = \pm 3{,}6 \sqrt{\frac{1}{0{,}25}} = \pm 7{,}2^{\text{mm}}.$$

Die Gewichte p in Spalte 4 gelten für den durch den Zahlenwerth und seine, ebenfalls unmittelbar von der Latte abgelesene, dekadische Ergänzung bestimmten Höhenunterschied, so dafs in dem arithmetischen Mittel Δh nur 2 Beobachtungsergebnisse vom Gewichte p vereinigt sind, womit das Gewicht $p_{\Delta h}$ nach Formel (**55**) erhalten wird zu: $p_{\Delta h} = 2p$.

4. In Abtheilung 2 der Tabellen folgt die Bildung der Differenzen Δ zwischen den Ergebnissen der ersten und der zweiten Beobachtung der Höhenunterschiede und der Quadratsumme $[p\Delta\Delta]$ dieser Differenzen.

Die beiden Nivellements sind mit Latten ausgeführt, deren Theilungen so genau übereinstimmen, dafs eine in Betracht kommende konstante Abweichung k zwischen den Ergebnissen beider Nivellements nicht vorhanden ist. Demnach ergiebt sich der mittlere Fehler m einer Beobachtung der Gewichtseinheit zu:

(38) $$\mathfrak{m} = \pm \sqrt{\frac{[p\Delta\Delta]}{2n}} = \pm \sqrt{\frac{127{,}6}{2 \cdot 11}} = \pm 2{,}4^{\text{mm}}.$$

Hieraus folgt der mittlere Fehler $\mathfrak{m}_{1\,\text{km}}$ eines einmaligen Nivellements einer Strecke von 1 Kilometer Länge mit Zielweiten von 50m, dessen Gewicht $p_{1\,\text{km}} = 0{,}25$ ist, mit:

(39) $$\mathfrak{m}_{1\,\text{km}} = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{p_{1\,\text{km}}}} = \pm 2{,}4 \sqrt{\frac{1}{0{,}25}} = \pm 4{,}8^{\text{mm}}.$$

5. In Abtheilung 3 folgt zunächst unter a, b, c die Berechnung der genäherten Höhen h_2, h_4, h_5, der Nebenknotenpunkte 2, 4, 5 und der Gewichte p_2, p_4, p_5 dieser Höhen aus den Höhen der gegebenen Punkte und den Höhenunterschieden Δh, sowie den Gewichten $p_{\Delta h}$ der die Punkte 2, 4, 5 unmittelbar mit den gegebenen Punkten verbindenden Züge.

Die genäherten Höhen und die Gewichte sind beispielsweise für Punkt 2 erhalten, wie folgt:

Für die Höhe des Punktes 2 sind zuerst 2 Werthe η'_2, η''_2 aus der gegebenen Höhe H_1 und H_{57} und dem Höhenunterschiede Δh_1, Δh_2 der Züge 1 u. 2 berechnet:

$$\eta'_2 = H_1 + \Delta h_1 = 58{,}7250 + 2{,}9748 = 61{,}6998,$$
$$\eta''_2 = H_{57} + \Delta h_2 = 61{,}1420 + 0{,}5625 = 61{,}7045.$$

Die Gewichte p'_η, p''_η dieser beiden Werthe sind erhalten aus den Gewichten $p_{H_1} = \infty$, $p_{H_{57}} = \infty$ der unveränderlichen Höhen H_1, H_{57} und den Gewichten $p_{\Delta h_1} = 0{,}82$, $p_{\Delta h_2} = 0{,}44$:

(41) $$\begin{cases} \dfrac{1}{p'_\eta} = \dfrac{1}{p_{H_1}} + \dfrac{1}{p_{\Delta h_1}} = \dfrac{1}{\infty} + \dfrac{1}{0{,}82} = \dfrac{1}{0{,}82}, & p'_\eta = 0{,}82, \\[2ex] \dfrac{1}{p''_\eta} = \dfrac{1}{p_{H_{57}}} + \dfrac{1}{p_{\Delta h_2}} = \dfrac{1}{\infty} + \dfrac{1}{0{,}44} = \dfrac{1}{0{,}44}, & p''_\eta = 0{,}44. \end{cases}$$

Damit folgt der genäherte Werth der Höhe h_2:

(59) $$\begin{cases} \eta'_2 = \mathfrak{h}_2 + dh' = 61{,}6990^{\text{m}} + 0{,}8^{\text{mm}}, \\ \eta''_2 = \mathfrak{h}_2 + dh'' = 61{,}6990^{\text{m}} + 5{,}5^{\text{mm}}, \end{cases}$$

(60) $$h_2 = \mathfrak{h}_2 + \frac{p'_\eta\, dh' + p''_\eta\, dh''}{p'_\eta + p''_\eta} = 61{,}6990 + \frac{0{,}82 \cdot 0{,}8 + 0{,}44 \cdot 5{,}5}{0{,}82 + 0{,}44}$$
$$= 61{,}6990^{\text{m}} + 2{,}4^{\text{mm}} = 61{,}7014^{\text{m}}.$$

und das Gewicht p_2 der genäherten Höhe h_2:

(65) $$p_2 = [p_\eta] = 0{,}82 + 0{,}44 = 1{,}26.$$

6. Unter d der Abtheilung 3 folgt dann die Berechnung des wahrscheinlichsten Werthes H_3 der Höhe des Hauptknotenpunktes 3 aus den unter a, b, c erhaltenen Höhen h_2, h_4, h_5 der Nebenknotenpunkte 2, 4, 5 und den gemittelten Höhenunterschieden Δh_7, Δh_8, Δh_9, Δh_{10}, Δh_{11} der den Punkt 3 mit den Punkten 2, 4, 5 verbindenden Züge 7 bis 11 unter Berücksichtigung der zugehörigen Gewichte. Die Berechnung ist in gleicher Weise erfolgt, wie unter Nr. 5 erläutert ist, nur mit dem Unterschiede, dafs die Höhen h_2, h_4, h_5 mit den unter a, b, c erhaltenen Gewichten $p_2 = 1{,}26$, $p_4 = 2{,}14$, $p_5 = 1{,}06$ und nicht, wie die gegebenen, als fehlerlos zu betrachtenden Höhen, mit unendlich grofsem Gewichte eingeführt sind.

Der für die Höhe des Punktes 3 erhaltene Werth $H_3 = 57{,}3559^{\text{m}}$ ist der wahrscheinlichste Werth dieser Höhe, denn er ist unsern im § 13 aufgestellten Grundsätzen entsprechend als einheitliches Endergebnis aus sämtlichen Beobachtungsergebnissen unter Berücksichtigung ihrer Gewichte derart gewonnen, dafs die Quadratsumme der wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler ein Minimum ist.

7. Dagegen sind die Werthe h_2, h_4, h_5 nicht die wahrscheinlichsten Werthe der Höhen der Punkte 2, 4, 5, weil sie nur je aus zwei der vorliegenden Beobachtungsergebnisse abgeleitet worden sind. Wir können jetzt aber die wahrscheinlichsten Werthe der Höhen dieser Punkte in sehr einfacher Weise erhalten; denn nach Feststellung der Höhe H_3 des Hauptknotenpunktes 3 kann das Nivellementsnetz in drei von einander ganz unabhängige Teile zerlegt werden, die für sich ausgeglichen werden können, nämlich in den die Züge z_1, z_2, z_7 umfassenden Teil mit dem Punkte 2, den die Züge z_3, z_4, z_8 umfassenden Teil mit dem Punkte 4 und den die Züge z_5, z_6, z_9, z_{10}, z_{11} umfassenden Teil mit den Punkten 5, 6, 7. Die Ausgleichung der Fehler in diesen einzelnen Teilen des Netzes erfolgt am einfachsten nach dem im § 20 behandelten Verfahren für direkte ungleich genaue Beobachtungen, deren Summe einen bestimmten Sollbetrag erfüllen mufs.

8. Diese Ausgleichung ist in Abtheilung 4 der Tabellen durchgeführt.

Im ersten Teil des Netzes mufs der wahrscheinlichste Werth der Höhe des Punktes 2 und der wahrscheinlichste Werth des Höhenunterschiedes im Zuge z_7 zusammen gleich sein der feststehenden Höhe H_3 des Hauptknotenpunktes 3. Der zu erfüllende Sollbetrag ist also $S = H_3 = 57{,}3559$. Die vorliegenden Beobachtungsergebnisse ergeben:

$$h_2 + \varDelta h_7 = 61{,}7014 + \times 5{,}6622 = 57{,}3636 = \Sigma.$$

Der vorhandene Widerspruch ist demnach:

$$f = S - \Sigma = 57{,}3559 - 57{,}3636 = -7{,}7^{\text{mm}}. \tag{101}$$

Dieser Widerspruch ist nach § 20 Nr. 1 proportional den reziproken Werthen der Gewichte $p_2 = 1{,}26$ der Höhe h_2 und $p_{\varDelta h_7} = 0{,}64$ des Höhenunterschiedes $\varDelta h_7$, vertheilt, indem die Verbesserungen v_{h_2} und $v_{\varDelta h_7}$ berechnet sind zu:

$$\left\{\begin{aligned} v_{h_2} &= \frac{\frac{1}{p_2}}{\left[\frac{1}{p}\right]} f = \frac{0{,}79}{2{,}35}(-7{,}7) = -2{,}6, \\ v_{\varDelta h_7} &= \frac{\frac{1}{p_{\varDelta h_7}}}{\left[\frac{1}{p}\right]} f = \frac{1{,}56}{2{,}35}(-7{,}7) = -5{,}1. \end{aligned}\right. \tag{102}$$

Hiermit sind die wahrscheinlichsten Werthe der Höhe H_2 und des Höhenunterschiedes $\varDelta H_7$ erhalten zu:

$$\left\{\begin{aligned} H_2 &= h_2 + v_{h_2} = 61{,}7014^{\text{m}} - 2{,}6^{\text{mm}} = 61{,}6988^{\text{m}}, \\ \varDelta H_7 &= \varDelta h_7 + v_{\varDelta h_7} = \times 5{,}6622^{\text{m}} - 5{,}1^{\text{mm}} = \times 5{,}6571^{\text{m}}. \end{aligned}\right. \tag{103}$$

Die Summe dieser beiden Werthe

$$H_2 + \varDelta H_7 = 61{,}6988 + \times 5{,}6571 = 57{,}3559^{\text{m}}$$

ergiebt nunmehr die Höhe H_3, erfüllt also den Sollbetrag.

In gleicher Weise ist auch die Ausgleichung der Fehler für den zweiten und dritten Teil des Nivellementsnetzes durchgeführt.

9. In Abtheilung 5 der Tabellen sind endlich in den Spalten 3, 4, 5 die wahrscheinlichsten Werthe der Höhen H und der Höhenunterschiede $\varDelta H$ mit den aus Abtheilung 1, Spalte 5 übernommenen gemittelten Höhenunterschieden $\varDelta h$ zusammengestellt, wonach in Spalte 6 die wahrscheinlichsten Werthe der Beobachtungsfehler $V = \varDelta H - \varDelta h$ und in den Spalten 7 bis 9 die Quadratsumme $[p_{\varDelta h} VV] = 66{,}6$ der Beobachtungsfehler gebildet sind.

Zur einfachen, nicht versicherten Bestimmung der Höhen der 6 Punkte 2 bis 7 im Anschlufs an die gegebenen Punkte sind $q = 6$ Höhenunterschiede erforderlich. Im Ganzen sind $n = 11$ Höhenunterschiede bestimmt, und demnach $n - q = 11 - 6 = 5$ überschüssige Bestimmungen vorhanden. Somit ergiebt sich der mittlere Fehler der Gewichtseinheit nach der Grundformel (**47**) zu:

$$\mathfrak{m} = \pm \sqrt{\frac{[p_{\Delta h} VV]}{n - q}} = \pm \sqrt{\frac{66{,}6}{5}} = \pm 3{,}6^{mm}.$$

Den Gewichten $p_{\Delta h}$ liegt als Gewichtseinheit das Gewicht eines einmaligen Nivellements einer Strecke von 250^m Länge mit Zielweiten von 50^m zu Grunde, während das Gewicht eines solchen Nivellements einer Strecke von 1 Kilometer Länge $p_{1\,km} = 0{,}25$ ist. Hiernach ergiebt sich der mittlere Fehler $\mathfrak{m}_{1\,km}$ einer Strecke von 1 Kilometer Länge mit Zielweiten von 50^m aus der Gesamtnetzausgleichung zu:

$$\mathfrak{m}_{1\,km} = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{p_{1\,km}}} = \pm 3{,}6 \sqrt{\frac{1}{0{,}25}} = \pm 7{,}2^{mm}, \tag{39}$$

während derselbe unter Nr. 4, und in Abtheilung 2 der Tabellen aus den Beobachtungsdifferenzen zu $\pm 4{,}8^{mm}$ erhalten ist.

IV. Abschnitt.

Vermittelnde Beobachtungen.

1. Kapitel. Allgemeine Entwicklung des Verfahrens.

§ 22. Gleichungen für die Beziehungen zwischen den wahren Werthen der beobachteten und der zu bestimmenden Gröfsen.

1. In den vielfach vorkommenden Fällen, wo die zu bestimmenden Gröfsen nicht direkt beobachtet werden können, wo vielmehr andere Gröfsen beobachtet werden müssen, die die Kenntnis der zu bestimmenden Gröfsen vermitteln, müssen zuerst die Beziehungen zwischen den beobachteten und den zu bestimmenden Gröfsen durch Gleichungen ausgedrückt werden, wenn aus den vorliegenden Beobachtungsergebnissen die wahrscheinlichsten Werthe der zu bestimmenden Gröfsen abgeleitet werden sollen. Die Gleichungen, wodurch diese Beziehungen ausgedrückt werden, ergeben sich meistens aus dem bekannten mathematischen Zusammenhang zwischen den wahren Werthen der beobachteten Gröfsen (λ_1), (λ_2), (λ_3), ... (λ_n) und den wahren Werthen der zu bestimmenden Gröfsen (x), (y), (z), ...; sie werden zweckmäfsig auf die allgemeine Form:

$$\left\{\begin{array}{l} (\lambda_1) = F_1\big((x), (y), (z), \ldots\big), \\ (\lambda_2) = F_2\big((x), (y), (z), \ldots\big), \\ (\lambda_3) = F_3\big((x), (y), (z), \ldots\big), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (\lambda_n) = F_n\big((x), (y), (z), \ldots\big) \end{array}\right. \tag{108}$$

gebracht, so dafs also die wahren Werthe der beobachteten Gröfsen (λ_1), (λ_2), (λ_3), ... (λ_n) als entwickelte Funktionen der wahren Werthe der zu bestimmenden Gröfsen (x), (y), (z), ... erscheinen.

2. Die Anzahl dieser Gleichungen ist gleich der Anzahl der vorliegenden Beobachtungsergebnisse. Wenn weniger Beobachtungsergebnisse vorliegen als zu bestimmende Gröfsen, so ergeben sich keine bestimmten Werthe der letzteren. Liegen ebensoviele Beobachtungsergebnisse vor, wie zu bestimmende Gröfsen, so können ihre den Beobachtungsergebnissen entsprechenden Werthe gefunden werden, indem die Gleichungen (**108**) nach (x), (y), (z), ... aufgelöst und in die dadurch erhaltenen Ausdrücke die vorliegenden Beobachtungsergebnisse eingesetzt werden. Die erhaltenen Werthe der zu bestimmenden Gröfsen und die Beobachtungsergebnisse entsprechen einander dann genau, und die den Beobachtungsergebnissen anhaftenden Fehler treten nicht hervor, von einer Ausgleichung der letzteren kann demnach dann auch keine Rede sein. Nur wenn mehr Beobachtungsergebnisse vorliegen als zu bestimmende Gröfsen, treten bei Vergleichung der Beobachtungsergebnisse mit den ihnen entsprechenden Werthen der zu bestimmenden Gröfsen die Beobachtungsfehler hervor und nur in diesem Falle kann auch eine Ausgleichung der Beobachtungsfehler erfolgen. Wenn das nachfolgend zu entwickelnde Rechnungsverfahren für die Ausgleichung der Beobachtungsfehler daher Anwendung finden soll, so mufs die Anzahl der vorliegenden Beobachtungsergebnisse und damit auch die Anzahl n der Gleichungen (**108**) gröfser sein, als die Anzahl q der zu bestimmenden Gröfsen.

Beispiel 1: Für die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 sind die rechtwinkligen Koordinaten gegeben wie folgt:

$P_1: x_1 = 6\,548{,}30,$	$y_1 = 2\,061{,}99,$
$P_2: x_2 = 6\,570{,}58,$	$y_2 = 2\,420{,}30,$
$P_3: x_3 = 6\,297{,}72,$	$y_3 = 2\,552{,}03,$
$P_4: x_4 = 6\,056{,}29,$	$y_4 = 2\,276{,}00,$
$P_5: x_5 = 6\,246{,}43,$	$y_5 = 1\,896{,}99.$

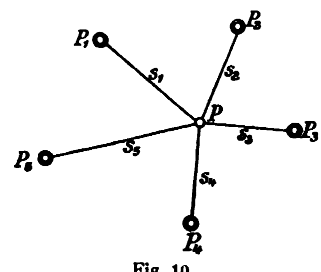


Fig. 10.

Diese gegebenen Koordinaten sind als fehlerfreie wahre Werthe anzusehen. Zur Bestimmung des Punktes P sind die Streckenlängen zwischen diesem Punkte und den Punkten P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 gemessen worden. Die Ergebnisse s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 der Messung dieser Strecken und die Gewichte p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, der Messungsergebnisse sind:

$PP_1: s_1 = 331{,}60,$	$p_1 = 5{,}41,$	Die Gewichtseinheit ist das Gewicht einer
$PP_2: s_2 = 272{,}00,$	$p_2 = 6{,}93,$	unter mittleren Verhältnissen gemessenen Strecke
$PP_3: s_3 = 247{,}10,$	$p_3 = 5{,}16,$	von 822 m Länge. Das Gewicht einer unter gleichen
$PP_4: s_4 = 269{,}50,$	$p_4 = 6{,}93,$	Verhältnissen gemessenen Streckenlänge von 100 m
$PP_5: s_5 = 416{,}70,$	$p_5 = 2{,}60.$	Länge ist $p_{100} = 14{,}8$*).

Es sollen hiernach die wahrscheinlichsten Werthe der rechtwinkligen Koordinaten x y des Punktes P bestimmt werden.

*) Die Gewichte sind aus Tafel 3 der Kataster-Anweisung IX entnommen und zwar die Gewichte p_1, p_2, p_4 aus Abtheilung I, die Gewichte p_3, p_5 aus Abtheilung II dieser Tafel, entsprechend den Verhältnissen, die bei Messung der betreffenden Strecken vorlagen. In dieser Tafel ist das Gewicht einer unter mittleren Verhältnissen gemessenen Länge von 822 m gleich Eins.

Die Beobachtungsergebnisse s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 sollen uns die Kenntnis der Koordinaten x y vermitteln. Die Beziehungen zwischen den beobachteten und den zu bestimmenden Gröfsen ergeben sich allgemein nach dem pythagoräischen Lehrsatze so, dafs das Quadrat der wahren Werthe der Streckenlängen (s_n) gleich sein mufs der Summe der Quadrate der wahren Werthe der Koordinatenunterschiede $(x) - x_n$, $(y) - y_n$ der Punkte P und P_n. Die sich hieraus ergebende allgemeine Gleichung $(s_n)^2 = ((x) - x_n)^2 + ((y) - y_n)^2$ lösen wir nach (s_n) auf und wenden sie für jedes einzelne vorliegende Beobachtungsergebnis an, womit wir die Gleichungen (**108**) erhalten, die die Beziehungen zwischen den wahren Werthen der beobachteten und der zu bestimmenden Gröfsen in der für das folgende passenden Form darstellen:

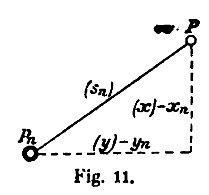


Fig. 11.

$$(108)\quad \begin{cases} (s_1) = \sqrt{((x) - x_1)^2 + ((y) - y_1)^2}, \\ (s_2) = \sqrt{((x) - x_2)^2 + ((y) - y_2)^2}, \\ (s_3) = \sqrt{((x) - x_3)^2 + ((y) - y_3)^2}, \\ (s_4) = \sqrt{((x) - x_4)^2 + ((y) - y_4)^2}, \\ (s_5) = \sqrt{((x) - x_5)^2 + ((y) - y_5)^2}. \end{cases}$$

Die Anzahl $n = 5$ dieser Gleichungen ist gröfser als die Anzahl $q = 2$ der zu bestimmenden Gröfsen, so dafs wir also das nun zu entwickelnde Rechnungsverfahren auf dies Beispiel anwenden können.

§ 23. Fehlergleichungen.

Wie wir bereits besprochen haben, können wir die wahren Werthe der beobachteten Gröfsen nicht ermitteln, und wenn wir auch bei Ausführung unserer Beobachtungen alle mögliche Sorgfalt anwenden, werden unsere Beobachtungsergebnisse immer mit Beobachtungsfehlern behaftet sein. Demnach können wir aus den Beobachtungsergebnissen auch nicht die wahren Werthe (x), (y), (z), ... der zu bestimmenden Gröfsen ableiten, sondern müssen uns begnügen, die den fehlerhaften Beobachtungsergebnissen möglichst gut entsprechenden wahrscheinlichsten Werthe x, y, z, ... der zu bestimmenden Gröfsen zu ermitteln. Diesen wahrscheinlichsten Werthen der zu bestimmenden Gröfsen entsprechen die wahrscheinlichsten Werthe L_1, L_2, L_3, ... L_n der beobachteten Gröfsen. Die wahrscheinlichsten Werthe x, y, z, ... und L_1, L_2, L_3, ... L_n stehen zu einander in derselben Beziehung, wie die wahren Werthe (x), (y), (z), ... und (λ_1), (λ_2), (λ_3), ... (λ_n), wonach aus den Gleichungen (**108**) folgt:

$$(109)\quad \begin{cases} L_1 = F_1(x, y, z, \ldots\ldots), \\ L_2 = F_2(x, y, z, \ldots\ldots), \\ L_3 = F_3(x, y, z, \ldots\ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L_n = F_n(x, y, z, \ldots\ldots). \end{cases}$$

Die wahrscheinlichsten Werthe L_1, L_2, L_3, ... L_n der beobachteten Gröfsen weichen von den thatsächlich vorliegenden Beobachtungsergebnissen λ_1, λ_2, λ_3, ... λ_n in der Regel um kleine Gröfsen ab, die die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler v_1, v_2, v_3, ... v_n darstellen, so dafs ist:

$$(110)\quad \begin{cases} v_1 = L_1 - \lambda_1, \\ v_2 = L_2 - \lambda_2, \\ v_3 = L_3 - \lambda_3, \\ \dots\dots\dots, \\ v_n = L_n - \lambda_n. \end{cases}$$

Die Gleichungen (**109**) und (**110**) bezeichnen wir als Fehlergleichungen.

Beispiel 1: Aus den wahrscheinlichsten Werthen $x\ y$ der rechtwinkligen Koordinaten des Punktes P und der gegebenen Koordinaten der Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 erhalten wir für die wahrscheinlichsten Werthe der Streckenlängen S_1, S_2, S_3, S_4, S_5:

$$(109)\quad \begin{cases} S_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}, \\ S_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}, \\ S_3 = \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2}, \\ S_4 = \sqrt{(x - x_4)^2 + (x - x_4)^2}, \\ S_5 = \sqrt{(x - x_5)^2 + (x - x_5)^2}, \end{cases}$$

und danach für die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler v_1, v_2, v_3, v_4, v_5:

$$(110)\quad \begin{cases} v_1 = S_1 - s_1, \\ v_2 = S_2 - s_2, \\ v_3 = S_3 - s_3, \\ v_4 = S_4 - s_4, \\ v_5 = S_5 - s_5. \end{cases}$$

§ 24. Näherungswerthe.

1. Nach unsern allgemeinen Ausgleichungsgrundsätzen erhalten wir die wahrscheinlichsten Werthe x, y, z, ... der zu bestimmenden Gröſsen, indem wir die Werthe bestimmen, für die die Quadratsumme $[pvv]$ der auf die Gewichtseinheit zurückgeführten wahrscheinlichsten Werthe $v_1\sqrt{p_1}$, $v_2\sqrt{p_2}$, $v_3\sqrt{p_3}$, ... $v_n\sqrt{p_n}$ der Beobachtungsfehler ein Minimum wird. Die Entwicklung der sich hiernach ergebenden Formeln gestaltet sich jedoch einfacher und übersichtlicher, schlieſst sich auch dem bei der praktischen Anwendung einzuschlagenden Rechnungsverfahren besser an, wenn wir die zu ermittelnden Werthe x, y, z, ... zunächst in Näherungswerthe $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ... und in kleine diesen Näherungswerthen beizufügende Werthe $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... zerlegen und diese Teilwerthe getrennt von einander ermitteln. Die Zusammenfügung der getrennt von einander ermittelten Teilwerthe muſs uns dann die wahrscheinlichsten Werthe der zu bestimmenden Gröſsen liefern, so daſs ist:

$$(111)\quad \begin{cases} x = \mathfrak{x} + d\mathfrak{x}, \\ y = \mathfrak{y} + d\mathfrak{y}, \\ z = \mathfrak{z} + d\mathfrak{z}, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Beispiel 1: In unserm Beispiele zerlegen wir die gesuchten wahrscheinlichsten Werthe der Koordinaten $x\,y$ in die genäherten Koordinaten $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$ und in die diesen beizufügenden Koordinatenverbesserungen $d\mathfrak{x}\ d\mathfrak{y}$, so daſs ist:

$$(111)\quad \begin{cases} x = \mathfrak{x} + d\mathfrak{x}, \\ y = \mathfrak{y} + d\mathfrak{y}. \end{cases}$$

2. Die Näherungswerthe $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ... müssen derart bestimmt werden, daſs die ihnen beizufügenden Werthe $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... verhältnismäſsig kleine Gröſsen werden, für die die weiterhin anzuwendenden Differenzialformeln mit genügender

Schärfe zutreffen. Im übrigen ist die Art und Weise, wie diese Näherungswerthe bestimmt werden, für das Endergebnis ganz bedeutungslos. In manchen Fällen werden bereits bei Beginn der Ausgleichungsrechnung aus irgend welchen vorhergegangenen Ermittlungen brauchbare Näherungswerthe bekannt sein. In anderen Fällen werden sie zweckmäfsig in einfacher Weise durch graphische Konstruktionen bestimmt werden können. In jedem Falle können aber aus den vorliegenden Beobachtungsergebnissen λ_1, λ_2, λ_3, ... λ_n so viele ausgewählt werden, wie zu bestimmende Gröfsen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ... vorhanden sind, und letztere aus ersteren berechnet werden. Diese Berechnung kann nach bekannten oder für den vorliegenden Fall zu bildenden einfachen Formeln oder derart ausgeführt werden, dafs die ausgewählten Beobachtungsergebnisse und die Näherungswerthe in die Gleichungen (**108**) an Stelle der wahren Werthe der beobachteten und der zu bestimmenden Gröfsen eingeführt, und die damit erhaltenen Gleichungen nach den Näherungswerthen aufgelöst werden.

Beispiel 1: In unserm Beispiele können wir die genäherten Koordinaten $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{y}$ des Punktes P in der Weise ermitteln, dafs wir z. B. die Punkte P_1 und P_2, nach ihren gegebenen Koordinaten etwa im Mafsstabe 1:1000 auftragen, den Punkt P durch Bogenschnitt mit den Längen s_1 und s_2 bestimmen und danach die Näherungswerthe $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{y}$ der Koordinaten aus dieser graphischen Konstruktion entnehmen. Ferner können wir auch die Näherungswerthe $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{y}$ nach den bekannten Formeln für den Bogenschnitt gemessener Längen*) z. B. aus den Koordinaten x_1 y_1, x_2 y_2 der Punkte P_1, P_2 und aus den Streckenlängen s_1 und s_2 berechnen wie folgt: (Siehe die Rechnung auf Seite 91.)

Endlich können wir z. B. die Streckenlängen 331,6 und 272,0 für (s_1) und (s_2), die Näherungswerthe $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{y}$ für (x) (y) und die Zahlenwerthe der gegebenen Koordinaten in die ersten beiden der Gleichungen (**108**) einführen, also die Gleichungen

$$331{,}6 = \sqrt{(\mathfrak{x} - 6\,548{,}3)^2 + (\mathfrak{y} - 2\,062{,}0)^2},$$
$$272{,}0 = \sqrt{(\mathfrak{x} - 6\,570{,}6)^2 + (\mathfrak{y} - 2\,420{,}3)^2},$$

bilden, und diese Gleichungen nach $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ auflösen.

3. Den Näherungswerthen der zu bestimmenden Gröfsen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ... entsprechen Näherungswerthe $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_3$, ... $\mathfrak{l}_n$ der beobachteten Gröfsen, für die aus den Formeln (**108**) folgt:

$$(\mathbf{112}) \qquad \begin{cases} \mathfrak{l}_1 = F_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots), \\ \mathfrak{l}_2 = F_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots), \\ \mathfrak{l}_3 = F_3(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathfrak{l}_n = F_n(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots). \end{cases}$$

Während die Näherungswerthe der zu bestimmenden Gröfsen, wie unter Nr. 2 ausgeführt ist, nur mit geringer Schärfe ermittelt zu werden brauchen, müssen die Näherungswerthe der beobachteten Gröfsen aus den Näherungswerthen der zu bestimmenden Gröfsen mit aller für die Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe der zu bestimmenden Gröfsen im übrigen erforderlichen Schärfe berechnet werden.

Aus den Näherungswerthen $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_3$, ... $\mathfrak{l}_n$ der beobachteten Gröfsen werden ihre wahrscheinlichsten Werthe L_1, L_2, L_3, ... L_n erhalten, indem ihnen kleine Gröfsen $d\mathfrak{l}_1$, $d\mathfrak{l}_2$, $d\mathfrak{l}_3$, ... $d\mathfrak{l}_n$ hinzugefügt werden, die die Aenderungen darstellen, die die Näherungswerthe $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_3$, ... $\mathfrak{l}_n$ erleiden, wenn die Näherungswerthe $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ... der zu bestimmenden Gröfsen um die kleinen Beträge $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... geändert werden. Demnach ist, entsprechend den Formeln (**111**),:

*) Formeln (9) bis (19), Seite 26, der Formelzusammenstellung von Veltmann und Koll.

$$
(113) \quad \begin{cases} L_1 = \mathfrak{l}_1 + d\mathfrak{l}_1, \\ L_2 = \mathfrak{l}_2 + d\mathfrak{l}_2, \\ L_3 = \mathfrak{l}_3 + d\mathfrak{l}_3, \\ \dots\dots\dots, \\ L_n = \mathfrak{l}_n + d\mathfrak{l}_n. \end{cases}
$$

Beispiel 1: Die den Näherungswerthen $\mathfrak{x} = 6\,323{,}70$, $\mathfrak{y} = 2\,306{,}00$ der zu bestimmenden Koordinaten entsprechenden Näherungswerthe $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{s}_3$, $\mathfrak{s}_4$, $\mathfrak{s}_5$ der Streckenlängen ergeben sich nach:

$$tg\,\nu = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad p + q = \frac{y_2 - y_1}{\sin\nu} = \frac{x_2 - x_1}{\cos\nu}.$$

$$\frac{p-q}{2} = \frac{(s_1 + s_2)(s_1 - s_2)}{2(p+q)}. \qquad p = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}. \qquad q = \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}.$$

$$h = \sqrt{s_1 s_1 - pp} = \sqrt{(s_1 + p)(s_1 - p)} = \sqrt{s_2 s_2 - qq} = \sqrt{(s_2 + q)(s_2 - q)}.$$

$$\Delta x_1 = +p\cos\nu - h\sin\nu. \qquad \Delta y_1 = +p\sin\nu + h\cos\nu.$$

$$\Delta x_2 = -q\cos\nu - h\sin\nu. \qquad \Delta y_2 = -q\sin\nu + h\cos\nu.$$

$$\mathfrak{x} = x_1 + \Delta x_1 = x_2 + \Delta x_2. \qquad \mathfrak{y} = y_1 + \Delta y_1 = y_2 + \Delta y_2.$$

Liegt P von P_1 aus gesehen
a) rechts von $P_1 P_2$, so ist h positiv.
b) links von $P_1 P_2$, so ist h negativ.

y_1		2 061,99	x_1		6 548,30	$\log(y_2 - y_1)$	2.55 43	$\log\sin\nu$	9.99 92
y_2		2 420,30	x_2		6 570,58	$\log(x_2 - x_1)$	1.34 79	$\log\cos\nu$	8.79 28
$y_2 - y_1$	+	358,31	$x_2 - x_1$	+	22,28	$\log tg\,\nu$	1.20 64	$\log(p+q)$	2.55 51

$p+q$		359,0	$2(p+q)$		718,0	$cpl \log 2(p+q)$	7.14 39	$\log(s_1 + p)$	2.74 91	$\log p$	2.36 09
s_1		331,6	$s_1 + s_2$		603,6	$\log(s_1 + s_2)$	2.78 07	$\log(s_1 - p)$	2.00 86	$\log q$	2.11 19
s_2		272,0	$s_1 - s_2$	+	59,6	$\log(s_1 - s_2)$	1.77 52	$\log(s_2 + q)$	2.60 35	$\log p\sin\nu$	2.36 01
$\frac{p+q}{2}$		179,5	$s_1 + p$		561,2	$\log\frac{(p-q)}{2}$	1.69 98	$\log(s_2 - q)$	2.15 41	$\log p\cos\nu$	1.15 37
$\frac{p-q}{2}$	+	50,1	$s_1 - p$		102,0			$\log h^2$	4.75 77	$\log q\sin\nu$	2.11 11
p		229,6	$s_2 + q$		401,4			$\log h$	2.37 88	$\log q\cos\nu$	0.90 47
q		129,4	$s_2 - q$		142,6					$\log h\sin\nu$	2.37 80
										$\log h\cos\nu$	1.17 16

$+p\cos\nu$	+	14,2	$+p\sin\nu$	+	229,2	$-q\cos\nu$	−	8,0	$-q\sin\nu$	−	129,2
$-h\sin\nu$	−	238,8	$+h\cos\nu$	+	14,8	$-h\sin\nu$	−	238,8	$+h\cos\nu$	+	14,8
Δx_1	−	224,6	Δy_1	+	244,0	Δx_2	−	246,8	Δy_2	−	114,4
						$\mathfrak{x}$		6 323,7	$\mathfrak{y}$		2 306,0

$$
(112)\qquad
\begin{cases}
\mathfrak{s}_1 = \sqrt{(\mathfrak{x} - x_1)^2 + (\mathfrak{y} - y_1)^2}, \\
\mathfrak{s}_2 = \sqrt{(\mathfrak{x} - x_2)^2 + (\mathfrak{y} - y_2)^2}, \\
\mathfrak{s}_3 = \sqrt{(\mathfrak{x} - x_3)^2 + (\mathfrak{y} - y_3)^2}, \\
\mathfrak{s}_4 = \sqrt{(\mathfrak{x} - x_4)^2 + (\mathfrak{y} - y_4)^2}, \\
\mathfrak{s}_5 = \sqrt{(\mathfrak{x} - x_5)^2 + (\mathfrak{y} - y_5)^2}.
\end{cases}
$$

Ferner erhalten wir für die Bildung der wahrscheinlichsten Werthe S_1, S_2 S_3, S_4, S_5 der Streckenlängen aus den Näherungswerthen $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{s}_3$, $\mathfrak{s}_4$, $\mathfrak{s}_5$ und den den kleinen Aenderungen $d\mathfrak{x}$ $d\mathfrak{y}$ der genäherten Koordinaten entsprechenden kleinen Aenderungen $d\mathfrak{s}_1$, $d\mathfrak{s}_2$, $d\mathfrak{s}_3$, $d\mathfrak{s}_4$, $d\mathfrak{s}_5$:

$$
(113)\qquad
\begin{cases}
S_1 = \mathfrak{s}_1 + d\mathfrak{s}_1, \\
S_2 = \mathfrak{s}_2 + d\mathfrak{s}_2, \\
S_3 = \mathfrak{s}_3 + d\mathfrak{s}_3, \\
S_4 = \mathfrak{s}_4 + d\mathfrak{s}_4, \\
S_5 = \mathfrak{s}_5 + d\mathfrak{s}_5.
\end{cases}
$$

Die Zahlenwerthe von $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{s}_3$, $\mathfrak{s}_4$, $\mathfrak{s}_5$ ergeben sich nach den Formeln (**112**) wie folgt:

	±	$\mathfrak{x}$. x_n. $\Delta\mathfrak{x} = \mathfrak{x} - x_n$.	±	$\mathfrak{y}$. y_n. $\Delta\mathfrak{y} = \mathfrak{y} - y_n$.	$\Delta\mathfrak{x}\,\Delta\mathfrak{x}$. $\Delta\mathfrak{y}\,\Delta\mathfrak{y}$. $\mathfrak{s}^2 = \Delta\mathfrak{x}\,\Delta\mathfrak{x} + \Delta\mathfrak{y}\,\Delta\mathfrak{y}$.	$\mathfrak{s}$.
P_1		6 323,70		2 306,00	5 04 45	
		6 548,30		2 061,99	5 95 41	
	−	224,60	+	244,01	10 99 86	331,64
P_2		6 323,70		2 306,00	6 09 50	
		6 570,58		2 420,30	1 30 64	
	−	246,88	−	114,30	7 40 14	272,06
P_3		6 323,70		2 306,00	6 75	
		6 297,72		2 552,03	6 05 31	
	+	25,98	−	246,03	6 12 06	247,40
P_4		6 323,70		2 306,00	7 15 08	
		6 056,29		2 276,00	9 00	
	+	267,41	+	30,00	7 24 08	269,09
P_5		6 323,70		2 306,00	59 71	
		6 246,43		1 896,99	16 72 89	
	+	77,27	+	409,01	17 32 60	416,25

§ 25. Umgeformte Fehlergleichungen.

1. Die Fehlergleichungen (**109**) und (**110**) können nun durch Einsetzen der in den Formeln (**111**) und (**113**) für die wahrscheinlichsten Werthe der zu bestimmenden und der beobachteten Gröfsen angesetzten Teilwerthe und durch einige weitere Entwicklungen in jedem Falle in einfache lineare Gleichungen umgeformt werden:

Zuerst wird aus den Formeln (**109**):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{l}_1 + d\mathfrak{l}_1 &= F_1(\mathfrak{x}+d\mathfrak{x},\ \mathfrak{y}+d\mathfrak{y},\ \mathfrak{z}+d\mathfrak{z},\ \ldots.),\\
\mathfrak{l}_2 + d\mathfrak{l}_2 &= F_2(\mathfrak{x}+d\mathfrak{x},\ \mathfrak{y}+d\mathfrak{y},\ \mathfrak{z}+d\mathfrak{z},\ \ldots.),\\
\mathfrak{l}_3 + d\mathfrak{l}_3 &= F_3(\mathfrak{x}+d\mathfrak{x},\ \mathfrak{y}+d\mathfrak{y},\ \mathfrak{z}+d\mathfrak{z},\ \ldots.),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathfrak{l}_n + d\mathfrak{l}_n &= F_n(\mathfrak{x}+d\mathfrak{x},\ \mathfrak{y}+d\mathfrak{y},\ \mathfrak{z}+d\mathfrak{z},\ \ldots.).
\end{aligned}$$

Da nun unter der Voraussetzung, dafs $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... verhältnismäfsig kleine Gröfsen sind, genügend genau allgemein:

$$F_n(\mathfrak{x}+d\mathfrak{x},\ \mathfrak{y}+d\mathfrak{y},\ \mathfrak{z}+d\mathfrak{z},\ \ldots.) = F_n(\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z},\ \ldots.) + \frac{\partial F_n}{\partial \mathfrak{x}}d\mathfrak{x} + \frac{\partial F_n}{\partial \mathfrak{y}}d\mathfrak{y} + \frac{\partial F_n}{\partial \mathfrak{z}}d\mathfrak{z} + \cdots$$

und nach den Formeln (**112**)

$$\mathfrak{l}_n = F_n(\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z},\ \ldots.)$$

ist, ergiebt sich sodann aus obigen Formeln:

$$\begin{aligned}
d\mathfrak{l}_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial \mathfrak{x}}d\mathfrak{x} + \frac{\partial F_1}{\partial \mathfrak{y}}d\mathfrak{y} + \frac{\partial F_1}{\partial \mathfrak{z}}d\mathfrak{z} + \cdots,\\
d\mathfrak{l}_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial \mathfrak{x}}d\mathfrak{x} + \frac{\partial F_2}{\partial \mathfrak{y}}d\mathfrak{y} + \frac{\partial F_2}{\partial \mathfrak{z}}d\mathfrak{z} + \cdots,\\
d\mathfrak{l}_3 &= \frac{\partial F_3}{\partial \mathfrak{x}}d\mathfrak{x} + \frac{\partial F_3}{\partial \mathfrak{y}}d\mathfrak{y} + \frac{\partial F_3}{\partial \mathfrak{z}}d\mathfrak{z} + \cdots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
d\mathfrak{l}_n &= \frac{\partial F_n}{\partial \mathfrak{x}}d\mathfrak{x} + \frac{\partial F_n}{\partial \mathfrak{y}}d\mathfrak{y} + \frac{\partial F_n}{\partial \mathfrak{z}}d\mathfrak{z} + \cdots.
\end{aligned}$$

Führen wir ferner zur Vereinfachung für die partiellen Differenzialquotienten die folgenden Bezeichnungen ein:

$$(\mathbf{114})\quad \left\{\begin{array}{l|l|l|l}
a_1 = \dfrac{\partial F_1}{\partial \mathfrak{x}}, & b_1 = \dfrac{\partial F_1}{\partial \mathfrak{y}}, & c_1 = \dfrac{\partial F_1}{\partial \mathfrak{z}}, & \ldots.,\\
a_2 = \dfrac{\partial F_2}{\partial \mathfrak{x}}, & b_2 = \dfrac{\partial F_2}{\partial \mathfrak{y}}, & c_2 = \dfrac{\partial F_2}{\partial \mathfrak{z}}, & \ldots.,\\
a_3 = \dfrac{\partial F_3}{\partial \mathfrak{x}}, & b_3 = \dfrac{\partial F_3}{\partial \mathfrak{y}}, & c_3 = \dfrac{\partial F_3}{\partial \mathfrak{z}}, & \ldots.,\\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots & \ldots.,\\
a_n = \dfrac{\partial F_n}{\partial \mathfrak{x}}, & b_n = \dfrac{\partial F_n}{\partial \mathfrak{y}}, & c_n = \dfrac{\partial F_n}{\partial \mathfrak{z}}, & \ldots.,
\end{array}\right.$$

so erhalten wir endlich:

$$(\mathbf{116})\quad \left\{\begin{aligned}
d\mathfrak{l}_1 &= a_1\,d\mathfrak{x} + b_1\,d\mathfrak{y} + c_1\,d\mathfrak{z} + \cdots,\\
d\mathfrak{l}_2 &= a_2\,d\mathfrak{x} + b_2\,d\mathfrak{y} + c_2\,d\mathfrak{z} + \cdots,\\
d\mathfrak{l}_3 &= a_3\,d\mathfrak{x} + b_3\,d\mathfrak{y} + c_3\,d\mathfrak{z} + \cdots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
d\mathfrak{l}_n &= a_n\,d\mathfrak{x} + b_n\,d\mathfrak{y} + c_n\,d\mathfrak{z} + \cdots.
\end{aligned}\right.$$

Die Formeln (**110**) gehen sodann zuerst über in:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \mathfrak{l}_1 + d\mathfrak{l}_1 - \lambda_1,\\
v_2 &= \mathfrak{l}_2 + d\mathfrak{l}_2 - \lambda_2,\\
v_3 &= \mathfrak{l}_3 + d\mathfrak{l}_3 - \lambda_3,\\
&\ldots\ldots\ldots,\\
v_n &= \mathfrak{l}_n + d\mathfrak{l}_n - \lambda_n,
\end{aligned}$$

und wenn die Unterschiede zwischen den Näherungswerthen $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_3$, ... $\mathfrak{l}_n$ der beobachteten Gröfsen und den vorliegenden Beobachtungsergebnissen λ_1, λ_2, λ_3, ... λ_n mit f_1, f_2, f_3, ... f_n bezeichnet werden, also

(115)
$$\begin{cases} f_1 = \mathfrak{l}_1 - \lambda_1, \\ f_2 = \mathfrak{l}_2 - \lambda_2, \\ f_3 = \mathfrak{l}_3 - \lambda_3, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ f_n = \mathfrak{l}_n - \lambda_n, \end{cases}$$

gesetzt wird, über in:

(117)
$$\begin{cases} v_1 = f_1 + d\mathfrak{l}_1, \\ v_2 = f_2 + d\mathfrak{l}_2, \\ v_3 = f_3 + d\mathfrak{l}_3, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ v_n = f_n + d\mathfrak{l}_n. \end{cases}$$

Die Gleichungen (**116**) und (**117**) bezeichnen wir als umgeformte Fehlergleichungen.

Beispiel 1: Zur Aufstellung der umgeformten Fehlergleichungen bilden wir zuerst die partiellen Differenzialquotienten von

$$\mathfrak{s}_n = F_n(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sqrt{(\mathfrak{y} - y_n)^2 + (\mathfrak{x} - x_n)^2},$$

nach $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, womit wir erhalten:

(114)
$$\begin{cases} a_1 = \frac{\partial F_1}{\partial \mathfrak{x}} = \frac{\mathfrak{x} - x_1}{\mathfrak{s}_1} = -0{,}677, & b_1 = \frac{\partial F_1}{\partial \mathfrak{y}} = \frac{\mathfrak{y} - y_1}{\mathfrak{s}_1} = +0{,}735, \\ a_2 = \frac{\partial F_2}{\partial \mathfrak{x}} = \frac{\mathfrak{x} - x_2}{\mathfrak{s}_2} = -0{,}908, & b_2 = \frac{\partial F_2}{\partial \mathfrak{y}} = \frac{\mathfrak{y} - y_2}{\mathfrak{s}_2} = -0{,}420, \\ a_3 = \frac{\partial F_3}{\partial \mathfrak{x}} = \frac{\mathfrak{x} - x_3}{\mathfrak{s}_3} = +0{,}105, & b_3 = \frac{\partial F_3}{\partial \mathfrak{y}} = \frac{\mathfrak{y} - y_3}{\mathfrak{s}_3} = -0{,}996, \\ a_4 = \frac{\partial F_4}{\partial \mathfrak{x}} = \frac{\mathfrak{x} - x_4}{\mathfrak{s}_4} = +0{,}994, & b_4 = \frac{\partial F_4}{\partial \mathfrak{y}} = \frac{\mathfrak{y} - y_4}{\mathfrak{s}_4} = +0{,}111, \\ a_5 = \frac{\partial F_5}{\partial \mathfrak{x}} = \frac{\mathfrak{x} - x_5}{\mathfrak{s}_5} = +0{,}186, & b_5 = \frac{\partial F_5}{\partial \mathfrak{y}} = \frac{\mathfrak{y} - y_5}{\mathfrak{s}_5} = +0{,}983. \end{cases}$$

Sodann bilden wir die Unterschiede f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 zwischen den genäherten Werthen der beobachteten Gröfsen und den Beobachtungsergebnissen wie folgt:

(115)
$$\begin{cases} f_1 = \mathfrak{s}_1 - s_1 = 331{,}64 - 331{,}60 = +0{,}04, \\ f_2 = \mathfrak{s}_2 - s_2 = 272{,}06 - 272{,}00 = +0{,}06, \\ f_3 = \mathfrak{s}_3 - s_3 = 247{,}40 - 247{,}10 = +0{,}30, \\ f_4 = \mathfrak{s}_4 - s_4 = 269{,}09 - 269{,}50 = -0{,}41, \\ f_5 = \mathfrak{s}_5 - s_5 = 416{,}25 - 416{,}70 = -0{,}45, \end{cases}$$

$$\text{Probe:} \quad 6{,}44 - \quad 6{,}90 = -0{,}46.$$

Damit ergeben sich die umgeformten Fehlergleichungen:

(116)
$$\begin{cases} d\mathfrak{s}_1 = a_1\,d\mathfrak{x} + b_1\,d\mathfrak{y} = -0{,}677\,d\mathfrak{x} + 0{,}735\,d\mathfrak{y}, \\ d\mathfrak{s}_2 = a_2\,d\mathfrak{x} + b_2\,d\mathfrak{y} = -0{,}908\,d\mathfrak{x} - 0{,}420\,d\mathfrak{y}, \\ d\mathfrak{s}_3 = a_3\,d\mathfrak{x} + b_3\,d\mathfrak{y} = +0{,}105\,d\mathfrak{x} - 0{,}996\,d\mathfrak{y}, \\ d\mathfrak{s}_4 = a_4\,d\mathfrak{x} + b_4\,d\mathfrak{y} = +0{,}994\,d\mathfrak{x} + 0{,}111\,d\mathfrak{y}, \\ d\mathfrak{s}_5 = a_5\,d\mathfrak{x} + b_5\,d\mathfrak{y} = +0{,}186\,d\mathfrak{x} + 0{,}983\,d\mathfrak{y}, \end{cases}$$

(117)
$$\begin{cases} v_1 = f_1 + d\mathfrak{l}_1 = +0{,}04 + d\mathfrak{s}_1, \\ v_2 = f_2 + d\mathfrak{l}_2 = +0{,}06 + d\mathfrak{s}_2, \\ v_3 = f_3 + d\mathfrak{l}_3 = +0{,}30 + d\mathfrak{s}_3, \\ v_4 = f_4 + d\mathfrak{l}_4 = -0{,}41 + d\mathfrak{s}_4, \\ v_5 = f_5 + d\mathfrak{l}_5 = -0{,}45 + d\mathfrak{s}_5. \end{cases}$$

2. Die Zahlenwerthe der partiellen Differenzialquotienten $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$; $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n$; $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$; ...... können je nach Lage des Falles in verschiedenartigster Weise ermittelt werden: Wenn die Gleichungen (**112**) linear sind,

können die Zahlenwerthe der Differenzialquotienten ohne weiteres aus diesen Gleichungen entnommen werden, da sie gleich den Faktoren sind, womit die Näherungswerthe $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ... in diesen Gleichungen auftreten; im übrigen können die bezeichneten Zahlenwerthe mit Crelle'schen oder anderen Rechentafeln, aus graphischen Tafeln, mit vier- oder fünfstelligen Logarithmen, logarithmischen Rechenschiebern u. s. w. ermittelt werden.

Mit welcher Genauigkeit die Zahlenwerthe der Differenzialquotienten bestimmt werden müssen, ist, wenn hierfür die Erfahrung nicht bereits genügenden Anhalt gewährt hat, am einfachsten durch die praktische Probe zu entscheiden, indem festgestellt wird, ob die nach den Formeln (**116**) berechneten Zahlenwerthe von $d\mathfrak{l}_1$, $d\mathfrak{l}_2$, $d\mathfrak{l}_3$, ... $d\mathfrak{l}_n$ in genügender Weise mit den Unterschieden übereinstimmen zwischen den nach den Formeln (**109**) und (**112**) berechneten Werthen von L_1, L_2, L_3, ... L_n und $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_3$, ... $\mathfrak{l}_n$.

3. Die Zahlenwerthe der nach den Formeln (**115**) erhaltenen Unterschiede f_1, f_2, f_3, ... f_n zwischen den genäherten Werthen der beobachteten Gröfsen und den vorliegenden Beobachtungsergebnissen gewähren einen Anhalt einerseits dafür, ob die genäherten Werthe $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ... der zu bestimmenden Gröfsen genügend genau sind und ob die daraus abgeleiteten Näherungswerthe $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_3$, ... $\mathfrak{l}_n$ mit groben Fehlern behaftet sind, andererseits dafür, ob die Beobachtungsergebnisse λ_1, λ_2, λ_3, ... λ_n mit groben Fehlern behaftet sind. Wenn auffällig grofse Zahlenwerthe von f_1, f_2, f_3, ... f_n vorkommen, d. h. wenn solche Werthe vorkommen, die etwa den dreifachen Betrag der für die Beobachtungsergebnisse zulässigen Maximalfehler übersteigen, empfiehlt es sich, die vorhergegangenen Rechnungen und nöthigenfalls die Messungsergebnisse sorgfältig zu prüfen. Falls es sich hierbei herausstellt, dafs die auffallende Gröfse der Zahlenwerthe von f_1, f_2, f_3, ... f_n nur von Messungsfehlern herrühren kann, so kann es, wenn nicht ganz augenscheinlich ein grober Fehler vorliegt, zweckmäfsig sein, zunächst die Rechnung doch zu Ende zu führen und erst nach Abschluss der Rechnung zu entscheiden, ob und wie die Nachmessungen auszuführen sind.

§ 26. Endgleichungen.

1. Nachdem die Näherungswerthe der zu bestimmenden Gröfsen ermittelt und die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler durch die umgeformten Fehlergleichungen (**116**) und (**117**) als lineare Funktionen der den Näherungswerthen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ... noch beizufügenden kleinen Gröfsen $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... dargestellt sind, müssen wir die Gröfsen $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... nunmehr so bestimmen, dafs unsern Grundsätzen gemäfs die Quadratsumme der auf die Gewichtseinheit reduzirten wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler $v_1\sqrt{p_1}$, $v_2\sqrt{p_2}$, $v_3\sqrt{p_3}$, ... $v_n\sqrt{p_n}$, also

$$(46) \qquad p_1 v_1 v_1 + p_2 v_2 v_2 + p_3 v_3 v_3 + \cdots p_n v_n v_n = [pvv]$$

ein Minimum wird.

Um dies auszuführen, vereinigen wir zunächst die Gleichungen (**116**) und (**117**) je zu einer Gleichung:

$$\begin{aligned}
v_1 &= a_1 d\mathfrak{x} + b_1 d\mathfrak{y} + c_1 d\mathfrak{z} + \cdots + f_1,\\
v_2 &= a_2 d\mathfrak{x} + b_2 d\mathfrak{y} + c_2 d\mathfrak{z} + \cdots + f_2,\\
v_3 &= a_3 d\mathfrak{x} + b_3 d\mathfrak{y} + c_3 d\mathfrak{z} + \cdots + f_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
v_n &= a_n d\mathfrak{x} + b_n d\mathfrak{y} + c_n d\mathfrak{z} + \cdots + f_n.
\end{aligned}$$

und bilden die Quadratsumme $[pvv]$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
p_1v_1v_1 = {} & p_1a_1a_1\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{x} + 2p_1a_1b_1\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} + 2p_1a_1c_1\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{z} + \cdots + 2p_1a_1f_1\,d\mathfrak{x}\\
& + p_1b_1b_1\,d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{y} + 2p_1b_1c_1\,d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{z} + \cdots + 2p_1b_1f_1\,d\mathfrak{y}\\
& + p_1c_1c_1\,d\mathfrak{z}\,d\mathfrak{z} + \cdots + 2p_1c_1f_1\,d\mathfrak{z}\\
& + \cdots\cdots\\
& + p_1f_1f_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_2v_2v_2 = {} & p_2a_2a_2\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{x} + 2p_2a_2b_2\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} + 2p_2a_2c_2\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{z} + \cdots + 2p_2a_2f_2\,d\mathfrak{x}\\
& + p_2b_2b_2\,d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{y} + 2p_2b_2c_2\,d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{z} + \cdots + 2p_2b_2f_2\,d\mathfrak{y}\\
& + p_2c_2c_2\,d\mathfrak{z}\,d\mathfrak{z} + \cdots + 2p_2c_2f_2\,d\mathfrak{z}\\
& + \cdots\cdots\\
& + p_2f_2f_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_3v_3v_3 = {} & p_3a_3a_3\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{x} + 2p_3a_3b_3\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} + 2p_3a_3c_3\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{z} + \cdots + 2p_3a_3f_3\,d\mathfrak{x}\\
& + p_3b_3b_3\,d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{y} + 2p_3b_3c_3\,d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{z} + \cdots + 2p_3b_3f_3\,d\mathfrak{y}\\
& + p_3c_3c_3\,d\mathfrak{z}\,d\mathfrak{z} + \cdots + 2p_3c_3f_3\,d\mathfrak{z}\\
& + \cdots\cdots\\
& + p_3f_3f_3,
\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}
p_nv_nv_n = {} & p_na_na_n\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{x} + 2p_na_nb_n\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} + 2p_na_nc_n\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{z} + \cdots + 2p_na_nf_n\,d\mathfrak{x}\\
& + p_nb_nb_n\,d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{y} + 2p_nb_nc_n\,d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{z} + \cdots + 2p_nb_nf_n\,d\mathfrak{y}\\
& + p_nc_nc_n\,d\mathfrak{z}\,d\mathfrak{z} + \cdots + 2p_nc_nf_n\,d\mathfrak{z}\\
& + \cdots\cdots\\
& + p_nf_nf_n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[pvv] = {} & [paa]\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{x} + 2[pab]\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} + 2[pac]\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{z} + \cdots + 2[paf]\,d\mathfrak{x}\\
& + [pbb]\,d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{y} + 2[pbc]\,d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{z} + \cdots + 2[pbf]\,d\mathfrak{y}\\
& + [pcc]\,d\mathfrak{z}\,d\mathfrak{z} + \cdots + 2[pcf]\,d\mathfrak{z}\\
& + \cdots\cdots\\
& + [pff].
\end{aligned}$$

Diese Quadratsumme wird zu einem Minimum für die Werthe von $d\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{z}, \ldots$, die wir erhalten, wenn wir ihre partiellen Differenzialquotienten nach $d\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{z}, \ldots$ bilden, diese Differenzialquotienten gleich Null setzen und die sich damit ergebenden Gleichungen nach $d\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{z}, \ldots$ auflösen.

Die partiellen Differenzialquotienten nach $d\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{z}, \ldots$ sind:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial[pvv]}{\partial d\mathfrak{x}} &= 2[paa]\,d\mathfrak{x} + 2[pab]\,d\mathfrak{y} + 2[pac]\,d\mathfrak{z} + \cdots + 2[paf],\\
\frac{\partial[pvv]}{\partial d\mathfrak{y}} &= 2[pab]\,d\mathfrak{x} + 2[pbb]\,d\mathfrak{y} + 2[pbc]\,d\mathfrak{z} + \cdots + 2[pbf],\\
\frac{\partial[pvv]}{\partial d\mathfrak{z}} &= 2[pac]\,d\mathfrak{x} + 2[pbc]\,d\mathfrak{y} + 2[pcc]\,d\mathfrak{z} + \cdots + 2[pcf],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Setzen wir diese Differenzialquotienten gleich Null und dividiren durch 2, so erhalten wir:

$$\text{(118)}\qquad \left\{\begin{aligned}
&[paa]\,d\mathfrak{x} + [pab]\,d\mathfrak{y} + [pac]\,d\mathfrak{z} + \cdots + [paf] = 0,\\
&[pab]\,d\mathfrak{x} + [pbb]\,d\mathfrak{y} + [pbc]\,d\mathfrak{z} + \cdots + [pbf] = 0,\\
&[pac]\,d\mathfrak{x} + [pbc]\,d\mathfrak{y} + [pcc]\,d\mathfrak{z} + \cdots + [pcf] = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen, durch deren Auflösung $d\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{z}, \ldots$ erhalten werden, bezeichnen wir als Endgleichungen. Ihre Anzahl ist immer gleich der Anzahl q der Gröfsen $d\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{z}, \ldots$, und es ergeben sich daraus immer bestimmte Werthe der Gröfsen $d\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{z}, \ldots$, wenn die vorliegenden Beobachtungsergebnisse überhaupt zur Bestimmung der gesuchten Gröfsen genügen.

2. Die Berechnung der Zahlenwerthe der Faktoren der Endgleichungen $[paa]$, $[pab]$, $[pac]$, ..., $[paf]$; $[pbb]$, $[pbc]$, ... $[pbf]$; $[pcc]$, ... $[pcf]$; .... erfolgt meistens am zweckmäfsigsten und genügend genau mit Crelle'schen Rechentafeln, mit logarithmischen Rechenschiebern oder Quadrattafeln. Nur in aufsergewöhnlichen Fällen kann es geboten sein, ihre Berechnung mit Logarithmen oder der Thomas'schen Rechenmaschine mit gröfserer Genauigkeit auszuführen. Ob die Berechnung genügend genau ist, ist zu erkennen durch eine später (im § 29, Nr. 11) zu besprechende Probe dafür, dafs $[pvv]$ direkt aus den Abweichungen f_1, f_2, f_3, ... f_n und aus den wahrscheinlichsten Werthen v_1, v_2, v_3, ... v_n der Beobachtungsfehler genügend übereinstimmend erhalten wird.

3. In den Endgleichungen kommen die Faktoren $[pab]$, $[pac]$, ... $[pbc]$, ... doppelt vor. Um in gröfseren Rechnungen diese doppelte Anführung der bezeichneten Faktoren zu ersparen; kann die folgende schematische Schreibweise der Endgleichungen angewendet werden:

(119)

$d\mathfrak{x}$	$d\mathfrak{y}$	$d\mathfrak{z}$	.....	
$[paa]$	$[pab]$	$[pac]$	.....	$d\mathfrak{x} + [paf] = 0$,
	$[pbb]$	$[pbc]$	.....	$d\mathfrak{y} + [pbf] = 0$,
		$[pcc]$	.....	$d\mathfrak{z} + [pcf] = 0$,
			.....	....

Hieraus ergeben sich die Endgleichungen in der Weise, dafs die stark dargestellten Linien verfolgt und zu den rechts von diesen Linien stehenden Faktoren die in derselben Zeile rechts der feinen Vertikallinie stehenden Gröfsen $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$,..., zu den oberhalb der starken Linien stehenden Faktoren die in derselben Spalte auf der feinen Horizontallinie stehenden Gröfsen $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... genommen werden.

Beispiel 1: Die gegebenen Gewichte p_n und die im § 25 erhaltenen Faktoren a_n, b_n, f_n der umgeformten Fehlergleichungen sind:

$p_1 = 5{,}41$,	$a_1 = -0{,}677$,	$b_1 = +0{,}735$,	$f_1 = +0{,}04$,
$p_2 = 6{,}93$,	$a_2 = -0{,}908$,	$b_2 = -0{,}420$,	$f_2 = +0{,}06$,
$p_3 = 5{,}16$,	$a_3 = +0{,}105$,	$b_3 = -0{,}996$,	$f_3 = +0{,}30$,
$p_4 = 6{,}93$,	$a_4 = +0{,}994$,	$b_4 = +0{,}111$,	$f_4 = -0{,}41$,
$p_5 = 2{,}60$,	$a_5 = +0{,}186$,	$b_5 = +0{,}983$,	$f_5 = -0{,}45$.

Hiermit erhalten wir die Faktoren der Endgleichungen wie folgt:

	$\sqrt{p}$.	$a\sqrt{p}$.	$b\sqrt{p}$.	$f\sqrt{p}$.	paa.	pab.	paf.	pbb.	pbf.
P_1	2,33	− 1,58	+ 1,71	+ 0,09	2,50	− 2,70	− 0,14	2,92	+ 0,15
P_2	2,63	− 2,39	− 1,10	+ 0,16	5,71	+ 2,63	− 0,38	1,21	− 0,18
P_3	2,27	+ 0,24	− 2,26	+ 0,68	0,06	− 0,54	+ 0,16	5,11	− 1,54
P_4	2,63	+ 2,61	+ 0,29	− 1,08	6,81	+ 0,76	− 2,82	0,08	− 0,31
P_5	1,61	+ 0,30	+ 1,58	− 0,72	0,09	+ 0,47	− 0,22	2,50	− 1,14
					15,17	+ 0,62	− 3,40	11,82	− 3,02

Die Endgleichungen sind demnach:

$$
(118) \quad \begin{cases} +\,15{,}17\, d\mathfrak{x} + \;\;0{,}62\, d\mathfrak{y} - 3{,}40 = 0, \\ +\;\;0{,}62\, d\mathfrak{x} + 11{,}82\, d\mathfrak{y} - 3{,}02 = 0, \end{cases}
$$

oder nach Schema (**119**):

(**119**)

$d\mathfrak{x}$	$d\mathfrak{y}$	
$+15,17$	$+\ 0,62$	$d\mathfrak{x} - 3,40 = 0,$
	$+11,82$	$d\mathfrak{y} - 3,02 = 0.$

§ 27. Auflösung der Endgleichungen und Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe der zu bestimmenden Gröfsen.

1. Die Auflösung der Endgleichungen erfolgt zweckmäfsig in allen Fällen nach einem einheitlichen fest geregelten Verfahren. Behufs Entwicklung dieses Verfahrens führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$(120^a) \quad \left\{ \begin{array}{l|l|l|l|l} \mathfrak{a}_1 = [paa], & \mathfrak{b}_1 = [pab], & \mathfrak{c}_1 = [pac], & \cdots & \mathfrak{f}_1 = [paf], \\ & \mathfrak{b}_2 = [pbb], & \mathfrak{c}_2 = [pbc], & \cdots & \mathfrak{f}_2 = [pbf], \\ & & \mathfrak{c}_3 = [pcc], & \cdots & \mathfrak{f}_3 = [pcf], \\ & & & \cdots & \cdots\cdots\cdots, \end{array} \right.$$

$$(120^b) \quad \left\{ \begin{array}{l|l|l|l} \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{b}_2 - \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1, & \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{c}_2 - \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1, & \cdots & \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{f}_2 - \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1, \\ & \mathfrak{C}_3 = \mathfrak{c}_3 - \frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1 - \frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{C}_2, & \cdots & \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{f}_3 - \frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 - \frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2, \\ & & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{*)} \end{array} \right.$$

Mit Einführung der Bezeichnungen (**120**a) wird zuerst aus den Endgleichungen (**118**), die wir fortlaufend mit (1*), (2*), (3*),.... nummeriren:

$$(121) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (1^*): & \mathfrak{a}_1 d\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_1 d\mathfrak{y} + \mathfrak{c}_1 d\mathfrak{z} + \cdots \mathfrak{f}_1 = 0, \\ (2^*): & \mathfrak{b}_1 d\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_2 d\mathfrak{y} + \mathfrak{c}_2 d\mathfrak{z} + \cdots \mathfrak{f}_2 = 0, \\ (3^*): & \mathfrak{c}_1 d\mathfrak{x} + \mathfrak{c}_2 d\mathfrak{y} + \mathfrak{c}_3 d\mathfrak{z} + \cdots \mathfrak{f}_3 = 0, \\ \cdots: & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right.$$

Wir verfahren nun wie folgt:

1. Wir eliminiren die erste Unbekannte $d\mathfrak{x}$ aus den Gleichungen (1*) und (2*), indem wir Gleichung (1*) mit $-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}$ multipliziren und dann zu Gleichung (2*) addiren, womit wir nach (**120**b) erhalten:

$$\begin{array}{rl} (2^*): & \mathfrak{b}_1 d\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_2 d\mathfrak{y} + \mathfrak{c}_2 d\mathfrak{z} + \cdots + \mathfrak{f}_2 = 0, \\ -\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}(1^*): & -\mathfrak{b}_1 d\mathfrak{x} - \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1 d\mathfrak{y} - \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1 d\mathfrak{z} - \cdots - \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 = 0, \\ \hline (II): & \mathfrak{B}_2 d\mathfrak{y} + \mathfrak{C}_2 d\mathfrak{z} + \cdots + \mathfrak{F}_2 = 0. \end{array}$$

2. Sodann eliminiren wir die zweite Unbekannte, indem wir zuerst zu Gleichung (3*) die mit $-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}$ multiplizirte Gleichung (1*) hinzufügen, womit $d\mathfrak{x}$ herausfällt und der Faktor von $d\mathfrak{y}$ gleich $\mathfrak{c}_2 - \frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{C}_2$ wird, und indem wir dann noch die mit $-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}$ multiplizirte Gleichung (II) hinzufügen, womit auch $d\mathfrak{y}$ herausfällt, so dafs wir nach (**120**b) erhalten:

---

*) Aus den hier eingeführten einfachen Bezeichnungen ergeben sich die üblichen Gaufs'schen Bezeichnungen folgendermafsen:

Den Buchstaben unserer Bezeichnung wird als zweiter Buchstabe der beigesetzt, der in der Reihenfolge des Alphabets die Stelle einnimmt, die durch den Index unserer Bezeichnung angezeigt wird; wo in unsern Bezeichnungen grofse Buchstaben stehen, wird noch eine Zahl beigesetzt, die um Eins kleiner ist als der Index, sodann werden die Summenklammern hinzugefügt. Demnach ist z. B.: $\mathfrak{a}_1 = [aa]$, $\mathfrak{b}_1 = [ab]$, ..., $\mathfrak{f}_1 = [af]$; $\mathfrak{b}_2 = [bb]$,...., $\mathfrak{f}_2 = [bf]$; $\mathfrak{B}_2 = [bb \cdot 1]$, $\mathfrak{C}_2 = [bc \cdot 1]$,...., $\mathfrak{F}_2 = [bf \cdot 1]$; $\mathfrak{C}_3 = [cc \cdot 2]$....., $\mathfrak{F}_3 = [cf \cdot 2]$, ...

$$\begin{array}{rrrrl}
(3^*): & \mathfrak{c}_1\,d\mathfrak{x} + & \mathfrak{c}_2\,d\mathfrak{y} + & \mathfrak{c}_3\,d\mathfrak{z} + \cdots + & \mathfrak{f}_3 = 0,\\
-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\,(1^*): & -\mathfrak{c}_1\,d\mathfrak{x} - & \frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1\,d\mathfrak{y} - & \frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1\,d\mathfrak{z} - \cdots - & \frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 = 0,\\
-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\,(II): & & -\mathfrak{C}_2\,d\mathfrak{y} - & \frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{C}_2\,d\mathfrak{z} - \cdots - & \frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 = 0,\\
\hline
(III): & & & \mathfrak{C}_3\,d\mathfrak{z} + \cdots + & \mathfrak{F}_3 = 0.
\end{array}$$

3. In dieser Weise fahren wir fort, indem wir zu den Gleichungen (4*), (5*), ... solche aus den Gleichungen (1*), (II), (III), (IV), ... folgende Gleichungen hinzufügen, die bei Aufsummirung aller Gleichungen die Faktoren der Unbekannten $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... nacheinander zu Null machen, womit wir schliefslich eine Gleichung erhalten, die nur noch eine Unbekannte enthält.

4. Zur Gewinnung eines bessern Ueberblicks stellen wir das bisher entwickelte hier zusammen:

$$\begin{array}{rrrrl}
(1^*): & \mathfrak{a}_1\,d\mathfrak{x} + & \mathfrak{b}_1\,d\mathfrak{y} + & \mathfrak{c}_1\,d\mathfrak{z} + \cdots + & \mathfrak{f}_1 = 0,\\
\hline
(2^*): & \mathfrak{b}_1\,d\mathfrak{x} + & \mathfrak{b}_2\,d\mathfrak{y} + & \mathfrak{c}_2\,d\mathfrak{z} + \cdots + & \mathfrak{f}_2 = 0,\\
-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\,(1^*): & -\mathfrak{b}_1\,d\mathfrak{x} - & \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1\,d\mathfrak{y} - & \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1\,d\mathfrak{z} - \cdots - & \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 = 0,\\
\hline
(II): & & \mathfrak{B}_2\,d\mathfrak{y} + & \mathfrak{C}_2\,d\mathfrak{z} + \cdots + & \mathfrak{F}_2 = 0,\\
\hline
(3^*): & \mathfrak{c}_1\,d\mathfrak{x} + & \mathfrak{c}_2\,d\mathfrak{y} + & \mathfrak{c}_3\,d\mathfrak{z} + \cdots + & \mathfrak{f}_3 = 0,\\
-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\,(1^*): & -\mathfrak{c}_1\,d\mathfrak{x} - & \frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1\,d\mathfrak{y} - & \frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1\,d\mathfrak{z} - \cdots - & \frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 = 0,\\
-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\,(II): & & -\mathfrak{C}_2\,d\mathfrak{y} - & \frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{C}_2\,d\mathfrak{z} - \cdots - & \frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 = 0,\\
\hline
(III): & & & \mathfrak{C}_3\,d\mathfrak{z} + \cdots + & \mathfrak{F}_3 = 0,\\
\hline
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Die Gleichungen (1*), (II), (III), ...:

$$(\mathbf{122})\qquad \left\{\begin{array}{rrrl}
\mathfrak{a}_1\,d\mathfrak{x} + & \mathfrak{b}_1\,d\mathfrak{y} + & \mathfrak{c}_1\,d\mathfrak{z} + \cdots & \mathfrak{f}_1 = 0,\\
& \mathfrak{B}_2\,d\mathfrak{y} + & \mathfrak{C}_2\,d\mathfrak{z} + \cdots & \mathfrak{F}_2 = 0,\\
& & \mathfrak{C}_3\,d\mathfrak{z} + \cdots & \mathfrak{F}_3 = 0,\\
& & \cdots\cdots & \cdots
\end{array}\right.$$

bezeichnen wir als reduzirte Endgleichungen.

5. Aus den reduzirten Endgleichungen ergeben sich die Unbekannten $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... nach:

$$(\mathbf{123})\qquad \left\{\begin{array}{r}
\cdots\cdots\cdots,\\
d\mathfrak{z} = \cdots - \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3},\\
d\mathfrak{y} = -\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}d\mathfrak{z} \cdots - \frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2},\\
d\mathfrak{x} = -\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}d\mathfrak{y} - \frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}d\mathfrak{z} \cdots - \frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}.
\end{array}\right.$$

6. Die praktische Durchführung der Auflösung nach den entwickelten Formeln erfolgt zweckmäfsig in einem für alle Fälle in gleicher Anordnung brauchbaren Rechenschema. Ein solches Rechenschema ergiebt sich ohne weiteres, indem wir die einzelnen in Nr. 4 untereinander stehenden Teile nebeneinander stellen, das links von den eingetragenen Vertikallinien stehende, für die Erlangung der Rechnungsergebnisse unnöthige weglassen und die Berechnung der Unbekannten nach den Formeln (**123**) in vertikaler Anordnung hinzufügen. Wir erhalten damit:

(124)

[paa]		[pab]		[pac]		....	[paf]		[pbb]	
$\mathfrak{a}_1$	—	$\mathfrak{b}_1$	—	$\mathfrak{c}_1$	—	....	$\mathfrak{f}_1$	—	$\mathfrak{b}_2$	—
	—	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}$	—	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}$	—	....	$-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}$	—	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1$	—
							....	....	$=\mathfrak{B}_2$	—
							$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}dz$	—		
							$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}dy$	—		
							$=d\mathfrak{x}$	—		

Beispiel 1: Die Auflösung der im § 26 erhaltenen Endgleichungen gestaltet sich nach Nr. 4 wie folgt:

$$(1^*):\quad \mathfrak{a}_1 d\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_1 d\mathfrak{y} + \mathfrak{f}_1 = +15{,}17\,d\mathfrak{x} + 0{,}62\,d\mathfrak{y} - 3{,}40 = 0,$$

$$(2^*):\quad \mathfrak{b}_1 d\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_2 d\mathfrak{y} + \mathfrak{f}_2 = +\ 0{,}62\,d\mathfrak{x} + 11{,}82\,d\mathfrak{y} - 3{,}02 = 0,$$

$$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}(1^*) = -0{,}041\,(1^*):\ -\mathfrak{b}_1 d\mathfrak{x} - \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1 d\mathfrak{y} - \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 = -\ 0{,}62\,d\mathfrak{x} - 0{,}03\,d\mathfrak{y} + 0{,}14 = 0,$$

$$(\mathrm{II}):\quad \mathfrak{B}_2 d\mathfrak{y} + \mathfrak{F}_2 = \quad +11{,}79\,d\mathfrak{y} - 2{,}88 = 0.$$

Demnach sind die reduzirten Endgleichungen:

$$(122)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_1 d\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_1 d\mathfrak{y} + \mathfrak{f}_1 = +15{,}17\,d\mathfrak{x} + 0{,}62\,d\mathfrak{y} - 3{,}40 = 0, \\ \mathfrak{B}_2 d\mathfrak{y} + \mathfrak{F}_2 = \quad +11{,}79\,d\mathfrak{y} - 2{,}88 = 0. \end{cases}$$

Hieraus ergeben sich die Unbekannten $d\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{y}$ wie folgt:

$$(123)\quad \begin{cases} d\mathfrak{y} = -\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2} = +0{,}244, \\ d\mathfrak{x} = -\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}d\mathfrak{y} - \frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1} = -0{,}010 + 0{,}224 = +0{,}214. \end{cases}$$

Nach dem Schema (124) ist die Auflösung:

$\mathfrak{a}_1$	+	15,17	$\mathfrak{b}_1$	+	0,62	$\mathfrak{f}_1$	—	3,40	$\mathfrak{b}_2$	+	11,82	$\mathfrak{f}_2$	—	3,02
			$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}$	—	0,041	$-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}$	+	0,224	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1$	—	0,03	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	+	0,14
						$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}d\mathfrak{y}$	—	0,010	$=\mathfrak{B}_2$	+	11,79	$=\mathfrak{F}_2$	—	2,88
						$=d\mathfrak{x}$	+	0,214				$d\mathfrak{y} = -\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$	+	0,244

2. Aus den durch Auflösung der Endgleichungen gewonnenen Werthen von $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... und den Näherungswerthen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ..., erhalten wir nunmehr die wahrscheinlichsten Werthe der zu bestimmenden Gröfsen nach:

$$(111)\quad \begin{cases} x = \mathfrak{x} + d\mathfrak{x}, \\ y = \mathfrak{y} + d\mathfrak{y}, \\ z = \mathfrak{z} + d\mathfrak{z}, \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Beispiel 1: In unserm Beispiele erhalten wir die wahrscheinlichsten Werthe der zu bestimmenden Koordinaten $x\ y$ des Punktes P zu:

$[pbc]$		....	$[pbf]$		$[pcc]$		....	$[pcf]$		....
$\mathfrak{c}_2$	—	....	$\mathfrak{f}_2$	—	$\mathfrak{c}_3$	—	....	$\mathfrak{f}_3$	—	....
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1$	—	....	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	—	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1$	—	....	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	—	....
$=\mathfrak{C}_2$	—	....	$=\mathfrak{F}_2$	—	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{C}_2$	—	....	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	—	....
$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}$	—	....	$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$	—	$=\mathfrak{C}_3$	—	....	$=\mathfrak{F}_3$	—	....
			....	....			....	$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}$	—	....
			$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}d\mathfrak{z}$	—				....	....	....
			$=d\mathfrak{y}$	—				$=d\mathfrak{z}$	—	....

$$\text{(111)} \quad \begin{cases} x = \mathfrak{x} + d\mathfrak{x} = 6\,323{,}70 + 0{,}21 = 6\,323{,}91, \\ y = \mathfrak{y} + d\mathfrak{y} = 2\,306{,}00 + 0{,}24 = 2\,306{,}24. \end{cases}$$

3. Um die Entwicklung des Rechenschemas für die Auflösung der Endgleichungen für eine gröfsere Zahl von Unbekannten weiter zu erläutern, führen wir noch die Auflösung von 5 Endgleichungen mit 5 Unbekannten:

$$\begin{aligned}
&(1^*):\quad \mathfrak{a}_1 d\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_1 d\mathfrak{y} + \mathfrak{c}_1 d\mathfrak{z} + \mathfrak{d}_1 d\mathfrak{v} + \mathfrak{e}_1 d\mathfrak{w} + \mathfrak{f}_1 = 0,\\
&(2^*):\quad \mathfrak{b}_1 d\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_2 d\mathfrak{y} + \mathfrak{c}_2 d\mathfrak{z} + \mathfrak{d}_2 d\mathfrak{v} + \mathfrak{e}_2 d\mathfrak{w} + \mathfrak{f}_2 = 0,\\
&(3^*):\quad \mathfrak{c}_1 d\mathfrak{x} + \mathfrak{c}_2 d\mathfrak{y} + \mathfrak{c}_3 d\mathfrak{z} + \mathfrak{d}_3 d\mathfrak{v} + \mathfrak{e}_3 d\mathfrak{w} + \mathfrak{f}_3 = 0,\\
&(4^*):\quad \mathfrak{d}_1 d\mathfrak{x} + \mathfrak{d}_2 d\mathfrak{y} + \mathfrak{d}_3 d\mathfrak{z} + \mathfrak{d}_4 d\mathfrak{v} + \mathfrak{e}_4 d\mathfrak{w} + \mathfrak{f}_4 = 0,\\
&(5^*):\quad \mathfrak{e}_1 d\mathfrak{x} + \mathfrak{e}_2 d\mathfrak{y} + \mathfrak{e}_3 d\mathfrak{z} + \mathfrak{e}_4 d\mathfrak{v} + \mathfrak{e}_5 d\mathfrak{w} + \mathfrak{f}_5 = 0
\end{aligned}$$

nach den unter Nr. **1** entwickelten Regeln durch und fügen das sich danach ergebende Rechenschema mit Weglassung der Spalten für die Eintragung der Zahlen bei:

a) Auflösung der Endgleichungen mit 5 Unbekannten.

(1^*):	$\mathfrak{a}_1 d\mathfrak{x}$	$+\ \mathfrak{b}_1 d\mathfrak{y}$	$+\ \mathfrak{c}_1 d\mathfrak{z}$	$+\ \mathfrak{d}_1 d\mathfrak{v}$	$+\ \mathfrak{e}_1 d\mathfrak{w}$	$+\ \mathfrak{f}_1 = 0,$
(2^*):	$\mathfrak{b}_1 d\mathfrak{x}$	$+\ \mathfrak{b}_2 d\mathfrak{y}$	$+\ \mathfrak{c}_2 d\mathfrak{z}$	$+\ \mathfrak{d}_2 d\mathfrak{v}$	$+\ \mathfrak{e}_2 d\mathfrak{w}$	$+\ \mathfrak{f}_2 = 0,$
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}(1^*)$:	$-\mathfrak{b}_1 d\mathfrak{x}$	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1 d\mathfrak{y}$	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1 d\mathfrak{z}$	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{d}_1 d\mathfrak{v}$	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{e}_1 d\mathfrak{w}$	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 = 0,$
(II):		$\mathfrak{B}_2 d\mathfrak{y}$	$+\ \mathfrak{C}_2 d\mathfrak{z}$	$+\ \mathfrak{D}_2 d\mathfrak{v}$	$+\ \mathfrak{E}_2 d\mathfrak{w}$	$+\ \mathfrak{F}_2 = 0.$
(3^*):	$\mathfrak{c}_1 d\mathfrak{x}$	$+\ \mathfrak{c}_2 d\mathfrak{y}$	$+\ \mathfrak{c}_3 d\mathfrak{z}$	$+\ \mathfrak{d}_3 d\mathfrak{v}$	$+\ \mathfrak{e}_3 d\mathfrak{w}$	$+\ \mathfrak{f}_3 = 0,$
$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}(1^*)$:	$-\mathfrak{c}_1 d\mathfrak{x}$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1 d\mathfrak{y}$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1 d\mathfrak{z}$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{d}_1 d\mathfrak{v}$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{e}_1 d\mathfrak{w}$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 = 0,$
$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}$ (II):		$-\ \mathfrak{C}_2 d\mathfrak{y}$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{C}_2 d\mathfrak{z}$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{D}_2 d\mathfrak{v}$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{E}_2 d\mathfrak{w}$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 = 0,$
(III):			$\mathfrak{C}_3 d\mathfrak{z}$	$+\ \mathfrak{D}_3 d\mathfrak{v}$	$+\ \mathfrak{E}_3 d\mathfrak{w}$	$+\ \mathfrak{F}_3 = 0.$
(4^*):	$\mathfrak{d}_1 d\mathfrak{x}$	$+\ \mathfrak{d}_2 d\mathfrak{y}$	$+\ \mathfrak{d}_3 d\mathfrak{z}$	$+\ \mathfrak{d}_4 d\mathfrak{v}$	$+\ \mathfrak{e}_4 d\mathfrak{w}$	$+\ \mathfrak{f}_4 = 0,$
$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}(1^*)$:	$-\mathfrak{d}_1 d\mathfrak{x}$	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1 d\mathfrak{y}$	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1 d\mathfrak{z}$	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{d}_1 d\mathfrak{v}$	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{e}_1 d\mathfrak{w}$	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 = 0,$
$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}$ (II):		$-\ \mathfrak{D}_2 d\mathfrak{y}$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{C}_2 d\mathfrak{z}$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{D}_2 d\mathfrak{v}$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{E}_2 d\mathfrak{w}$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 = 0,$
$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}$ (III):			$-\ \mathfrak{D}_3 d\mathfrak{z}$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{D}_3 d\mathfrak{v}$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{E}_3 d\mathfrak{w}$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3 = 0,$
(IV):				$\mathfrak{D}_4 d\mathfrak{v}$	$+\ \mathfrak{E}_4 d\mathfrak{w}$	$+\ \mathfrak{F}_4 = 0.$

$$
\begin{array}{rl|l}
(5^*): & \mathfrak{e}_1 d\mathfrak{x} + \mathfrak{e}_2 d\mathfrak{y} + \mathfrak{e}_3 d\mathfrak{z} + \mathfrak{e}_4 d\mathfrak{v} & + \mathfrak{e}_5 d\mathfrak{w} + \mathfrak{f}_5 = 0, \\
-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}(1^*): & -\mathfrak{e}_1 d\mathfrak{x} - \frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1 d\mathfrak{y} - \frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1 d\mathfrak{z} - \frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{d}_1 d\mathfrak{v} & - \frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{e}_1 d\mathfrak{w} - \frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 = 0, \\
-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}(\mathrm{II}): & - \mathfrak{E}_2 d\mathfrak{y} - \frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{C}_2 d\mathfrak{z} - \frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{D}_2 d\mathfrak{v} & - \frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{E}_2 d\mathfrak{w} - \frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 = 0, \\
-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}(\mathrm{III}): & - \mathfrak{E}_3 d\mathfrak{z} - \frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{D}_3 d\mathfrak{v} & - \frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{E}_3 d\mathfrak{w} - \frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3 = 0, \\
-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}(\mathrm{IV}): & - \mathfrak{E}_4 d\mathfrak{v} & - \frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{E}_4 d\mathfrak{w} - \frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4 = 0, \\
\hline
(\mathrm{V}): & & \mathfrak{E}_5 d\mathfrak{w} + \mathfrak{F}_5 = 0.
\end{array}
$$

b) Rechenschema für die Auflösung der

$[paa]$	$[pab]$	$[pac]$	$[pad]$	$[pae]$	$[paf]$	$[pbb]$	$[pbc]$	$[pbd]$	$[pbe]$	$[pbf]$
$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{e}_1$	$\mathfrak{f}_1$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{d}_2$	$\mathfrak{e}_2$	$\mathfrak{f}_2$
	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}$	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}$	$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}$	$-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}$	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1$	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1$	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{d}_1$	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{e}_1$	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$
					$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}d\mathfrak{w}$	$=\mathfrak{B}_2$	$=\mathfrak{C}_2$	$=\mathfrak{D}_2$	$=\mathfrak{E}_2$	$=\mathfrak{F}_2$
					$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}d\mathfrak{v}$		$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}$	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}$	$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$
					$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}d\mathfrak{z}$					$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}d\mathfrak{w}$
					$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}d\mathfrak{y}$					$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}d\mathfrak{v}$
										$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}d\mathfrak{z}$
					$=d\mathfrak{x}$					$=d\mathfrak{y}$

§ 28. Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe der Beobachtungsfehler, sowie der mittleren Fehler der Gewichtseinheit und der Beobachtungsergebnisse.*)

1. Die wahrscheinlichsten Werthe der Beobachtungsfehler $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$ erhalten wir nach den Fehlergleichungen

$$
(\mathbf{109}) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_1 = F_1\,(x, y, z, \ldots), \\ L_2 = F_2\,(x, y, z, \ldots), \\ L_3 = F_3\,(x, y, z, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L_n = F_n\,(x, y, z, \ldots), \end{array} \right. \qquad (\mathbf{110}) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = L_1 - \lambda_1, \\ v_2 = L_2 - \lambda_2, \\ v_3 = L_3 - \lambda_3, \\ \ldots\ldots, \\ v_n = L_n - \lambda_n, \end{array} \right.
$$

indem wir zuerst mit den nach den Formeln (**111**) erlangten wahrscheinlichsten Werthen $x, y, z, \ldots$ der zu bestimmenden Gröfsen die wahrscheinlichsten Werthe $L_1, L_2, L_3, \ldots L_n$ der beobachteten Gröfsen nach den Formeln (**109**) berechnen und dann nach den Formeln (**110**) die Unterschiede zwischen diesen Werthen und den Beobachtungsergebnissen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ bilden.

*) Die mittleren Fehler und Gewichte der wahrscheinlichsten Werthe der zu bestimmenden Gröfsen und der Funktionen von solchen werden im VII. Abschnitt behandelt.

Aus (V): $$d\mathfrak{w} = -\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5},$$

aus (IV): $$d\mathfrak{v} = -\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}d\mathfrak{w} - \frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4},$$

aus (III): $$d\mathfrak{z} = -\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}d\mathfrak{v} - \frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}d\mathfrak{w} - \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3},$$

aus (II): $$d\mathfrak{y} = -\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}d\mathfrak{z} - \frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}d\mathfrak{v} - \frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}d\mathfrak{w} - \frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2},$$

aus (1*): $$d\mathfrak{x} = -\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}d\mathfrak{y} - \frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}d\mathfrak{z} - \frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}d\mathfrak{v} - \frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}d\mathfrak{w} - \frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}.$$

Endgleichungen mit 5 Unbekannten.

$[pcc]$	$[pcd]$	$[pce]$	$[pcf]$	$[pdd]$	$[pde]$	$[pdf]$	$[pee]$	$[pef]$
$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{d}_3$	$\mathfrak{e}_3$	$\mathfrak{f}_3$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{e}_4$	$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{e}_5$	$\mathfrak{f}_5$
$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{d}_1$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{e}_1$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{d}_1$	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{e}_1$	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{e}_1$	$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$
$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{C}_2$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{D}_2$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{E}_2$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{D}_2$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{E}_2$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{E}_2$	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$
$=\mathfrak{C}_3$	$=\mathfrak{D}_3$	$=\mathfrak{E}_3$	$=\mathfrak{F}_3$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{D}_3$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{E}_3$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{E}_3$	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$
	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}$	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}$	$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}$	$=\mathfrak{D}_4$	$=\mathfrak{E}_4$	$=\mathfrak{F}_4$	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{E}_4$	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$
			$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}d\mathfrak{w}$		$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}$	$-\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}$	$=\mathfrak{E}_5$	$=\mathfrak{F}_5$
			$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}d\mathfrak{v}$			$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}d\mathfrak{w}$		
			$=d\mathfrak{z}$			$=d\mathfrak{v}$	$d\mathfrak{w}=$	$-\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}$

Beispiel 1: Unsere im § 23 gewonnenen Fehlergleichungen sind:

$$(109)\quad \begin{cases} S_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}, \\ S_2 = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}, \\ S_3 = \sqrt{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}, \\ S_4 = \sqrt{(x-x_4)^2 + (y-y_4)^2}, \\ S_5 = \sqrt{(x-x_5)^2 + (y-y_5)^2}, \end{cases} \qquad (110)\quad \begin{cases} v_1 = S_1 - s_1, \\ v_2 = S_2 - s_2, \\ v_3 = S_3 - s_3, \\ v_4 = S_4 - s_4, \\ v_5 = S_5 - s_5. \end{cases}$$

Hiernach erhalten wir zuerst mit den im § 27 erlangten wahrscheinlichsten Werthen $x = 6\,323{,}91$, $y = 2\,306{,}24$ der Koordinaten des Punktes P die wahrscheinlichsten Werthe S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 der Streckenlängen: (Siehe Seite 104.)

Mit diesen wahrscheinlichsten Werthen der Streckenlängen ergeben sich die wahrscheinlichsten Werthe der Beobachtungsfehler zu:

$$(110)\quad \begin{cases} v_1 = S_1 - s_1 = 331{,}67 - 331{,}60 = +0{,}07, \\ v_2 = S_2 - s_2 = 271{,}76 - 272{,}00 = -0{,}24, \\ v_3 = S_3 - s_3 = 247{,}18 - 247{,}10 = +0{,}08, \\ v_4 = S_4 - s_4 = 269{,}32 - 269{,}50 = -0{,}18, \\ v_5 = S_5 - s_5 = \underline{416{,}52} - \underline{416{,}70} = \underline{-0{,}18}, \end{cases}$$

$$6{,}45 - \quad 6{,}90 = -0{,}45.$$

	x. x_n. $\Delta x = x - x_n$.	y. y_n. $\Delta y = y - y_n$.	$\Delta x\,\Delta x$. $\Delta y\,\Delta y$. $S^2 = \Delta x\,\Delta x + \Delta y\,\Delta y$.	S.
P_1	6 323,91 6 548,30 224,39	2 306,24 2 061,99 244,25	5 03 50 5 96 58 11 00 08	331,67
P_2	6 323,91 6 570,58 246,67	2 306,24 2 420,30 114,06	6 08 46 1 30 10 7 38 56	271,76
P_3	6 323,91 6 297,72 26,19	2 306,24 2 552,03 245,79	6 86 6 04 13 6 10 99	247,18
P_4	6 323,91 6 056,29 267,62	2 306,24 2 276,00 30,24	7 16 21 9 14 7 25 35	269,32
P_5	6 323,91 6 246,43 77,48	2 306,24 1 896,99 409,25	60 03 16 74 85 17 34 88	416,52

2. Ferner erhalten wir die wahrscheinlichsten Werthe der Beobachtungsfehler auch mit den durch Auflösung der Endgleichungen erhaltenen Werthen von $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... nach den umgeformten Fehlergleichungen:

$$(116)\quad \begin{cases} dl_1 = a_1\,d\mathfrak{x} + b_1\,d\mathfrak{y} + c_1\,d\mathfrak{z} + \cdots, \\ dl_2 = a_2\,d\mathfrak{x} + b_2\,d\mathfrak{y} + c_2\,d\mathfrak{z} + \cdots, \\ dl_3 = a_3\,d\mathfrak{x} + b_3\,d\mathfrak{y} + c_3\,d\mathfrak{z} + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ dl_n = a_n\,d\mathfrak{x} + b_n\,d\mathfrak{y} + c_n\,d\mathfrak{z} + \cdots. \end{cases} \qquad (117)\quad \begin{cases} v_1 = f_1 + dl_1, \\ v_2 = f_2 + dl_2, \\ v_3 = f_3 + dl_3, \\ \cdots\cdots, \\ v_n = f_n + dl_n, \end{cases}$$

indem wir zuerst mit den Aenderungen $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... der Näherungswerthe der zu bestimmenden Gröfsen nach den Formeln (**116**) die ihnen entsprechenden Aenderungen dl_1, dl_2, dl_3, ... dl_n der Näherungswerthe der beobachteten Gröfsen berechnen und diese zu den nach den Formeln (**115**) erhaltenen Abweichungen zwischen den Näherungswerthen der beobachteten Gröfsen und den Beobachtungsergebnissen addiren.

Beispiel 1: Unsere im § 12 gewonnenen umgeformten Fehlergleichungen sind:

$$(116)\quad \begin{cases} d\mathfrak{S}_1 = -\,0{,}677\,d\mathfrak{x} + 0{,}735\,d\mathfrak{y}, \\ d\mathfrak{S}_2 = -\,0{,}908\,d\mathfrak{x} - 0{,}420\,d\mathfrak{y}, \\ d\mathfrak{S}_3 = +\,0{,}105\,d\mathfrak{x} - 0{,}996\,d\mathfrak{y}, \\ d\mathfrak{S}_4 = +\,0{,}994\,d\mathfrak{x} + 0{,}111\,d\mathfrak{y}, \\ d\mathfrak{S}_5 = \underline{+\,0{,}186}\,d\mathfrak{x} \underline{+\,0{,}983}\,d\mathfrak{y}, \\ \quad\;\; -\,0{,}300 \qquad +\,0{,}413 \end{cases} \qquad (117)\quad \begin{cases} v_1 = +\,0{,}04 + d\mathfrak{S}_1, \\ v_2 = +\,0{,}06 + d\mathfrak{S}_2, \\ v_3 = +\,0{,}30 + d\mathfrak{S}_3, \\ v_4 = -\,0{,}41 + d\mathfrak{S}_4, \\ v_5 = \underline{-\,0{,}45} + d\mathfrak{S}_5. \\ \quad\;\; -\,0{,}46 \end{cases}$$

Hiernach erhalten wir mit den durch die Auflösung der Endgleichungen gewonnenen Aenderungen $d\mathfrak{x} = +\,0{,}21$, $d\mathfrak{y} = +\,0{,}24$ der genäherten Koordinaten die ihnen entsprechenden Aenderungen $d\mathfrak{S}_1$, $d\mathfrak{S}_2$, $d\mathfrak{S}_3$, $d\mathfrak{S}_4$, $d\mathfrak{S}_5$ der genäherten Streckenlängen und damit die wahrscheinlichsten Werthe v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 der Beobachtungsfehler:

$a d\mathfrak{x}$	+ $b d\mathfrak{y}$	= $d\mathfrak{s}$.
− 0,142	+ 0,176	+ 0,034
− 0,191	− 0,101	− 0,292
+ 0,022	− 0,239	− 0,217
+ 0,209	+ 0,027	+ 0,236
+ 0,039	+ 0,236	+ 0,275
− 0,063	+ 0,099	+ 0,036

f	+ $d\mathfrak{s}$	= v.
+ 0,040	+ 0,034	+ 0,074
+ 0,060	− 0,292	− 0,232
+ 0,300	− 0,217	+ 0,083
− 0,410	+ 0,236	− 0,174
− 0,450	+ 0,275	− 0,175
− 0,460	+ 0,036	− 0,424

Die richtige Bildung der Zahlenwerthe ist durch die Summenprobe gesichert. Die unter No. **1** für v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 erhaltenen Werthe stimmen mit den hier erhaltenen bis auf die durch die unvermeidlichen Rechnungsungenauigkeiten bedingten Abweichungen in der letzten Dezimalstelle überein.

3. Mit den nach den Formeln (**109**) und (**110**) oder (**116**) und (**117**) erhaltenen Werthen $v_1, v_2, v_3 \ldots. v_n$ und den Gewichten $p_1, p_2, p_3 \ldots. p_n$ der Beobachtungsergebnisse erhalten wir ferner die Quadratsumme $[pvv]$ der auf die Gewichtseinheit zurückgeführten wahrscheinlichsten Werthe der Beobachtungsfehler und damit den mittleren Fehler $\mathfrak{m}$ der Gewichtseinheit nach der Grundformel (**47**):

$$(125) \qquad \mathfrak{m} = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-q}},$$

worin n die Anzahl der vorliegenden Beobachtungsergebnisse, q die Anzahl der zu bestimmenden Gröfsen, $n-q$ also die Anzahl der überschüssigen Bestimmungen bezeichnet.

Endlich ergeben sich die mittleren Fehler m_1, m_2, m_3, ... m_n der Beobachtungsergebnisse λ_1, λ_2, λ_3, ... λ_n nach Formel (**35**) zu:

$$(126) \quad m_1 = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_1}}, \quad m_2 = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_2}}, \quad m_3 = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_3}}, \cdots m_n = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_n}}.$$

Beispiel 1: Die Quadratsumme $[pvv]$ der auf die Gewichtseinheit zurückgeführten wahrscheinlichsten Werthe der Beobachtungsfehler ergiebt sich wie folgt:

	$\sqrt{p}$.	v.*)	$v\sqrt{p}$.	pvv.
P_1	2,33	+ 0,074	+ 0,172	0,030
P_2	2,63	− 0,236	− 0,621	0,386
P_3	2,27	+ 0,079	+ 0,179	0,032
P_4	2,63	− 0,170	− 0,447	0,200
P_5	1,61	− 0,170	− 0,274	0,075
			$[pvv]$	0,723

Hiermit wird der mittlere Fehler $\mathfrak{m}$ der Gewichtseinheit oder einer unter mittleren Verhältnissen gemessenen Strecke von 822 m Länge:**)

$$(125) \quad \mathfrak{m} = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-q}} = \pm\sqrt{\frac{0{,}723}{5-2}} = \pm 0{,}49^{\text{m}},$$

woraus sich der mittlere Fehler $\mathfrak{m}_{100}$ einer unter mittleren Verhältnissen gemessenen Strecke von 100 m Länge, deren Gewicht $\mathfrak{p}_{100} = 14{,}8$ ist,**) ergiebt zu:

$$(39) \qquad \mathfrak{m}_{100} = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{\mathfrak{p}_{100}}} = \pm 0{,}49\sqrt{\frac{1}{14{,}8}} = \pm 0{,}13^{\text{m}},$$

während sich die mittleren Fehler m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 der Streckenlängen s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 ergeben zu:

$$(126) \quad m_1 = \pm\frac{0{,}49}{2{,}33} = \pm 0{,}21^{\text{m}}, \quad m_2 = \pm\frac{0{,}49}{2{,}63} = \pm 0{,}19^{\text{m}}, \quad m_3 = \pm\frac{0{,}49}{2{,}27} = \pm 0{,}22^{\text{m}},$$

$$m_4 = \pm\frac{0{,}49}{2{,}63} = \pm 0{,}19^{\text{m}}, \quad m_5 = \pm\frac{0{,}49}{1{,}61} = \pm 0{,}30^{\text{m}}.$$

*) Die hier eingeführten Zahlenwerthe von v sind mit $d\mathfrak{x} = +0{,}314$, $d\mathfrak{y} = +0{,}244$ genau berechnet, damit die folgenden Proben möglichst scharf stimmen.

**) Vergl. § 22, Seite 87.

§ 29. Rechenproben.

1. Zur Vermeidung von Rechenfehlern, die bei der praktischen Durchführung der Rechnungen nach den in den §§ 23 bis 28 entwickelten Formeln leicht unterlaufen, ist es nothwendig, die Richtigkeit der Rechnungen Schritt für Schritt durch Ziehung von Rechenproben sicherzustellen so weit dies ohne einen unverhältnismäfsig grofsen Arbeitsaufwand thunlich ist. Die Teile der Rechnungen, wofür keine genügend einfachen Proben zu beschaffen sind, müssen doppelt ausgeführt werden.

Im folgenden werden die Rechenproben in der Reihenfolge besprochen, in der sie zur Anwendung kommen.

2. Für die Näherungswerthe $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ... der zu bestimmenden Gröfsen ist eine Probe nur insofern erforderlich, als festgestellt wird, dafs die ihnen nach den Formeln (**111**) beizufügenden Werthe $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... verhältnismäfsig kleine Gröfsen sein werden. Das wird in der Regel der Fall sein, wenn die sich nach den Formeln (**115**) ergebenden Abweichungen f_1, f_2, f_3, ... f_n zwischen den genäherten Werthen $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_3$, ... $\mathfrak{l}_n$ der beobachteten Gröfsen und den Beobachtungsergebnissen λ_1, λ_2, λ_3, ... λ_n verhältnismäfsig kleine Gröfsen sind, oder wenn diese Abweichungen etwa nicht über den 3fachen Betrag des für die Beobachtungsergebnisse höchstens zulässigen Fehlers hinausgehen.

Kommen erheblich gröfsere Abweichungen vor, so kann dies herrühren, erstens von gröberen Unrichtigkeiten in der Ermittlung der Näherungswerthe $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ..., zweitens von groben Fehlern in den bei Ermittlung der Näherungswerthe benutzten Beobachtungsergebnissen, drittens von groben Fehlern in den übrigen Beobachtungsergebnissen oder viertens von Rechenfehlern, die bei Berechnung der Abweichungen f_1, f_2, f_3, ... f_n, oder der hierbei zu benutzenden Näherungswerthe $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_3$, ... $\mathfrak{l}_n$ der beobachteten Gröfsen untergelaufen sind. Welcher dieser vier Fälle vorliegt, läfst sich in der Regel nach den Zahlenwerthen der Abweichungen f_1, f_2, f_3, ... f_n feststellen. Denn die gröfseren Zahlenwerthe der Abweichungen treten auf im ersten Falle sowohl bei den zur Ermittlung der Näherungswerthe $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ... benutzten Beobachtungsergebnissen, als auch bei den übrigen Beobachtungsergebnissen, im zweiten Falle nur bei den letzteren, im dritten Falle nur bei demjenigen, nicht bei Ermittlung der Näherungswerthe $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ... benutzten Beobachtungsergebnis, welches mit dem groben Fehler behaftet ist, und im vierten Falle nur bei demjenigen Beobachtungsergebnis, wofür die Abweichung f, oder der Näherungswerth $\mathfrak{l}$ unrichtig berechnet ist.

Beispiel 1: In unserm Beispiele haben wir im § 25 nach den Formeln (**115**) die Abweichungen zwischen den Näherungswerthen der beobachteten Gröfsen und den Beobachtungsergebnissen gefunden zu $f_1 = +0{,}04$, $f_2 = +0{,}06$, $f_3 = +0{,}30$, $f_4 = -0{,}41$, $f_5 = -0{,}45$. Die für die Beobachtungsergebnisse höchstens zulässigen Fehler betragen etwa $0{,}4^m$ bis $0{,}6^m$, es geht also keine der Abweichungen f über den 3fachen Betrag der höchstens zulässigen Fehler hinaus, woraus wir entnehmen, dafs die Näherungswerthe $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{y}$ der Koordinaten genügend sind und dafs weder in den Messungen noch in den Rechnungen ein gröberer Fehler steckt.

Wäre ein Fehler gemacht worden

1. bei Ermittlung der Näherungswerthe $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{y}$ der Koordinaten, so dafs beispielsweise unrichtig $\mathfrak{x} = 6\,313{,}70$ statt $6\,323{,}70$ erhalten wäre, oder
2. bei Messung der zur Berechnung von $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{y}$ benutzten Streckenlängen, so dafs beispielsweise unrichtig $s_1 = 321{,}6$ statt $331{,}6$ erhalten wäre, oder

3. bei Messung der nicht zur Berechnung von $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{y}$ benutzten Streckenlängen, so dafs beispielsweise unrichtig $s_3 = 267{,}10$ statt 247,10 erhalten wäre, oder
4. bei Berechnung der Näherungswerthe $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots . \mathfrak{s}_5$ der Streckenlängen, so dafs beispielsweise unrichtig $\mathfrak{s}_1 = 338{,}49$ statt 331,64 erhalten wäre,

so würden sich die folgenden Zahlenwerthe für die Abweichungen $f_1, f_2, \ldots . f_5$ zwischen den Näherungswerthen $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots . \mathfrak{s}_5$, und den Messungsergebnissen $s_1, s_2, \ldots . s_5$ ergeben haben:

	im 1. Falle	im 2. Falle	im 3. Falle	im 4. Falle
$f_1 = \mathfrak{s}_1 - s_1 =$	+ 6,89	+ 0,02	+ 0,04	+ 6,89
$f_2 = \mathfrak{s}_2 - s_2 =$	+ 9,16	+ 0,03	+ 0,06	+ 0,06
$f_3 = \mathfrak{s}_3 - s_3 =$	— 0,55	+ 10,15	— 19,70	+ 0,30
$f_4 = \mathfrak{s}_4 - s_4 =$	— 10,35	+ 3,29	— 0,41	— 0,41
$f_5 = \mathfrak{s}_5 - s_5 =$	— 2,20	— 8,79	— 0,45	— 0,45

Aus diesen Zahlenwerthen hätte dann in jedem Falle, wie leicht zu erkennen ist, auf die Quelle der zu grofsen Abweichungen geschlossen werden können.

3. Für die Richtigkeit der nach den Formeln (**112**) zu berechnenden Näherungswerthe $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \ldots . \mathrm{I}_n$ der beobachteten Gröfsen wird nach Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe $x, y, z, \ldots .$ der zu bestimmenden Gröfsen eine durchgreifende Probe gewonnen, indem die wahrscheinlichsten Werthe $L_1, L_2, L_3, \ldots . L_n$ der beobachteten Gröfsen einmal nach den Formeln (**109**) und zum zweitenmal nach den Formeln (**113**) berechnet werden. Diese Probe kann aber erst am Schlufs der Rechnung gezogen werden, so dafs ein Fehler in der Berechnung der Näherungswerthe $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \ldots . \mathrm{I}_n$ durch diese Probe erst entdeckt wird, nachdem durch den Fehler ein grofser Teil der folgenden Rechnungen unrichtig geworden ist. Es empfiehlt sich daher, namentlich bei umfangreicheren und schwierigeren Rechnungen eine Probe einzuführen, die die richtige Berechnung der Näherungswerthe $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \ldots . \mathrm{I}_n$ sogleich sicherstellt. Wie diese Probe zu gewinnen ist, mufs in jedem einzelnen Falle besonders festgestellt werden.

Beispiel 1: In unserm Beispiele ist keine Probe für die Richtigkeit der Näherungswerthe $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{s}_3, \mathfrak{s}_4, \mathfrak{s}_5$ eingeführt, weil keine durchgreifende einfache Probe gewonnen werden konnte, und der Arbeitsaufwand für eine weitläufigere Probe bei der Einfachheit der ganzen folgenden Rechnung nicht in richtigem Verhältnis zu dem Nutzen gestanden hätte.

Es kann jedoch eine durchgreifende Probe gewonnen werden, indem die Richtigkeit der Bildung der Koordinatenunterschiede $\mathfrak{x} - x$, $\mathfrak{y} - y$ durch die Summenprobe sichergestellt wird, und indem die Näherungswerthe $\mathfrak{s}$ der Streckenlängen aufser nach der Formel: $\mathfrak{s} = \sqrt{(\mathfrak{x} - x)^2 + (\mathfrak{y} - y)^2}$ noch einmal logarithmisch nach den Formeln:

$$tg\,\mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{x} - x}{\mathfrak{y} - y}, \qquad \mathfrak{s} = \frac{\mathfrak{y} - y}{\cos \mathfrak{n}}, \text{ oder:}$$

$$tg\,\mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{y} - y}{\mathfrak{x} - x}, \qquad \mathfrak{s} = \frac{\mathfrak{x} - x}{\cos \mathfrak{n}}$$

berechnet werden, wobei die einen oder andern Formeln benutzt werden, je nachdem $\mathfrak{y} - y$ oder $\mathfrak{x} - x$ den gröfsern Zahlenwerth hat.

Die Rechnung hiernach ist:

(124)

[paa]		[pab]		[pac]		....	[paf]		[pbb]	
$\mathfrak{a}_1$	—	$\mathfrak{b}_1$	—	$\mathfrak{c}_1$	—	....	$\mathfrak{f}_1$	—	$\mathfrak{b}_2$	—
	—	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}$	—	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}$	—	....	$-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}$	—	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1$	—
							....	....	$=\mathfrak{B}_2$	—
							$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\delta z$	—		
							$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\delta y$	—		
							$=d\mathfrak{x}$	—		

Beispiel 1: Die Auflösung der im § 26 erhaltenen Endgleichungen gestaltet sich nach Nr. 4 wie folgt:

$$(1^*):\quad \mathfrak{a}_1 d\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_1 d\mathfrak{y} + \mathfrak{f}_1 = +15{,}17\, d\mathfrak{x} + 0{,}62\, d\mathfrak{y} - 3{,}40 = 0,$$

$$(2^*):\quad \mathfrak{b}_1 d\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_2 d\mathfrak{y} + \mathfrak{f}_2 = +\ 0{,}62\, d\mathfrak{x} + 11{,}82\, d\mathfrak{y} - 3{,}02 = 0,$$

$$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}(1^*) = -0{,}041\,(1^*):\ -\mathfrak{b}_1 d\mathfrak{x} - \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1\, d\mathfrak{y} - \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 = -\ 0{,}62\, d\mathfrak{x} - 0{,}03\, d\mathfrak{y} + 0{,}14 = 0,$$

$$(II):\quad \mathfrak{B}_2 d\mathfrak{y} + \mathfrak{F}_2 = \quad +11{,}79\, d\mathfrak{y} - 2{,}88 = 0.$$

Demnach sind die reduzirten Endgleichungen:

$$(122)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_1 d\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_1 d\mathfrak{y} + \mathfrak{f}_1 = +15{,}17\, d\mathfrak{x} + 0{,}62\, d\mathfrak{y} - 3{,}40 = 0, \\ \mathfrak{B}_2 d\mathfrak{y} + \mathfrak{F}_2 = \quad +11{,}79\, d\mathfrak{y} - 2{,}88 = 0. \end{cases}$$

Hieraus ergeben sich die Unbekannten $d\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{y}$ wie folgt:

$$(123)\quad \begin{cases} d\mathfrak{y} = -\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2} = +0{,}244, \\ d\mathfrak{x} = -\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1} d\mathfrak{y} - \frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1} = -0{,}010 + 0{,}224 = +0{,}214. \end{cases}$$

Nach dem Schema (**124**) ist die Auflösung:

$\mathfrak{a}_1$	+	15,17	$\mathfrak{b}_1$	+	0,62	$\mathfrak{f}_1$	−	3,40	$\mathfrak{b}_2$	+	11,82	$\mathfrak{f}_2$	−	3,02
			$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}$	−	0,041	$-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}$	+	0,224	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1$	−	0,03	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	+	0,14
						$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}d\mathfrak{y}$	−	0,010	$=\mathfrak{B}_2$	+	11,79	$=\mathfrak{F}_2$	−	2,88
						$=d\mathfrak{x}$	+	0,214				$d\mathfrak{y} = -\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$	+	0,244

2. Aus den durch Auflösung der Endgleichungen gewonnenen Werthen von $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... und den Näherungswerthen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ..., erhalten wir nunmehr die wahrscheinlichsten Werthe der zu bestimmenden Gröfsen nach:

$$(111)\quad \begin{cases} x = \mathfrak{x} + d\mathfrak{x}, \\ y = \mathfrak{y} + d\mathfrak{y}, \\ z = \mathfrak{z} + d\mathfrak{z}, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Beispiel 1: In unserm Beispiele erhalten wir die wahrscheinlichsten Werthe der zu bestimmenden Koordinaten x y des Punktes P zu:

$[pbc]$	....	$[pbf]$	$[pcc]$	....	$[pcf]$	....
$\mathfrak{c}_2$	....	$\mathfrak{f}_2$	$\mathfrak{c}_3$	....	$\mathfrak{f}_3$	....
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1$	....	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1$	....	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	....
$=\mathfrak{C}_2$	....	$=\mathfrak{F}_2$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{C}_2$	....	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	....
$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}$	....	$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$	$=\mathfrak{C}_3$	....	$=\mathfrak{F}_3$	....
		....		....	$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}$	....
		$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}dz$			....	....
		$=d\mathfrak{y}$			$=d\mathfrak{z}$	....

$$
\text{(111)} \quad \begin{cases} x = \mathfrak{x} + d\mathfrak{x} = 6\,323{,}70 + 0{,}21 = 6\,323{,}91, \\ y = \mathfrak{y} + d\mathfrak{y} = 2\,306{,}00 + 0{,}24 = 2\,306{,}24. \end{cases}
$$

3. Um die Entwicklung des Rechenschemas für die Auflösung der Endgleichungen für eine gröfsere Zahl von Unbekannten weiter zu erläutern, führen wir noch die Auflösung von 5 Endgleichungen mit 5 Unbekannten:

$$
\begin{aligned}
&(1^*): \quad \mathfrak{a}_1\,d\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_1\,d\mathfrak{y} + \mathfrak{c}_1\,d\mathfrak{z} + \mathfrak{d}_1\,d\mathfrak{v} + \mathfrak{e}_1\,d\mathfrak{w} + \mathfrak{f}_1 = 0,\\
&(2^*): \quad \mathfrak{b}_1\,d\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_2\,d\mathfrak{y} + \mathfrak{c}_2\,d\mathfrak{z} + \mathfrak{d}_2\,d\mathfrak{v} + \mathfrak{e}_2\,d\mathfrak{w} + \mathfrak{f}_2 = 0,\\
&(3^*): \quad \mathfrak{c}_1\,d\mathfrak{x} + \mathfrak{c}_2\,d\mathfrak{y} + \mathfrak{c}_3\,d\mathfrak{z} + \mathfrak{d}_3\,d\mathfrak{v} + \mathfrak{e}_3\,d\mathfrak{w} + \mathfrak{f}_3 = 0,\\
&(4^*): \quad \mathfrak{d}_1\,d\mathfrak{x} + \mathfrak{d}_2\,d\mathfrak{y} + \mathfrak{d}_3\,d\mathfrak{z} + \mathfrak{d}_4\,d\mathfrak{v} + \mathfrak{e}_4\,d\mathfrak{w} + \mathfrak{f}_4 = 0,\\
&(5^*): \quad \mathfrak{e}_1\,d\mathfrak{x} + \mathfrak{e}_2\,d\mathfrak{y} + \mathfrak{e}_3\,d\mathfrak{z} + \mathfrak{e}_4\,d\mathfrak{v} + \mathfrak{e}_5\,d\mathfrak{w} + \mathfrak{f}_5 = 0
\end{aligned}
$$

nach den unter Nr. **1** entwickelten Regeln durch und fügen das sich danach ergebende Rechenschema mit Weglassung der Spalten für die Eintragung der Zahlen bei:

a) Auflösung der Endgleichungen mit 5 Unbekannten.

	(1^*):	$\mathfrak{a}_1\,d\mathfrak{x}$	$+\ \mathfrak{b}_1\,d\mathfrak{y}$	$+\ \mathfrak{c}_1\,d\mathfrak{z}$	$+\ \mathfrak{d}_1\,d\mathfrak{v}$	$+\ \mathfrak{e}_1\,d\mathfrak{w}$	$+\ \mathfrak{f}_1 = 0,$
	(2^*):	$\mathfrak{b}_1\,d\mathfrak{x}$	$+\ \mathfrak{b}_2\,d\mathfrak{y}$	$+\ \mathfrak{c}_2\,d\mathfrak{z}$	$+\ \mathfrak{d}_2\,d\mathfrak{v}$	$+\ \mathfrak{e}_2\,d\mathfrak{w}$	$+\ \mathfrak{f}_2 = 0,$
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}$	(1^*):	$-\mathfrak{b}_1\,d\mathfrak{x}$	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1\,d\mathfrak{y}$	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1\,d\mathfrak{z}$	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{d}_1\,d\mathfrak{v}$	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{e}_1\,d\mathfrak{w}$	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 = 0,$
	(II):		$\mathfrak{B}_2\,d\mathfrak{y}$	$+\ \mathfrak{C}_2\,d\mathfrak{z}$	$+\ \mathfrak{D}_2\,d\mathfrak{v}$	$+\ \mathfrak{E}_2\,d\mathfrak{w}$	$+\ \mathfrak{F}_2 = 0.$
	(3^*):	$\mathfrak{c}_1\,d\mathfrak{x}$	$+\ \mathfrak{c}_2\,d\mathfrak{y}$	$+\ \mathfrak{c}_3\,d\mathfrak{z}$	$+\ \mathfrak{d}_3\,d\mathfrak{v}$	$+\ \mathfrak{e}_3\,d\mathfrak{w}$	$+\ \mathfrak{f}_3 = 0,$
$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}$	(1^*):	$-\mathfrak{c}_1\,d\mathfrak{x}$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1\,d\mathfrak{y}$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1\,d\mathfrak{z}$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{d}_1\,d\mathfrak{v}$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{e}_1\,d\mathfrak{w}$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 = 0,$
$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}$	(II):		$-\ \mathfrak{C}_2\,d\mathfrak{y}$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{C}_2\,d\mathfrak{z}$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{D}_2\,d\mathfrak{v}$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{E}_2\,d\mathfrak{w}$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 = 0,$
	(III):			$\mathfrak{C}_3\,d\mathfrak{z}$	$+\ \mathfrak{D}_3\,d\mathfrak{v}$	$+\ \mathfrak{E}_3\,d\mathfrak{w}$	$+\ \mathfrak{F}_3 = 0.$
	(4^*):	$\mathfrak{d}_1\,d\mathfrak{x}$	$+\ \mathfrak{d}_2\,d\mathfrak{y}$	$+\ \mathfrak{d}_3\,d\mathfrak{z}$	$+\ \mathfrak{d}_4\,d\mathfrak{v}$	$+\ \mathfrak{e}_4\,d\mathfrak{w}$	$+\ \mathfrak{f}_4 = 0,$
$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}$	(1^*):	$-\mathfrak{d}_1\,d\mathfrak{x}$	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1\,d\mathfrak{y}$	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1\,d\mathfrak{z}$	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{d}_1\,d\mathfrak{v}$	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{e}_1\,d\mathfrak{w}$	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 = 0,$
$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}$	(II):		$-\ \mathfrak{D}_2\,d\mathfrak{y}$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{C}_2\,d\mathfrak{z}$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{D}_2\,d\mathfrak{v}$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{E}_2\,d\mathfrak{w}$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 = 0,$
$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}$	(III):			$-\ \mathfrak{D}_3\,d\mathfrak{z}$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{D}_3\,d\mathfrak{v}$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{E}_3\,d\mathfrak{w}$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3 = 0,$
	(IV):				$\mathfrak{D}_4\,d\mathfrak{v}$	$+\ \mathfrak{E}_4\,d\mathfrak{w}$	$+\ \mathfrak{F}_4 = 0.$

$$
\begin{array}{rrl}
(5^*): & & \mathfrak{e}_1\, d\mathfrak{x} + \mathfrak{e}_2\, d\mathfrak{y} + \mathfrak{e}_3\, d\mathfrak{z} + \mathfrak{e}_4\, d\mathfrak{v} \;\Big|\; + \mathfrak{e}_5\, d\mathfrak{w} + \mathfrak{f}_5 = 0, \\
-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1} & (1^*): & -\mathfrak{e}_1\, d\mathfrak{x} - \frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1\, d\mathfrak{y} - \frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1\, d\mathfrak{z} - \frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{d}_1\, d\mathfrak{v} \;\Big|\; - \frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{e}_1\, d\mathfrak{w} - \frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 = 0, \\
-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2} & (\mathrm{II}): & -\mathfrak{E}_2\, d\mathfrak{y} - \frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{C}_2\, d\mathfrak{z} - \frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{D}_2\, d\mathfrak{v} \;\Big|\; - \frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{E}_2\, d\mathfrak{w} - \frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 = 0, \\
-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3} & (\mathrm{III}): & -\mathfrak{E}_3\, d\mathfrak{z} - \frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{D}_3\, d\mathfrak{v} \;\Big|\; - \frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{E}_3\, d\mathfrak{w} - \frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3 = 0, \\
-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4} & (\mathrm{IV}): & -\mathfrak{E}_4\, d\mathfrak{v} \;\Big|\; - \frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{E}_4\, d\mathfrak{w} - \frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4 = 0, \\
\hline
 & (\mathrm{V}): & \mathfrak{E}_5\, d\mathfrak{w} + \mathfrak{F}_5 = 0.
\end{array}
$$

b) Rechenschema für die Auflösung der

$[paa]$	$[pab]$	$[pac]$	$[pad]$	$[pae]$	$[paf]$	$[pbb]$	$[pbc]$	$[pbd]$	$[pbe]$	$[pbf]$
$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{e}_1$	$\mathfrak{f}_1$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{d}_2$	$\mathfrak{e}_2$	$\mathfrak{f}_2$
	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}$	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}$	$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}$	$-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}$	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1$	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1$	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{d}_1$	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{e}_1$	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$
					$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}d\mathfrak{w}$	$=\mathfrak{B}_2$	$=\mathfrak{C}_2$	$=\mathfrak{D}_2$	$=\mathfrak{E}_2$	$=\mathfrak{F}_2$
					$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}d\mathfrak{v}$		$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}$	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}$	$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$
					$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}d\mathfrak{z}$					$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}d\mathfrak{w}$
					$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}d\mathfrak{y}$					$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}d\mathfrak{v}$
										$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}d\mathfrak{z}$
					$=d\mathfrak{x}$					$=d\mathfrak{y}$

§ 28. Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe der Beobachtungsfehler, sowie der mittleren Fehler der Gewichtseinheit und der Beobachtungsergebnisse.*)

1. Die wahrscheinlichsten Werthe der Beobachtungsfehler $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$ erhalten wir nach den Fehlergleichungen

$$
(109)\quad \left\{\begin{array}{l}
L_1 = F_1\,(x, y, z, \ldots), \\
L_2 = F_2\,(x, y, z, \ldots), \\
L_3 = F_3\,(x, y, z, \ldots), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
L_n = F_n\,(x, y, z, \ldots),
\end{array}\right.
\qquad
(110)\quad \left\{\begin{array}{l}
v_1 = L_1 - \lambda_1, \\
v_2 = L_2 - \lambda_2, \\
v_3 = L_3 - \lambda_3, \\
\ldots\ldots\ldots, \\
v_n = L_n - \lambda_n,
\end{array}\right.
$$

indem wir zuerst mit den nach den Formeln (**111**) erlangten wahrscheinlichsten Werthen $x, y, z, \ldots$ der zu bestimmenden Gröfsen die wahrscheinlichsten Werthe $L_1, L_2, L_3, \ldots L_n$ der beobachteten Gröfsen nach den Formeln (**109**) berechnen und dann nach den Formeln (**110**) die Unterschiede zwischen diesen Werthen und den Beobachtungsergebnissen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ bilden.

*) Die mittleren Fehler und Gewichte der wahrscheinlichsten Werthe der zu bestimmenden Gröfsen und der Funktionen von solchen werden im VII. Abschnitt behandelt.

Aus (V): $$d\mathfrak{w} = -\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5},$$

aus (IV): $$d\mathfrak{v} = -\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4} d\mathfrak{w} - \frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4},$$

aus (III): $$d\mathfrak{z} = -\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3} d\mathfrak{v} - \frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3} d\mathfrak{w} - \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3},$$

aus (II): $$d\mathfrak{y} = -\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2} d\mathfrak{z} - \frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2} d\mathfrak{v} - \frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2} d\mathfrak{w} - \frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2},$$

aus (I*): $$d\mathfrak{x} = -\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1} d\mathfrak{y} - \frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1} d\mathfrak{z} - \frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1} d\mathfrak{v} - \frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1} d\mathfrak{w} - \frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}.$$

Endgleichungen mit 5 Unbekannten.

$[pcc]$	$[pcd]$	$[pce]$	$[pcf]$	$[pdd]$	$[pde]$	$[pdf]$	$[pee]$	$[pef]$
$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{d}_3$	$\mathfrak{e}_3$	$\mathfrak{f}_3$	$\mathfrak{d}_4$	$\mathfrak{e}_4$	$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{e}_5$	$\mathfrak{f}_5$
$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{d}_1$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{e}_1$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{d}_1$	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{e}_1$	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{e}_1$	$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$
$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{C}_2$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{D}_2$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{E}_2$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{D}_2$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{E}_2$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{E}_2$	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$
$=\mathfrak{C}_3$	$=\mathfrak{D}_3$	$=\mathfrak{E}_3$	$=\mathfrak{F}_3$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{D}_3$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{E}_3$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{E}_3$	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$
	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}$	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}$	$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}$	$=\mathfrak{D}_4$	$=\mathfrak{E}_4$	$=\mathfrak{F}_4$	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{E}_4$	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$
			$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}d\mathfrak{w}$		$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}$	$-\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}$	$=\mathfrak{E}_5$	$=\mathfrak{F}_5$
			$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}d\mathfrak{v}$			$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}d\mathfrak{w}$		
			$=d\mathfrak{z}$			$=d\mathfrak{v}$	$d\mathfrak{w}=$	$-\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}$

Beispiel 1: Unsere im § 23 gewonnenen Fehlergleichungen sind:

$$(109)\quad \begin{cases} S_1 = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}, \\ S_2 = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}, \\ S_3 = \sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}, \\ S_4 = \sqrt{(x-x_4)^2+(y-y_4)^2}, \\ S_5 = \sqrt{(x-x_5)^2+(y-y_5)^2}, \end{cases} \qquad (110)\quad \begin{cases} v_1 = S_1 - s_1, \\ v_2 = S_2 - s_2, \\ v_3 = S_3 - s_3, \\ v_4 = S_4 - s_4, \\ v_5 = S_5 - s_5. \end{cases}$$

Hiernach erhalten wir zuerst mit den im § 27 erlangten wahrscheinlichsten Werthen $x = 6\,323{,}91$, $y = 2\,306{,}24$ der Koordinaten des Punktes P die wahrscheinlichsten Werthe S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 der Streckenlängen: (Siehe Seite 104.)

Mit diesen wahrscheinlichsten Werthen der Streckenlängen ergeben sich die wahrscheinlichsten Werthe der Beobachtungsfehler zu:

$$(110)\quad \begin{cases} v_1 = S_1 - s_1 = 331{,}67 - 331{,}60 = +\,0{,}07, \\ v_2 = S_2 - s_2 = 271{,}76 - 272{,}00 = -\,0{,}24, \\ v_3 = S_3 - s_3 = 247{,}18 - 247{,}10 = +\,0{,}08, \\ v_4 = S_4 - s_4 = 269{,}32 - 269{,}50 = -\,0{,}18, \\ v_5 = S_5 - s_5 = \underline{416{,}52} - \underline{416{,}70} = \underline{-\,0{,}18}, \end{cases}$$
$$6{,}45 - 6{,}90 = -\,0{,}45.$$

Dann mufs, wie leicht zu übersehen ist, die Summe aller auf einer Zeile stehenden Gröfsen immer gleich Null sein.

Auch die in der Rechnung vorkommenden Quotienten $-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}$, $-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}$, ... $-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}$; $-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}$, ... $-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$; .... $-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}$, ... können hierbei kontrolirt werden, indem

$$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\cdots-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}-\frac{\mathfrak{s}_1}{\mathfrak{a}_1}=+1,$$

$$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\cdots-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}-\frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{B}_2}=+1,$$

$$\cdots-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}-\frac{\mathfrak{S}_3}{\mathfrak{C}_3}=+1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

sein mufs, da beispielsweise

$$\mathfrak{a}_1+\mathfrak{b}_1+\mathfrak{c}_1\cdots+\mathfrak{f}_1+\mathfrak{s}_1=0,\text{ also}$$

$$-1-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\cdots-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}-\frac{\mathfrak{s}_1}{\mathfrak{a}_1}=0,\text{ oder}$$

$$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\cdots-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}-\frac{\mathfrak{s}_1}{\mathfrak{a}_1}=+1\text{ ist.}$$

Beispiel 1: Mit Einführung der Summenproben gestaltet sich die Auflösung der Endgleichungen in unserm Beispiele wie folgt:

$\mathfrak{a}_1$	+	15,17	$\mathfrak{b}_1$	+	0,62	$\mathfrak{f}_1$	−	3,40	$\mathfrak{s}_1$	−	12,39	$\mathfrak{b}_2$	+	11,82	$\mathfrak{f}_2$	−	3,02	$\mathfrak{s}_2$	−	9,43
			$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}$	−	0,041	$-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}$	+	0,224	$-\frac{\mathfrak{s}_1}{\mathfrak{a}_1}$	+	0,817	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1$	−	0,03	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	+	0,14	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{s}_1$	+	0,51
						$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}d\mathfrak{y}$	−	0,010				$\mathfrak{B}_2$	+	11,79	$\mathfrak{F}_2$	−	2,88	$\mathfrak{S}_2$	−	8,92
						$d\mathfrak{x}$	+	0,214						$d\mathfrak{y}=$	$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$	+	0,244	$-\frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{B}_2}$	+	0,756

Die Proben sind in der Reihenfolge, wie sie bei der Rechnung vorkommen:

$$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}-\frac{\mathfrak{s}_1}{\mathfrak{a}_1}=-0{,}041+0{,}224+0{,}817=+1{,}000,$$

$$-\mathfrak{b}_1-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{s}_1=-0{,}62-0{,}03+0{,}14+0{,}51=0{,}00,$$

$$\mathfrak{B}_2+\mathfrak{F}_2+\mathfrak{S}_2=+11{,}79-2{,}88-8{,}92=-0{,}01,$$

$$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}-\frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{B}_2}=+0{,}244+0{,}756=+1{,}000.$$

10. Nachdem die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$, wie im § 28 gezeigt ist, zweimal unabhängig von einander nach den Fehlergleichungen (**109**) und (**110**), sowie nach den umgeformten Fehlergleichungen (**116**) und (**117**) berechnet und verglichen sind, ergeben sich noch einige weitere Proben. Multipliziren wir die umgeformten Fehlergleichungen (**116**) und (**117**), nachdem sie zusammengefafst sind, mit $p_1 a_1$, $p_2 a_2$, $p_3 a_3, \ldots p_n a_n$, und addiren alles, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
p_1 a_1 v_1 &= p_1 a_1 f_1 + p_1 a_1 a_1 d\mathfrak{x} + p_1 a_1 b_1 d\mathfrak{y} + p_1 a_1 c_1 d\mathfrak{z} + \cdots, \\
p_2 a_2 v_2 &= p_2 a_2 f_2 + p_2 a_2 a_2 d\mathfrak{x} + p_2 a_2 b_2 d\mathfrak{y} + p_2 a_2 c_2 d\mathfrak{z} + \cdots, \\
p_3 a_3 v_3 &= p_3 a_3 f_3 + p_3 a_3 a_3 d\mathfrak{x} + p_3 a_3 b_3 d\mathfrak{y} + p_3 a_3 c_3 d\mathfrak{z} + \cdots. \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
p_n a_n v_n &= p_n a_n f_n + p_n a_n a_n d\mathfrak{x} + p_n a_n b_n d\mathfrak{y} + p_n a_n c_n d\mathfrak{z} + \cdots, \\
\hline
[pav] &= [paf] + [paa]\,d\mathfrak{x} + [pab]\,d\mathfrak{y} + [pac]\,d\mathfrak{z} + \cdots
\end{aligned}$$

Die rechte Seite der Gleichung ist, wie eine Vergleichung mit der ersten Endgleichung (**118**) ergiebt, gleich Null und demnach ist also auch $[pav]=0$. Indem wir die umgeformten Fehlergleichungen (**116**) und (**117**) ferner mit $p_1 b_1$, $p_2 b_2$, $p_3 b_3$, ... $p_n b_n$, dann mit $p_1 c_1$, $p_2 c_2$, $p_3 c_3$, ... $p_n c_n$, ... multipliziren und im übrigen in gleicher Weise verfahren, erhalten wir auch $[pbv]=0$, $[pcv]=0,\ldots$, so dafs also sein mufs:

$$\text{(128)} \qquad \begin{cases} [pav]=0, \\ [pbv]=0, \\ [pcv]=0, \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

Beispiel 1: In unserm Beispiele ergeben sich die Werthe von $[pav]$, $[pbv]$ wie folgt:

	$a\sqrt{p}$.	$b\sqrt{p}$.	$v\sqrt{p}$.	pav.	pbv.
P_1	− 1,58	+ 1,71	+ 0,172	− 0,272	+ 0,294
P_2	− 2,39	− 1,10	− 0,621	+ 1,484	+ 0,683
P_3	+ 0,24	− 2,26	+ 0,179	+ 0,043	− 0,405
P_4	+ 2,61	+ 0,29	− 0,447	− 1,167	− 0,130
P_5	+ 0,30	+ 1,58	− 0,274	− 0,082	− 0,433
				+ 0,006	+ 0,009

Es ist also $[pav]=+0{,}006$, $[pbv]=+0{,}009$, während diese Summen gleich Null sein sollen. Die Abweichungen von Null rühren von den Abrundungen der letzten Stellen der Zahlenwerthe her.

11. Multipliziren wir die umgeformten Fehlergleichungen (**116**) und (**117**), nachdem sie zusammengefügt sind, zuerst mit $p_1 v_1$, $p_2 v_2$, $p_3 v_3$, ... $p_n v_n$, sodann mit $p_1 f_1$, $p_2 f_2$, $p_3 f_3$, ... $p_n f_n$ und addiren, so erhalten wir:

$$\begin{array}{l}
p_1 v_1 v_1 = p_1 f_1 f_1 + p_1 a_1 v_1 d\mathfrak{x} + p_1 b_1 v_1 d\mathfrak{y} + p_1 c_1 v_1 d\mathfrak{z} + \cdots p_1 a_1 f_1 d\mathfrak{x} + p_1 b_1 f_1 d\mathfrak{y} + p_1 c_1 f_1 d\mathfrak{z} + \cdots, \\
p_2 v_2 v_2 = p_2 f_2 f_2 + p_2 a_2 v_2 d\mathfrak{x} + p_2 b_2 v_2 d\mathfrak{y} + p_2 c_2 v_2 d\mathfrak{z} + \cdots p_2 a_2 f_2 d\mathfrak{x} + p_2 b_2 f_2 d\mathfrak{y} + p_2 c_2 f_2 d\mathfrak{z} + \cdots, \\
p_3 v_3 v_3 = p_3 f_3 f_3 + p_3 a_3 v_3 d\mathfrak{x} + p_3 b_3 v_3 d\mathfrak{y} + p_3 c_3 v_3 d\mathfrak{z} + \cdots p_3 a_3 f_3 d\mathfrak{x} + p_3 b_3 f_3 d\mathfrak{y} + p_3 c_3 f_3 d\mathfrak{z} + \cdots, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
p_n v_n v_n = p_n f_n f_n + p_n a_n v_n d\mathfrak{x} + p_n b_n v_n d\mathfrak{y} + p_n c_n v_n d\mathfrak{z} + \cdots p_n a_n f_n d\mathfrak{x} + p_n b_n f_n d\mathfrak{y} + p_n c_n f_n d\mathfrak{z} + \cdots, \\
\hline
[pvv] = [pff] + [pav]d\mathfrak{x} + [pbv]d\mathfrak{y} + [pcv]d\mathfrak{z} + \cdots [paf]d\mathfrak{x} + [pbf]d\mathfrak{y} + [pcf]d\mathfrak{z} + \cdots,
\end{array}$$

Nun ist nach den Formeln (**128**) $[pav]=[pbv]=[pcv]=\cdots=0$, so dafs wird:

$$[pvv]=[pff]+[paf]d\mathfrak{x}+[pbf]d\mathfrak{y}+[pcf]d\mathfrak{z}+\cdots,$$

oder wenn wir die einfacheren Bezeichnungen nach den Formeln (**120**a) einführen:

$$[pvv]=[pff]+\mathfrak{f}_1 d\mathfrak{x}+\mathfrak{f}_2 d\mathfrak{y}+\mathfrak{f}_3 d\mathfrak{z}+\cdots$$

und wenn wir Σ nach Nr. 8 Formel (**127**) für $\mathfrak{f}_1 d\mathfrak{x}+\mathfrak{f}_2 d\mathfrak{y}+\mathfrak{f}_3 d\mathfrak{z}+\cdots$ setzen:

$$\text{(129)} \qquad [pvv]=[pff]+\Sigma.$$

Nach Formel (**127**) ist auch $\Sigma=-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3-\cdots$

Nun sind $\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$, $\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$, $\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$, $\cdots$ sämtlich quadratische Gröfsen, weshalb Σ immer negativ und demnach $[pvv]$ immer kleiner als $[pff]$ wird, wie es auch sein mufs, wenn $[pvv]$ ein Minimum sein soll.

In der Probe nach Formel (**129**) ist die Probe nach Formel (**128**) mit enthalten, denn die erstere stimmt nur dann, wenn letztere stimmt, wie nach obiger Entwicklung leicht zu erkennen ist.

Die zweite Berechnung von $[pvv]$ nach Formel (**129**) ist ganz besonders wichtig, weil dadurch namentlich auch alle Fehler, oder zu grofse Ungenauigkeiten in der Bilduug der Faktoren und Absolutglieder der Endgleichungen erkennbar werden, denn die Quadratsumme $[pvv]$ wird einmal direkt aus den Werthen $v_1 = L_1 - \lambda_1$, $v_2 = L_2 - \lambda_2$, $v_3 = L_3 - \lambda_3$, $\cdots$ $v_n = L_n - \lambda_n$ ohne Benutzung der Faktoren u. s. w. der Endgleichungen und dann nach Formel (**129**) mit Benutzung dieser Faktoren u. s. w. erhalten.

Beispiel 1: Für die Probe nach Formel (**129**) haben wir bereits im § 28, Nr. 3 und im § 29, Nr. 8 die Zahlenwerthe $[pvv] = 0{,}723$, $\Sigma = -1{,}465$ erhalten. Ferner erhalten wir:

$$[pff] = p_1 f_1 f_1 + p_2 f_2 f_2 + p_3 f_3 f_3 + p_4 f_4 f_4 + p_5 f_5 f_5 = 0{,}009 + 0{,}025 + 0{,}464 + 1{,}165 + 0{,}526 = 2{,}189.$$

Demnach wird:

$$[pvv] = [pff] + \Sigma = 2{,}189 - 1{,}465 = 0{,}724. \tag{129}$$

Der hier erhaltene Werth weicht von dem früher erhaltenen also um 1 Einheit der letzten Stelle ab, was auf die bei Durchführung der Rechnungen vorgenommenen Abrundungen der letzten Stellen der Zahlenwerthe zurückzuführen ist.

§ 30. Bildung der reduzirten Endgleichungen aus reduzirten Fehlergleichungen.

1. In manchen Fällen kann die Bildung und Auflösung der Endgleichungen wesentlich vereinfacht werden, indem die reduzirten Endgleichungen direkt aus reduzirten Fehlergleichungen gebildet werden. Wie dies auszuführen ist, wollen wir an einigen besonderen, häufiger vorkommenden Fällen darlegen.

2. Wenn in den umgeformten Fehlergleichungen (**116**) und (**117**), die wir im folgenden immer zusammenfassen, die Faktoren einer der zu bestimmenden Gröfsen $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... sämtlich gleich $+1$ sind, wenn also beispielsweise die umgeformten Fehlergleichungen

$$(1^*)\quad \begin{cases} v_1 = f_1 + d\mathfrak{x} + b_1\,d\mathfrak{y} + c_1\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \text{Gewicht} = p_1, \\ v_2 = f_2 + d\mathfrak{x} + b_2\,d\mathfrak{y} + c_2\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad\text{"} \quad = p_2, \\ v_3 = f_3 + d\mathfrak{x} + b_3\,d\mathfrak{y} + c_3\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad\text{"} \quad = p_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots, \\ v_n = f_n + d\mathfrak{x} + b_n\,d\mathfrak{y} + c_n\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad\text{"} \quad = p_n, \end{cases}$$

vorliegen, so ergeben sich hieraus die folgenden Endgleichungen:

$$(2^*)\quad \begin{cases} [p]\,d\mathfrak{x} + [pb]\,d\mathfrak{y} + [pc]\,d\mathfrak{z} + \cdots\cdots [pf] = 0, \\ [pb]\,d\mathfrak{x} + [pbb]\,d\mathfrak{y} + [pbc]\,d\mathfrak{z} + \cdots\cdots [pbf] = 0, \\ [pc]\,d\mathfrak{x} + [pbc]\,d\mathfrak{y} + [pcc]\,d\mathfrak{z} + \cdots\cdots [pcf] = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Aus der ersten dieser Endgleichungen folgt dann:

$$(3^*)\quad d\mathfrak{x} = -\frac{[pb]}{[p]}\,d\mathfrak{y} - \frac{[pc]}{[p]}\,d\mathfrak{z} - \cdots\cdots \frac{[pf]}{[p]}.$$

Wird dieser Werth von $d\mathfrak{x}$ in die letzten Endgleichungen eingesetzt, so ergeben sich die reduzirten, nur noch $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... enthaltenden Endgleichungen:

$$
(4^*)\begin{cases}
\left([pbb]-\frac{[pb]}{[p]}[pb]\right)d\mathfrak{y}+\left([pbc]-\frac{[pb]}{[p]}[pc]\right)d\mathfrak{z}+\cdots\left([pbf]-\frac{[pb]}{[p]}[pf]\right)=0,\\
\left([pbc]-\frac{[pb]}{[p]}[pc]\right)d\mathfrak{y}+\left([pcc]-\frac{[pc]}{[p]}[pc]\right)d\mathfrak{z}+\cdots\left([pcf]-\frac{[pc]}{[p]}[pf]\right)=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{cases}
$$

3. Diese reduzirten Endgleichungen können wir auch erlangen, indem wir an Stelle der obigen Fehlergleichungen die reduzirten, $d\mathfrak{x}$ nicht enthaltenden Fehlergleichungen

$$
(5^*)\begin{cases}
\mathfrak{v}_1 = f_1+b_1 d\mathfrak{y}+c_1 d\mathfrak{z}+\cdots, & \text{Gewicht}=p_1,\\
\mathfrak{v}_2 = f_2+b_2 d\mathfrak{y}+c_2 d\mathfrak{z}+\cdots, & \quad " \quad =p_2,\\
\mathfrak{v}_3 = f_3+b_3 d\mathfrak{y}+c_3 d\mathfrak{z}+\cdots, & \quad " \quad =p_3,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots,\\
\mathfrak{v}_n = f_n+b_n d\mathfrak{y}+c_n d\mathfrak{z}+\cdots, & \quad " \quad =p_n,\\
\mathfrak{v}_{n+1}=[pf]+[pb]d\mathfrak{y}+[pc]d\mathfrak{z}+\cdots, & \quad " \quad =-\frac{1}{[p]}
\end{cases}
$$

setzen und aus den Faktoren, Absolutgliedern und Gewichten dieser Fehlergleichungen die Faktoren und Absolutglieder der Endgleichungen bilden. Denn, wie leicht zu übersehen ist, liefern uns die ersten n reduzirten Fehlergleichungen die Beiträge $[pbb]$, $[pbc]$, ... $[pbf]$, $[pcc]$, ... $[pcf]$, ... und die letzte $n+1$te Fehlergleichung die Beiträge $-\frac{[pb]}{[p]}[pb]$, $-\frac{[pb]}{[p]}[pc]$, ... $-\frac{[pb]}{[p]}[pf]$, $-\frac{[pc]}{[p]}[pc]$, ... $-\frac{[pc]}{[p]}[pf]$ .... zu den Faktoren u. s. w. der reduzirten Endgleichungen, womit wir also aus sämtlichen $n+1$ reduzirten Fehlergleichungen die in obigen reduzirten Endgleichungen vorkommenden Faktoren u. s. w. erhalten.

Die wahrscheinlichsten Werthe v_1, v_2, v_3, ... v_n der Beobachtungsfehler erhalten wir dann mit den sich nach (5*) ergebenden Werthen $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$, ... $\mathfrak{v}_n$ nach:

$$
(6^*)\begin{cases}
v_1=\mathfrak{v}_1+d\mathfrak{x},\\
v_2=\mathfrak{v}_2+d\mathfrak{x},\\
v_3=\mathfrak{v}_3+d\mathfrak{x},\\
\dots\dots\dots,\\
v_n=\mathfrak{v}_n+d\mathfrak{x}.
\end{cases}
$$

Die Probe nach den Formeln (**128**) vereinfacht sich, da $a_1=a_2=a_3=\cdots a_n=+1$ ist, dahin, dafs sein mufs:

$$
(7^*)\begin{cases}
[pv]=0,\\
[pbv]=0,\\
[pcv]=0.\\
\dots\dots
\end{cases}
$$

4. Dasselbe Ergebnis erzielen wir, wenn wir

$$
(8^*)\begin{cases}
F_1=f_1-\frac{[pf]}{[p]}, & B_1=b_1-\frac{[pb]}{[p]}, & C_1=c_1-\frac{[pc]}{[p]}, & \dots,\\
F_2=f_2-\frac{[pf]}{[p]}, & B_2=b_2-\frac{[pb]}{[p]}, & C_2=c_2-\frac{[pc]}{[p]}, & \dots,\\
F_3=f_3-\frac{[pf]}{[p]}, & B_3=b_3-\frac{[pb]}{[p]}, & C_3=c_3-\frac{[pc]}{[p]}, & \dots,\\
\dots\dots, & \dots\dots, & \dots\dots, & \dots,\\
F_n=f_n-\frac{[pf]}{[p]}, & B_n=b_n-\frac{[pb]}{[p]}, & C_n=c_n-\frac{[pc]}{[p]}, & \dots,
\end{cases}
$$

bilden und an Stelle der unter Nr. 2 angeführten Fehlergleichungen (1*) die folgenden reduzirten Fehlergleichungen setzen:

$$(9^*)\quad \begin{cases} v_1 = F_1 + B_1\,d\mathfrak{y} + C_1\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \text{Gewicht} = p_1, \\ v_2 = F_2 + B_2\,d\mathfrak{y} + C_2\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad\text{„}\quad = p_2, \\ v_3 = F_3 + B_3\,d\mathfrak{y} + C_3\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad\text{„}\quad = p_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots, \\ v_n = F_n + B_n\,d\mathfrak{y} + C_n\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad\text{„}\quad = p_n. \end{cases}$$

Denn die Faktoren u. s. w. der Endgleichungen, die sich aus diesen reduzirten Fehlergleichungen ergeben, sind gleich den Faktoren u. s. w. der reduzirten Endgleichungen (4*), was sich daraus ergiebt, dafs ist:

$$(10^*)\quad \begin{cases} p_1 B_1 B_1 = p_1 b_1 b_1 - 2\frac{[pb]}{[p]} p_1 b_1 + p_1 \frac{[pb]}{[p]}\frac{[pb]}{[p]}, \\ p_2 B_2 B_2 = p_2 b_2 b_2 - 2\frac{[pb]}{[p]} p_2 b_2 + p_2 \frac{[pb]}{[p]}\frac{[pb]}{[p]}, \\ p_3 B_3 B_3 = p_3 b_3 b_3 - 2\frac{[pb]}{[p]} p_3 b_3 + p_3 \frac{[pb]}{[p]}\frac{[pb]}{[p]}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ p_n B_n B_n = p_n b_n b_n - 2\frac{[pb]}{[p]} p_n b_n + p_n \frac{[pb]}{[p]}\frac{[pb]}{[p]}, \\ \hline [pBB] = [pbb] - \frac{[pb]}{[p]}[pb], \end{cases}$$

dafs ferner ist:

$$(11^*)\quad \begin{cases} p_1 B_1 C_1 = p_1 b_1 c_1 - \frac{[pb]}{[p]} p_1 c_1 - \frac{[pc]}{[p]} p_1 b_1 + p_1 \frac{[pb]}{[p]}\frac{[pc]}{[p]}, \\ p_2 B_2 C_2 = p_2 b_2 c_2 - \frac{[pb]}{[p]} p_2 c_2 - \frac{[pc]}{[p]} p_2 b_2 + p_2 \frac{[pb]}{[p]}\frac{[pc]}{[p]}, \\ p_3 B_3 C_3 = p_3 b_3 c_3 - \frac{[pb]}{[p]} p_3 c_3 - \frac{[pc]}{[p]} p_3 b_3 + p_3 \frac{[pb]}{[p]}\frac{[pc]}{[p]}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ p_n B_n C_n = p_n b_n c_n - \frac{[pb]}{[p]} p_n c_n - \frac{[pc]}{[p]} p_n b_n + p_n \frac{[pb]}{[p]}\frac{[pc]}{[p]}, \\ \hline [pBC] = [pbc] - \frac{[pb]}{[p]}[pc], \end{cases}$$

u. s. w.

Für die richtige Bildung der Werthe F, B, C, ... ergiebt sich die Probe, dafs $[pF] = [pB] = [pC] = \cdots = 0$ sein mufs, was ohne weiteres aus (8*) folgt, indem die einzelnen Werthe mit den Gewichten multiplizirt und dann $[pF]$, $[pB]$, $[pC]$, ... gebildet werden.

5. Wenn die Faktoren einer der zu bestimmenden Gröfsen $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... in den umgeformten Fehlergleichungen sämtlich gleich -1 sind, wenn also beispielsweise die Gleichungen

$$(12^*)\quad \begin{cases} v_1 = f_1 - d\mathfrak{x} + b_1\,d\mathfrak{y} + c_1\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \text{Gewicht} = p_1, \\ v_2 = f_2 - d\mathfrak{x} + b_2\,d\mathfrak{y} + c_2\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad\text{„}\quad = p_2, \\ v_3 = f_3 - d\mathfrak{x} + b_3\,d\mathfrak{y} + c_3\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad\text{„}\quad = p_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots, \\ v_n = f_n - d\mathfrak{x} + b_n\,d\mathfrak{y} + c_n\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad\text{„}\quad = p_n \end{cases}$$

vorliegen, so ergeben sich hieraus die folgenden Endgleichungen:

$$(13^*)\quad \begin{cases} [p]\,d\mathfrak{x} - [pb]\,d\mathfrak{y} - [pc]\,d\mathfrak{z} - \cdots [pf] = 0, \\ -[pb]\,d\mathfrak{x} + [pbb]\,d\mathfrak{y} + [pbc]\,d\mathfrak{z} + \cdots [pbf] = 0, \\ -[pc]\,d\mathfrak{x} + [pbc]\,d\mathfrak{y} + [pcc]\,d\mathfrak{z} + \cdots [pcf] = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Aus der ersten Endgleichung folgt dann:

$$(14^*)\quad d\mathfrak{x} = +\frac{[pb]}{[p]}\,d\mathfrak{y} + \frac{[pc]}{[p]}\,d\mathfrak{z} + \cdots \frac{[pf]}{[p]}.$$

Setzen wir diesen Werth von $d\mathfrak{x}$ in die beiden letzten Endgleichungen ein, so erhalten wir die reduzirten Endgleichungen:

$$(15^*)\left\{\begin{array}{l}\left([pbb]-\frac{[pb]}{[p]}[pb]\right)d\mathfrak{y}+\left([pbc]-\frac{[pb]}{[p]}[pc]\right)d\mathfrak{z}+\cdots\left([pbf]-\frac{[pb]}{[p]}[pf]\right)=0,\\ \left([pbc]-\frac{[pb]}{[p]}[pc]\right)d\mathfrak{y}+\left([pcc]-\frac{[pc]}{[p]}[pc]\right)d\mathfrak{z}+\cdots\left([pcf]-\frac{[pc]}{[p]}[pf]\right)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right.$$

Diese Endgleichungen stimmen mit den reduzirten Endgleichungen (4*) überein, so dafs wir auch in dem Falle, wo die Faktoren $a_1=a_2=a_3=\cdots a_n=-1$ sind, die reduzirten Endgleichungen in gleicher Weise aus reduzirten Fehlergleichungen bilden können, wie dies unter Nr. 3 und 4 für den Fall gezeigt ist, wo $a_1=a_2=a_3=\cdots a_n=+1$ ist.

6. Bei der Auflösung der aus den reduzirten Fehlergleichungen erhaltenen reduzirten Endgleichungen wird in der Rechenprobe nach Formel (**127**) für Σ der Betrag $-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3-\cdots$ erhalten. Um demnach den vollen Betrag von Σ nach Formel (**127**) zu erhalten, der in Formel (**129**) einzusetzen ist, um $[pvv]$ ganz zu erhalten, mufs dem erstangeführten Betrage von Σ noch der Betrag $-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$ hinzugesetzt werden, der hier gleich $-\frac{[pf]}{[p]}[pf]$ ist.

Dieser Zusatz kann indefs wegfallen, wenn bei Benutzung der Formeln (5*) der aus der $n+1$ten Fehlergleichung entspringende Betrag $-\frac{[pf]}{[p]}[pf]$ mit in $[pff]$ aufgenommen oder wenn bei Benutzung der Formeln (8*) und (9*) $[pFF]$ statt $[pff]$ gebildet und in die Formel (**129**) eingeführt wird, da $[pFF]=[pff]-\frac{[pf]}{[p]}[pf]$ ist, was sich ohne weiteres ergiebt, indem nach (8*) die Ausdrücke für $p_1F_1F_1$, $p_2F_2F_2$, $p_3F_3F_3$, $\cdots$ $p_nF_nF_n$ gebildet und addirt werden.

7. Liegen also die umgeformten Fehlergleichungen

$$\begin{array}{ll} v_1=f_1\pm d\mathfrak{x}+b_1d\mathfrak{y}+c_1d\mathfrak{z}+\cdots, & \text{Gewicht}=p_1,\\ v_2=f_2\pm d\mathfrak{x}+b_2d\mathfrak{y}+c_2d\mathfrak{z}+\cdots, & \quad ,, \quad =p_2,\\ v_3=f_3\pm d\mathfrak{x}+b_3d\mathfrak{y}+c_3d\mathfrak{z}+\cdots, & \quad ,, \quad =p_3,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots,\\ v_n=f_n\pm d\mathfrak{x}+b_nd\mathfrak{y}+c_nd\mathfrak{z}+\cdots, & \quad ,, \quad =p_n\end{array}$$

vor, so erhalten wir allgemein die reduzirten, nur noch $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, $\cdots$ enthaltenden Endgleichungen aus den reduzirten Fehlergleichungen:

$$(130)\left\{\begin{array}{lll} \mathfrak{v}_1=f_1+b_1d\mathfrak{y}+c_1d\mathfrak{z}+\cdots, & \text{Gewicht}= & p_1,\\ \mathfrak{v}_2=f_2+b_2d\mathfrak{y}+c_2d\mathfrak{z}+\cdots, & \quad ,, \quad = & p_2,\\ \mathfrak{v}_3=f_3+b_3d\mathfrak{y}+c_3d\mathfrak{z}+\cdots, & \quad ,, \quad = & p_3,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots, & \\ \mathfrak{v}_n=f_n+b_nd\mathfrak{y}+c_nd\mathfrak{z}+\cdots, & \quad ,, \quad = & p_n,\\ \mathfrak{v}_{n+1}=[pf]+[pb]d\mathfrak{y}+[pc]d\mathfrak{z}+\cdots, & \quad ,, \quad = & -\frac{1}{[p]},\end{array}\right.$$

oder, indem

$$(131)\left\{\begin{array}{l|l|l|l} F_1=f_1-\frac{[pf]}{[p]}, & B_1=b_1-\frac{[pb]}{[p]}, & C_1=c_1-\frac{[pc]}{[p]}, & \cdots\cdots,\\ F_2=f_2-\frac{[pf]}{[p]}, & B_2=b_2-\frac{[pb]}{[p]}, & C_2=c_2-\frac{[pc]}{[p]}, & \cdots\cdots,\\ F_3=f_3-\frac{[pf]}{[p]}, & B_3=b_3-\frac{[pb]}{[p]}, & C_3=c_3-\frac{[pc]}{[p]}, & \cdots\cdots,\\ \cdots\cdots, & \cdots\cdots, & \cdots\cdots, & \cdots\cdots,\\ F_n=f_n-\frac{[pf]}{[p]}, & B_n=b_n-\frac{[pb]}{[p]}, & C_n=c_n-\frac{[pc]}{[p]}, & \cdots\cdots,\end{array}\right.$$

gebildet wird, wobei $[pF] = [pB] = [pC] = \cdots\cdots = 0$ werden mufs, aus den Fehlergleichungen:

$$(132)\quad \begin{cases} v_1 = F_1 + B_1 d\mathfrak{y} + C_1 d\mathfrak{z} + \cdots\cdots, & \text{Gewicht} = p_1, \\ v_2 = F_2 + B_2 d\mathfrak{y} + C_2 d\mathfrak{z} + \cdots\cdots, & \quad\text{"}\quad = p_2, \\ v_3 = F_3 + B_3 d\mathfrak{y} + C_3 d\mathfrak{z} + \cdots\cdots, & \quad\text{"}\quad = p_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots, \\ v_n = F_n + B_n d\mathfrak{y} + C_n d\mathfrak{z} + \cdots\cdots, & \quad\text{"}\quad = p_n, \end{cases}$$

Nachdem $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, $\cdots\cdots$ aus den reduzirten Endgleichungen bestimmt sind, erhalten wir $d\mathfrak{x}$ nach:

$$(133)\quad d\mathfrak{x} = \mp \frac{[pf]}{[p]} \mp \frac{[pb]}{[p]} d\mathfrak{y} \mp \frac{[pc]}{[p]} \mp \cdots\cdots,$$

worin das $\begin{Bmatrix}\text{obere}\\ \text{untere}\end{Bmatrix}$ Vorzeichen gilt, wenn das Vorzeichen von $d\mathfrak{x}$ in den umgeformten Fehlergleichungen $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ ist.

Um nach Formel (**129**) den richtigen Werth von $[pvv]$ zu erhalten, kann erstens dem sich bei Auflösung der reduzirten Endgleichungen nach Formel (**127**) für Σ ergebenden Betrage $-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 - \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3 - \cdots\cdots$ noch $-\frac{[pf]}{[p]}[pf]$ hinzugesetzt werden, oder es kann zweitens bei Benutzung der Formeln (**130**) der aus der $n+1$ten Fehlergleichung entspringende Betrag $-\frac{[pf]}{[p]}[pf]$ mit in $[pff]$ aufgenommen werden, oder es kann drittens bei Benutzung der Formeln (**131**) und (**132**) $[pFF]$ statt $[pff]$ gebildet und in Formel (**129**) eingesetzt werden.

Wenn $p_1 = p_2 = p_3 = \cdots\cdots p_n = 1$ ist, so vereinfachen sich die Formeln (**130**) bis (**133**) wie folgt:

$$(134)\quad \begin{cases} v_1 = f_1 + b_1 d\mathfrak{y} + c_1 d\mathfrak{z} + \cdots\cdots, & \text{Gewicht} = +1, \\ v_2 = f_2 + b_2 d\mathfrak{y} + c_2 d\mathfrak{z} + \cdots\cdots, & \quad\text{"}\quad = +1, \\ v_3 = f_3 + b_3 d\mathfrak{y} + c_3 d\mathfrak{z} + \cdots\cdots, & \quad\text{"}\quad = +1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots, \\ v_n = f_n + b_n d\mathfrak{y} + c_n d\mathfrak{z} + \cdots\cdots, & \quad\text{"}\quad = +1, \\ v_{n+1} = [f] + [b]\, d\mathfrak{y} + [c]\, d\mathfrak{z} + \cdots\cdots, & \quad\text{"}\quad = -\frac{1}{n}; \end{cases}$$

$$(135)\quad \begin{cases} F_1 = f_1 - \frac{[f]}{n}, & B_1 = b_1 - \frac{[b]}{n}, & C_1 = c_1 - \frac{[c]}{n}, & \cdots\cdots, \\ F_2 = f_2 - \frac{[f]}{n}, & B_2 = b_2 - \frac{[b]}{n}, & C_2 = c_2 - \frac{[c]}{n}, & \cdots\cdots, \\ F_3 = f_3 - \frac{[f]}{n}, & B_3 = b_3 - \frac{[b]}{n}, & C_3 = c_3 - \frac{[c]}{n}, & \cdots\cdots, \\ \cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots, \\ F_n = f_n - \frac{[f]}{n}, & B_n = b_n - \frac{[b]}{n}, & C_n = c_n - \frac{[c]}{n}, & \cdots\cdots, \end{cases}$$

wo $[F] = [B] = [C] = \cdots\cdots = 0$ sein mufs;

$$(136)\quad \begin{cases} v_1 = F_1 + B_1 d\mathfrak{y} + C_1 d\mathfrak{z} + \cdots\cdots, & \text{Gewicht} = +1, \\ v_2 = F_2 + B_2 d\mathfrak{y} + C_2 d\mathfrak{z} + \cdots\cdots, & \quad\text{"}\quad = +1, \\ v_3 = F_3 + B_3 d\mathfrak{y} + C_3 d\mathfrak{z} + \cdots\cdots, & \quad\text{"}\quad = +1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots, \\ v_n = F_n + B_n d\mathfrak{y} + C_n d\mathfrak{z} + \cdots\cdots, & \quad\text{"}\quad = +1. \end{cases}$$

Nachdem $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... aus den reduzirten Endgleichungen bestimmt sind, erhalten wir $d\mathfrak{x}$ nach:

$$(137)\quad d\mathfrak{x} = \mp \frac{[f]}{n} \mp \frac{[b]}{n} d\mathfrak{y} \mp \frac{[c]}{n} d\mathfrak{z} \mp \cdots\cdots,$$

worin das $\begin{Bmatrix}\text{obere}\\ \text{untere}\end{Bmatrix}$ Vorzeichen gilt, wenn das Vorzeichen von $d\mathfrak{x}$ in den umgeformten Fehlergleichungen $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ ist.

Um nach Formel (**129**) in diesem Falle den richtigen Werth von $[pvv]$ zu erhalten, kann erstens dem sich bei Auflösung der reduzirten Endgleichungen nach Formel (**127**) für Σ ergebenden Betrage $-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 - \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3 - \cdots$ noch $-\frac{[f]}{n}[f]$ hinzugesetzt, oder es kann zweitens bei Benutzung der Formeln (**134**) der aus der $n+1$ten Fehlergleichung entspringende Betrag $-\frac{[f]}{n}[f]$ mit in $[pff]$ aufgenommen werden, oder es kann drittens bei Benutzung der Formeln (**135**) und (**136**) $[FF]$ statt $[ff]$ gebildet und in Formel (**129**) eingesetzt werden.

Mit den nach den Formeln (**130**) oder (**134**) erhaltenen Werthen $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3, \ldots \mathfrak{v}_n$ ergeben sich die wahrscheinlichsten Werthe $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$ der Beobachtungsfehler nach:

$$(\mathbf{138}) \qquad \begin{cases} v_1 = \mathfrak{v}_1 \pm d\mathfrak{z}, \\ v_2 = \mathfrak{v}_2 \pm d\mathfrak{z}, \\ v_3 = \mathfrak{v}_3 \pm d\mathfrak{z}, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ v_n = \mathfrak{v}_n \pm d\mathfrak{z}. \end{cases}$$

Die Proben nach den Formeln (**128**) sind:

$$(\mathbf{139}) \qquad \begin{cases} [pv] = 0, \\ [pbv] = 0, \\ [pcv] = 0, \\ \ldots\ldots, \end{cases}$$

oder wenn sämtliche Gewichte gleich 1 sind:

$$(\mathbf{140}) \qquad \begin{cases} [v] = 0, \\ [bv] = 0, \\ [cv] = 0, \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Beispiel: Bei der Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe der Koordinaten $x\ y$ eines durch Rückwärtseinschneiden bestimmten trigonometrischen Punktes haben sich die folgenden umgeformten Fehlergleichungen ergeben:*)

$$\begin{aligned} v_1 &= \ 0 - 110{,}7\,d\mathfrak{x} + 95{,}0\,d\mathfrak{y} + d\mathfrak{z}, & \text{Gewicht} &= 1, \\ v_2 &= \ 0 - 255{,}4\,d\mathfrak{x} - 97{,}0\,d\mathfrak{y} + d\mathfrak{z}, & \text{„} &= 1, \\ v_3 &= +10 - 14{,}3\,d\mathfrak{x} - 202{,}2\,d\mathfrak{y} + d\mathfrak{z}, & \text{„} &= 1, \\ v_4 &= -20 + 167{,}1\,d\mathfrak{x} + 82{,}1\,d\mathfrak{y} + d\mathfrak{z}, & \text{„} &= 1, \\ v_5 &= +\ 8 - 60{,}9\,d\mathfrak{x} + 267{,}0\,d\mathfrak{y} + d\mathfrak{z}, & \text{„} &= 1. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können nach den Formeln (**134**) reduzirt werden auf:

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_1 &= \ 0 - 110{,}7\,d\mathfrak{x} + 95{,}0\,d\mathfrak{y}, & \text{Gewicht} &= 1, \\ \mathfrak{v}_2 &= \ 0 - 255{,}4\,d\mathfrak{x} - 97{,}0\,d\mathfrak{y}, & \text{„} &= 1, \\ \mathfrak{v}_3 &= +10 - 14{,}3\,d\mathfrak{x} - 202{,}2\,d\mathfrak{y}, & \text{„} &= 1, \\ \mathfrak{v}_4 &= -20 + 167{,}1\,d\mathfrak{x} + 82{,}1\,d\mathfrak{y}, & \text{„} &= 1, \\ \mathfrak{v}_5 &= +\ 8 - 60{,}9\,d\mathfrak{x} + 267{,}0\,d\mathfrak{y}, & \text{„} &= 1, \\ \mathfrak{v}_6 &= -\ 2 - 274{,}2\,d\mathfrak{x} + 144{,}9\,d\mathfrak{y}, & \text{„} &= -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Hiermit ergeben sich die Faktoren der reduzirten Endgleichungen wie folgt:

	p.	*a.*	*b.*	*f.*	*paa.*	*pab.*	*paf.*	*pbb.*	*pbf.*
P_1	1	− 111	+ 95	0	+ 12 321	− 10 545	0	+ 9 025	0
P_2	1	− 255	− 97	0	+ 65 025	+ 24 735	0	+ 9 409	0
P_3	1	− 14	− 202	+ 10	+ 196	+ 2 828	− 140	+ 40 804	− 2 020
P_4	1	+ 167	+ 82	− 20	+ 27 889	+ 13 694	− 3 340	+ 6 724	− 1 640
P_5	1	− 61	+ 267	+ 8	+ 3 721	− 16 287	− 488	+ 71 289	+ 2 136
	$-\frac{1}{5}$	− 274	+ 145	− 2	− 15 015	+ 7 946	− 110	− 4 205	+ 58
					+ 94 137	+ 22 371	− 4 078	+ 133 046	− 1 466

*) Vergleiche § 36.

Die reduzirten Endgleichungen sind demnach:

$$+94\,137\,d\mathfrak{x} + 22\,371\,d\mathfrak{y} - 4\,078 = 0,$$
$$+22\,371\,d\mathfrak{x} + 133\,046\,d\mathfrak{y} - 1\,466 = 0,$$

woraus sich nach den Formeln (**122**) und (**123**) ergiebt:

$$d\mathfrak{x} = +0{,}042, \qquad d\mathfrak{y} = +0{,}004$$

und nach Formel (**137**):

$$d\mathfrak{z} = -\frac{[a]}{n}\,d\mathfrak{x} - \frac{[b]}{n}\,d\mathfrak{y} - \frac{[f]}{n} = +54{,}8\,(+0{,}042) - 29{,}0\,(+0{,}004) + 0{,}4 = +2{,}6,$$

endlich nach den Formeln (**134**) und (**138**):

$$(\mathbf{134})\ \begin{cases} \mathfrak{v}_1 = f_1 + a_1\,d\mathfrak{x} + b_1\,d\mathfrak{y} = \ 0{,}0 - 4{,}7 + 0{,}4 = -\ 4{,}3, \\ \mathfrak{v}_2 = f_2 + a_2\,d\mathfrak{x} + b_2\,d\mathfrak{y} = \ 0{,}0 - 10{,}7 - 0{,}4 = -11{,}1, \\ \mathfrak{v}_3 = f_3 + a_3\,d\mathfrak{x} + b_3\,d\mathfrak{y} = +10{,}0 - 0{,}6 - 0{,}8 = +\ 8{,}6, \\ \mathfrak{v}_4 = f_4 + a_4\,d\mathfrak{x} + b_4\,d\mathfrak{y} = -20{,}0 + 7{,}0 + 0{,}3 = -12{,}7, \\ \mathfrak{v}_5 = f_5 + a_5\,d\mathfrak{x} + b_5\,d\mathfrak{y} = \underline{+\ 8{,}0 - 2{,}6 + 1{,}1} = \underline{+\ 6{,}5}, \\ \phantom{\mathfrak{v}_5 = f_5 + a_5\,d\mathfrak{x} + b_5\,d\mathfrak{y} =}\ -\ 2{,}0 - 11{,}6 + 0{,}6 \ -13{,}0. \end{cases}$$

$$(\mathbf{138})\ \begin{cases} v_1 = \mathfrak{v}_1 + d\mathfrak{z} = -\ 1{,}7 \\ v_2 = \mathfrak{v}_2 + d\mathfrak{z} = -\ 8{,}5 \\ v_3 = \mathfrak{v}_3 + d\mathfrak{z} = +11{,}2 \\ v_4 = \mathfrak{v}_4 + d\mathfrak{z} = -10{,}1 \\ v_5 = \mathfrak{v}_5 + d\mathfrak{z} = \underline{+\ 9{,}1} \\ [v] = \phantom{\mathfrak{v}_5 + d\mathfrak{z}}\ \ 0{,}0. \end{cases}$$

Ferner folgt aus den gegebenen umgeformten Fehlergleichungen nach den Formeln (**135**) und (**136**):

$$(\mathbf{135})\ \begin{cases} F_1 = f_1 - \frac{[f]}{n} = +\ 0{,}4, & A_1 = a_1 - \frac{[a]}{n} = -\ 55{,}9, & B_1 = b_1 - \frac{[b]}{n} = +\ 66{,}0, \\ F_2 = f_2 - \frac{[f]}{n} = +\ 0{,}4, & A_2 = a_2 - \frac{[a]}{n} = -200{,}6, & B_2 = b_2 - \frac{[b]}{n} = -126{,}0, \\ F_3 = f_3 - \frac{[f]}{n} = +10{,}4, & A_3 = a_3 - \frac{[a]}{n} = +\ 40{,}5, & B_3 = b_3 - \frac{[b]}{n} = -231{,}2, \\ F_4 = f_4 - \frac{[f]}{n} = -19{,}6, & A_4 = a_4 - \frac{[a]}{n} = +221{,}9, & B_4 = b_4 - \frac{[b]}{n} = +\ 53{,}1, \\ F_5 = f_5 - \frac{[f]}{n} = +\ 8{,}4, & A_5 = a_5 - \frac{[a]}{n} = -\ 6{,}1, & B_5 = b_5 - \frac{[b]}{n} = +238{,}0, \\ [F] = \ 0{,}0, & [A] = -\ 0{,}2, & [B] = -\ 0{,}1, \end{cases}$$

$$(\mathbf{136})\ \begin{cases} v_1 = F_1 + A_1\,d\mathfrak{x} + B_1\,d\mathfrak{y} = +\ 0{,}4 - 55{,}9\,d\mathfrak{x} + 66{,}0\,d\mathfrak{y}, & \text{Gewicht} = 1, \\ v_2 = F_2 + A_2\,d\mathfrak{x} + B_2\,d\mathfrak{y} = +\ 0{,}4 - 200{,}6\,d\mathfrak{x} - 126{,}0\,d\mathfrak{y}, & \text{„} \quad = 1, \\ v_3 = F_3 + A_3\,d\mathfrak{x} + B_3\,d\mathfrak{y} = +10{,}4 + 40{,}5\,d\mathfrak{x} - 231{,}2\,d\mathfrak{y}, & \text{„} \quad = 1, \\ v_4 = F_4 + A_4\,d\mathfrak{x} + B_4\,d\mathfrak{y} = -19{,}6 + 221{,}9\,d\mathfrak{x} + 53{,}1\,d\mathfrak{y}, & \text{„} \quad = 1, \\ v_5 = F_5 + A_5\,d\mathfrak{x} + B_5\,d\mathfrak{y} = +\ 8{,}4 - 6{,}1\,d\mathfrak{x} + 238{,}0\,d\mathfrak{y}, & \text{„} \quad = 1, \end{cases}$$

wonach sich die Faktoren und Absolutglieder der reduzirten Endgleichungen wie folgt ergeben:

	p.	A.	B.	F.	pAA.	pAB.	pAF.	pBB.	pBF.
P_1	1	− 56	+ 66	+ 0,4	3 136	− 3 696	− 22	4 356	+ 26
P_2	1	− 201	− 126	+ 0,4	40 401	+ 25 326	− 80	15 876	− 50
P_3	1	+ 40	− 231	+ 10,4	1 600	− 9 240	+ 416	53 361	− 2 402
P_4	1	+ 222	+ 53	− 19,6	49 284	+ 11 766	− 4 351	2 809	− 1 039
P_5	1	− 6	+ 238	+ 8,4	36	− 1 428	− 50	56 644	+ 1 999
					+ 94 457	+ 22 728	− 4 087	+ 133 046	− 1 466

Die reduzirten Endgleichungen sind demnach:

$$+94\,457\,d\mathfrak{x} + 22\,728\,d\mathfrak{y} - 4\,087 = 0,^{*)}$$
$$+22\,728\,d\mathfrak{x} + 133\,046\,d\mathfrak{y} - 1\,466 = 0,$$

woraus sich nach den Formeln (**122**), (**123**) und (**137**) wie oben ergiebt:

$$d\mathfrak{x} = +0{,}042, \quad d\mathfrak{y} = +0{,}004, \quad d\mathfrak{z} = +2{,}6.$$

Die wahrscheinlichsten Werthe der Beobachtungsfehler werden nach den reduzirten Fehlergleichungen (**136**):

$$\begin{aligned}
v_1 &= +\ 0{,}4 - \ \ 55{,}9\,d\mathfrak{x} + \ 66{,}0\,d\mathfrak{y} = +\ 0{,}4 - 2{,}3 + 0{,}3 = -\ 1{,}6,\\
v_2 &= +\ 0{,}4 - 200{,}6\,d\mathfrak{x} - 126{,}0\,d\mathfrak{y} = +\ 0{,}4 - 8{,}4 - 0{,}5 = -\ 8{,}5,\\
v_3 &= +10{,}4 + \ 40{,}5\,d\mathfrak{x} - 231{,}2\,d\mathfrak{y} = +10{,}4 + 1{,}7 - 0{,}9 = +11{,}2,\\
v_4 &= -19{,}6 + 221{,}9\,d\mathfrak{x} + \ 53{,}1\,d\mathfrak{y} = -19{,}6 + 9{,}3 + 0{,}2 = -10{,}1,\\
v_5 &= +\ 8{,}4 - \ \ 6{,}1\,d\mathfrak{x} + 238{,}0\,d\mathfrak{y} = \underline{+\ 8{,}4 - 0{,}3 + 1{,}0 = +\ 9{,}1},\\
[v] &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0{,}0 + 0{,}0 + 0{,}1 = +\ 0{,}1.
\end{aligned}$$

8. Wenn die Faktoren a, b, c, ... der umgeformten Fehlergleichungen unter sich einander gleich sind, wenn also die umgeformten Fehlergleichungen

$$\begin{aligned}
v_1 &= f_1 + a\,d\mathfrak{x} + b\,d\mathfrak{y} + c\,d\mathfrak{z} + \cdots, && \text{Gewicht} = p_1,\\
v_2 &= f_2 + a\,d\mathfrak{x} + b\,d\mathfrak{y} + c\,d\mathfrak{z} + \cdots, && \quad\text{„}\quad = p_2,\\
v_3 &= f_3 + a\,d\mathfrak{x} + b\,d\mathfrak{y} + c\,d\mathfrak{z} + \cdots, && \quad\text{„}\quad = p_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, && \ldots\ldots,\\
v_n &= f_n + a\,d\mathfrak{x} + b\,d\mathfrak{y} + c\,d\mathfrak{z} + \cdots, && \quad\text{„}\quad = p_n
\end{aligned}$$

vorliegen, so können diese reduzirt werden auf die eine Fehlergleichung

(**141**) $$v = \frac{[pf]}{[p]} + a\,d\mathfrak{x} + b\,d\mathfrak{y} + c\,d\mathfrak{z} + \cdots, \quad \text{Gewicht} = [p].$$

Denn die obigen n Fehlergleichungen liefern die folgenden Endgleichungen:

$$\begin{aligned}
&[p]aa\,d\mathfrak{x} + [p]ab\,d\mathfrak{y} + [p]ac\,d\mathfrak{z} + \cdots + [pf]a = 0,\\
&[p]ab\,d\mathfrak{x} + [p]bb\,d\mathfrak{y} + [p]bc\,d\mathfrak{z} + \cdots + [pf]b = 0,\\
&[p]ac\,d\mathfrak{x} + [p]bc\,d\mathfrak{y} + [p]cc\,d\mathfrak{z} + \cdots + [pf]c = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

und ganz dieselben Endgleichungen ergeben sich aus der einen reduzirten Fehlergleichung (**141**).

9. Die Fehlergleichung

$$v = f + a\,d\mathfrak{x} + b\,d\mathfrak{y} + c\,d\mathfrak{z} + \cdots, \quad \text{Gewicht} = p$$

kann ersetzt werden durch die Fehlergleichung

(**142**) $$qv = qf + qa\,d\mathfrak{x} + qb\,d\mathfrak{y} + qc\,d\mathfrak{z} + \cdots, \quad \text{Gewicht} = \frac{p}{q^2};$$

denn, wie leicht zu übersehen ist, liefern beide Fehlergleichungen dieselben Beiträge zu den Endgleichungen.

10. Die n Fehlergleichungen

$$\begin{aligned}
v_1 &= f_1 \pm d\mathfrak{x}, && \text{Gewicht} = p_1,\\
v_2 &= f_2 \pm d\mathfrak{x} + b\,d\mathfrak{y} + c\,d\mathfrak{z} + \cdots, && \quad\text{„}\quad = p_2,\\
v_3 &= f_3 \pm d\mathfrak{x}, && \quad\text{„}\quad = p_3,\\
&\ldots\ldots, && \ldots\ldots,\\
v_n &= f_n \pm d\mathfrak{x}, && \quad\text{„}\quad = p_n,
\end{aligned}$$

*) Die Abweichungen der Zahlenwerthe in den nach den Formeln (**134**) erhaltenen Endgleichungen von den hier erhaltenen erklären sich durch die Abrundungen der Zahlenwerthe der Faktoren A und B.

können nach den Formeln (**130**) zuerst reduzirt werden auf die Fehlergleichungen:

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{v}_1 = f_1 & , & \text{Gewicht} = & p_1, \\ \mathfrak{v}_2 = f_2 + b\,d\mathfrak{y} + c\,d\mathfrak{z} + \cdots, & & \text{„} = & p_2, \\ \mathfrak{v}_3 = f_3 & , & \text{„} = & p_3, \\ \cdots\cdots\cdots & , & \cdots\cdots & , \\ \mathfrak{v}_n = f_n & , & \text{„} = & p_n, \\ \mathfrak{v}_{n+1} = [pf] + p_2 b\,d\mathfrak{y} + p_2 c\,d\mathfrak{z} + \cdots, & & \text{„} = & -\frac{1}{[p]}. \end{array}$$

Von diesen reduzirten Fehlergleichungen liefern nur die zweite und die letzte Beiträge zu den Faktoren u. s. w. der reduzirten Endgleichungen, da in allen übrigen Fehlergleichungen die Faktoren b, c, ... sämtlich gleich Null sind. Demnach können diese $n+1$ Gleichungen für die Bildung der reduzirten Endgleichungen ersetzt werden durch die beiden Fehlergleichungen:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{v}_2 = f_2 + b\,d\mathfrak{y} + c\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \text{Gewicht} = & p_2, \\ \mathfrak{v}_{n+1} = [pf] + p_2 b\,d\mathfrak{y} + p_2 c\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \text{„} = & -\frac{1}{[p]}, \end{array}$$

oder, unter Berücksichtigung der unter Nr. 9 aufgestellten Formel (**142**), durch die beiden Fehlergleichungen:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{v}_2 = f_2 + b\,d\mathfrak{y} + c\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \text{Gewicht} = & p_2, \\ \frac{1}{p_2}\mathfrak{v}_{n+1} = \frac{[pf]}{p_2} + b\,d\mathfrak{y} + c\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \text{„} = & -\frac{p_2^2}{[p]}. \end{array}$$

Diese beiden Fehlergleichungen können sodann nach Formel (**141**) weiter reduzirt werden auf die eine Fehlergleichung:

$$\mathfrak{v} = \frac{p_2 f_2 - \frac{p_2}{[p]}[pf]}{p_2 - \frac{p_2^2}{[p]}} + b\,d\mathfrak{y} + c\,d\mathfrak{z} + \cdots, \quad \text{Gewicht} = p_2 - \frac{p_2^2}{[p]},$$

oder da der erste Teil des Ausdrucks, oben und unten mit $\frac{[p]}{p_2}$ multiplizirt, übergeht in:

$$\frac{[p]f_2 - [pf]}{[p] - p_2} = \frac{[p]f_2 - p_2 f_2 + p_2 f_2 - [pf]}{[p] - p_2} = f_2 - \frac{[pf] - p_2 f_2}{[p] - p_2},$$

auf die Fehlergleichung:

$$(\mathbf{143}) \quad \mathfrak{v} = f_2 - \frac{[pf] - p_2 f_2}{[p] - p_2} + b\,d\mathfrak{y} + c\,d\mathfrak{z} + \cdots, \quad \text{Gewicht} = p_2 - \frac{p_2^2}{[p]} = \frac{([p] - p_2)p_2}{[p]}.$$

Für $d\mathfrak{x}$ ergiebt sich nach Formel (**133**):

$$(\mathbf{144}) \qquad d\mathfrak{x} = \mp \frac{[pf]}{[p]} \mp \frac{p_2}{[p]} b\,d\mathfrak{y} \mp \frac{p_2}{[p]} c\,d\mathfrak{z} \mp \cdots,$$

worin das $\left\{\begin{array}{c}\text{obere}\\ \text{untere}\end{array}\right\}$ Vorzeichen gilt, wenn das Vorzeichen von $d\mathfrak{x}$ in den umgeformten Fehlergleichungen $\left\{\begin{array}{c}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{array}\right\}$ ist.

Ebenso wie bei Anwendung der Formeln (**130**) bis (**133**) mufs auch bei Anwendung der Formeln (**143**) und (**144**) dem sich bei Auflösung der reduzirten Endgleichungen nach Formel (**127**) für Σ ergebenden Betrage $-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 - \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3 - \cdots$ noch $-\frac{[pf]}{[p]}[pf]$ hinzugesetzt werden, um nach Formel (**129**) den richtigen Werth von $[p\mathfrak{v}\mathfrak{v}]$ zu erhalten.

In dem Falle, dafs $p_1 = p_2 = p_3 = \cdots p_n = 1$ ist, vereinfachen sich die Formeln (**143**) und (**144**) wie folgt:

$$(\mathbf{145})\qquad v = f_2 - \frac{[f] - f_2}{n-1} + b\,d\mathfrak{y} + c\,d\mathfrak{z} + \cdots,\quad \text{Gewicht} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n},$$

$$(\mathbf{146})\qquad d\mathfrak{x} = \mp \frac{[f]}{n} \mp \frac{1}{n}\,b\,d\mathfrak{y} \mp \frac{1}{n}\,c\,d\mathfrak{z} \mp \cdots,$$

worin bezüglich der Vorzeichen das zu Formel (**144**) gesagte gilt.

Der erforderliche Zusatz zu dem Σ Betrage $-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 - \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3 - \cdots$ ist hier $-\frac{[f]}{n}[f]$.

Beispiel: Bei Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe der Koordinaten $x\ y$ eines durch Vorwärtseinschneiden bestimmten trigonometrischen Punktes haben sich für die auf einem Punkte P_a beobachteten Richtungen die folgenden umgeformten Fehlergleichungen ergeben:*)

$$\begin{aligned}
v_1 &= +0{,}8 && + d\mathfrak{z}_a, && \text{Gewicht } p_1 = 8{,}0,\\
v_2 &= +4{,}2 && + d\mathfrak{z}_a, && \quad\text{"}\quad p_2 = 6{,}5,\\
v_3 &= +0{,}2 + 35{,}6\,d\mathfrak{x} + 23{,}0\,d\mathfrak{y} && + d\mathfrak{z}_a, && \quad\text{"}\quad p_3 = 9{,}0,\\
v_4 &= +2{,}0 && + d\mathfrak{z}_a, && \quad\text{"}\quad p_4 = 8{,}0.
\end{aligned}$$

Diese Fehlergleichungen werden reduzirt auf die eine Fehlergleichung:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{143})\qquad v &= f_3 - \frac{[pf] - p_3 f_3}{[p] - p_3} + a\,d\mathfrak{x} + b\,d\mathfrak{y},\quad \text{Gewicht} = \frac{([p] - p_3)p_3}{[p]},\\
&= +0{,}2 - \frac{+49{,}7}{22{,}5} + 35{,}6\,d\mathfrak{x} + 23{,}0\,d\mathfrak{y},\quad \text{Gewicht} = \frac{22{,}5 \cdot 9{,}0}{31{,}5},\\
&= -2{,}0 + 35{,}6\,d\mathfrak{x} + 23{,}0\,d\mathfrak{y},\quad \text{Gewicht} = 6{,}4.
\end{aligned}$$

Für die Berechnung von $d\mathfrak{z}_a$ ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{144})\qquad d\mathfrak{z}_a &= -\frac{p_3}{[p]}a\,d\mathfrak{x} - \frac{p_3}{[p]}b\,d\mathfrak{y} - \frac{[pf]}{[p]}\\
&= -\frac{9{,}0}{31{,}5}(+35{,}6)\,d\mathfrak{x} - \frac{9{,}0}{31{,}5}(+23{,}0)\,d\mathfrak{y} - \frac{+51{,}5}{31{,}5}\\
&= -10{,}2\,d\mathfrak{x} - 6{,}6\,d\mathfrak{y} - 1{,}63.
\end{aligned}$$

2. Kapitel. Beispiele zu dem im 1. Kapitel entwickelten Verfahren.

§ 31. Bogenschnitt gemessener Längen.

1. Zur weitern Erläuterung des im 1. Kapitel entwickelten Verfahrens für die Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe der durch vermittelnde Beobachtungen bestimmten Gröfsen und der mittleren Fehler der Beobachtungsergebnisse wollen wir hier noch eine Reihe von Beispielen folgen lassen, und zwar in der Weise, dafs wir für jedes Beispiel zuerst die Formeln entwickeln und dann die Rechnungen nach den entwickelten Formeln in schematischer Anordnung durchführen.

2. Das in den §§ 22 bis 29 benutzte Beispiel ist im Anschlufs an die theoretischen Formelentwicklungen bereits in seinen einzelnen Teilen vollständig behandelt worden. Weil aber die zerstreute Behandlung der einzelnen Teile

*) Vergleiche § 37.

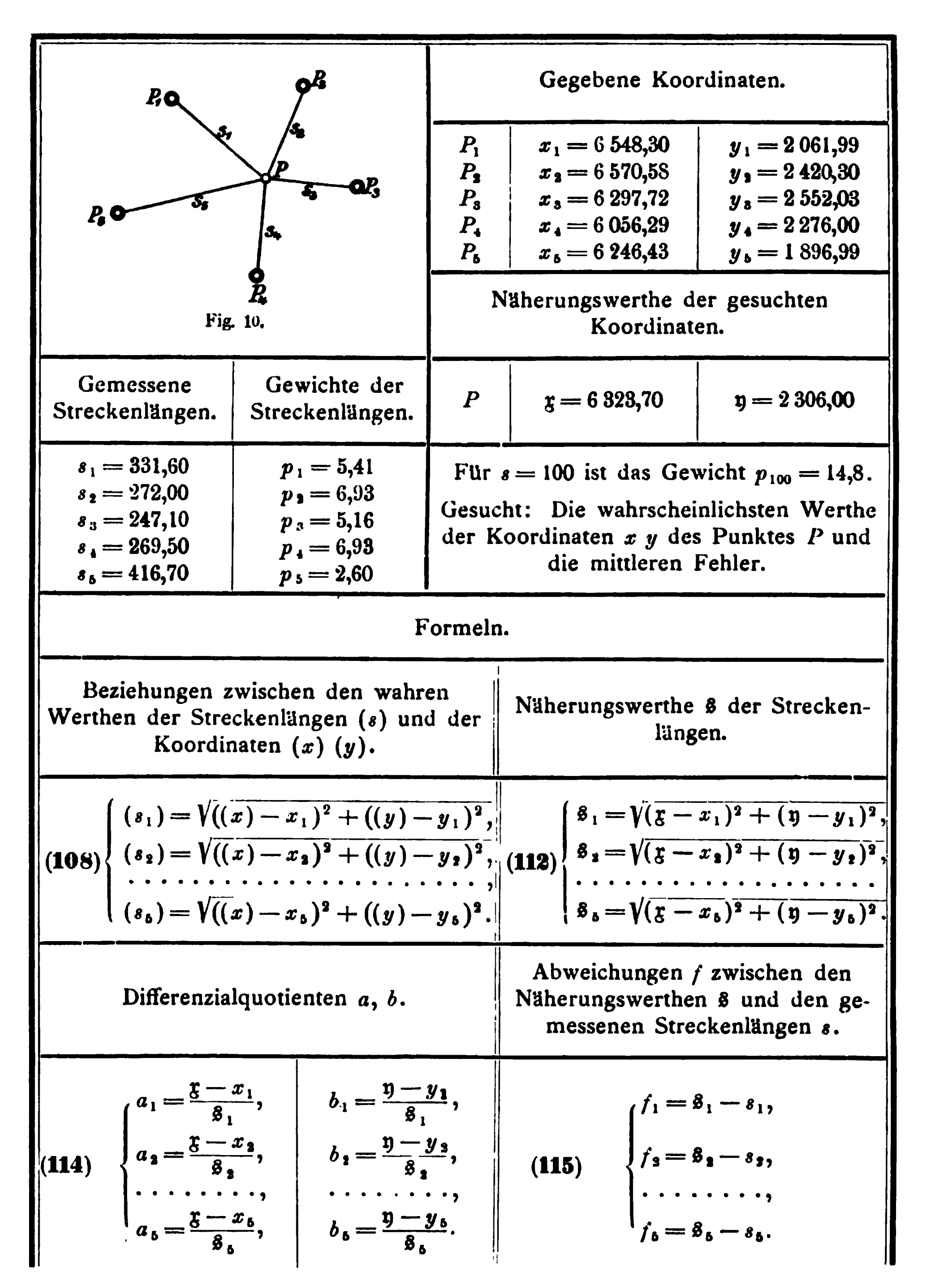


Fig. 10.

Gegebene Koordinaten.

P_1	$x_1 = 6\,548{,}30$	$y_1 = 2\,061{,}99$
P_2	$x_2 = 6\,570{,}58$	$y_2 = 2\,420{,}30$
P_3	$x_3 = 6\,297{,}72$	$y_3 = 2\,552{,}03$
P_4	$x_4 = 6\,056{,}29$	$y_4 = 2\,276{,}00$
P_5	$x_5 = 6\,246{,}43$	$y_5 = 1\,896{,}99$

Näherungswerthe der gesuchten Koordinaten.

P	$\mathfrak{x} = 6\,323{,}70$	$\mathfrak{y} = 2\,306{,}00$

Gemessene Streckenlängen.	Gewichte der Streckenlängen.
$s_1 = 331{,}60$	$p_1 = 5{,}41$
$s_2 = 272{,}00$	$p_2 = 6{,}93$
$s_3 = 247{,}10$	$p_3 = 5{,}16$
$s_4 = 269{,}50$	$p_4 = 6{,}93$
$s_5 = 416{,}70$	$p_5 = 2{,}60$

Für $s = 100$ ist das Gewicht $p_{100} = 14{,}8$.

Gesucht: Die wahrscheinlichsten Werthe der Koordinaten x y des Punktes P und die mittleren Fehler.

Formeln.

Beziehungen zwischen den wahren Werthen der Streckenlängen (s) und der Koordinaten (x) (y).

$$(108)\begin{cases} (s_1) = \sqrt{((x) - x_1)^2 + ((y) - y_1)^2}, \\ (s_2) = \sqrt{((x) - x_2)^2 + ((y) - y_2)^2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ (s_5) = \sqrt{((x) - x_5)^2 + ((y) - y_5)^2}. \end{cases}$$

Näherungswerthe $\mathfrak{s}$ der Streckenlängen.

$$(112)\begin{cases} \mathfrak{s}_1 = \sqrt{(\mathfrak{x} - x_1)^2 + (\mathfrak{y} - y_1)^2}, \\ \mathfrak{s}_2 = \sqrt{(\mathfrak{x} - x_2)^2 + (\mathfrak{y} - y_2)^2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{s}_5 = \sqrt{(\mathfrak{x} - x_5)^2 + (\mathfrak{y} - y_5)^2}. \end{cases}$$

Differenzialquotienten a, b.

$$(114)\begin{cases} a_1 = \frac{\mathfrak{x} - x_1}{\mathfrak{s}_1}, & b_1 = \frac{\mathfrak{y} - y_1}{\mathfrak{s}_1}, \\ a_2 = \frac{\mathfrak{x} - x_2}{\mathfrak{s}_2}, & b_2 = \frac{\mathfrak{y} - y_2}{\mathfrak{s}_2}, \\ \cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots, \\ a_5 = \frac{\mathfrak{x} - x_5}{\mathfrak{s}_5}, & b_5 = \frac{\mathfrak{y} - y_5}{\mathfrak{s}_5}. \end{cases}$$

Abweichungen f zwischen den Näherungswerthen $\mathfrak{s}$ und den gemessenen Streckenlängen s.

$$(115)\begin{cases} f_1 = \mathfrak{s}_1 - s_1, \\ f_2 = \mathfrak{s}_2 - s_2, \\ \cdots\cdots\cdots, \\ f_5 = \mathfrak{s}_5 - s_5. \end{cases}$$

nicht den erwünschten Ueberblick über die ganze Rechnung gewährt und weil einzelne Teile auch mit Rücksicht auf die vorhergegangenen Entwicklungen umfangreicher behandelt werden mufsten, als es bei einer lediglich auf das praktische Ziel gerichteten Durchführung nothwendig ist, lassen wir hier das ganze Beispiel nochmals im Zusammenhange folgen, in einer für die praktische Anwendung zweckmäfsigen Anordnung.

3. Oben sind zuerst die gegebenen Koordinaten, die gemessenen Strecken-

Endgleichungen.	Reduzirte Endgleichungen und Aenderungen $d\mathfrak{x}\ d\mathfrak{y}$ der Näherungswerthe $\mathfrak{x}\ \mathfrak{y}$ der Koordinaten.
(118) $\begin{cases}[paa]\,d\mathfrak{x}+[pab]\,d\mathfrak{y}+[paf]=0,\\ [pab]\,d\mathfrak{x}+[pbb]\,d\mathfrak{y}+[pbf]=0.\end{cases}$ (120) $\begin{cases}\mathfrak{a}_1=[paa],\ \mathfrak{b}_1=[pab],\ \mathfrak{f}_1=[paf],\\ \mathfrak{b}_2=[pbb],\ \mathfrak{f}_2=[pbf].\\ \mathfrak{B}_2=\mathfrak{b}_2-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1,\ \ \mathfrak{F}_2=\mathfrak{f}_2-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1.\end{cases}$	(122) $\begin{cases}\mathfrak{a}_1\,d\mathfrak{x}+\mathfrak{b}_1\,d\mathfrak{y}+\mathfrak{f}_1=0,\\ \mathfrak{B}_2\,d\mathfrak{y}+\mathfrak{F}_2=0.\end{cases}$ (123) $\begin{cases}d\mathfrak{y}=-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2},\\ d\mathfrak{x}=-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}d\mathfrak{y}-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}.\end{cases}$
Probe.	Wahrscheinlichste Werthe $x\ y$ der Koordinaten des Punktes P.
(127) $-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2=\mathfrak{f}_1\,d\mathfrak{x}+\mathfrak{f}_2\,d\mathfrak{y}=\Sigma.$	(111) $\begin{cases}x=\mathfrak{x}+d\mathfrak{x},\\ y=\mathfrak{y}+d\mathfrak{y}.\end{cases}$
Wahrscheinlichste Werthe S der Streckenlängen.	Wahrscheinlichste Werthe v der Beobachtungsfehler.
(109) $\begin{cases}S_1=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2},\\ S_2=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2},\\ \dots\dots\dots,\\ S_6=\sqrt{(x-x_6)^2+(y-y_6)^2}.\end{cases}$	(110) $\begin{cases}v_1=S_1-s_1,\\ v_2=S_2-s_2,\\ \dots\dots,\\ v_6=S_6-s_6.\end{cases}$
Aenderungen $d\mathfrak{s}$ der Näherungswerthe $\mathfrak{s}$ der Streckenlängen.	Probe.
(116) $\begin{cases}d\mathfrak{s}_1=a_1\,d\mathfrak{x}+b_1\,d\mathfrak{y},\\ d\mathfrak{s}_2=a_2\,d\mathfrak{x}+b_2\,d\mathfrak{y},\\ \dots\dots\dots,\\ d\mathfrak{s}_6=a_6\,d\mathfrak{x}+b_6\,d\mathfrak{y}.\end{cases}$	(117) $\begin{cases}v_1=f_1+d\mathfrak{s}_1,\\ v_2=f_2+d\mathfrak{s}_2,\\ \dots\dots,\\ v_6=f_6+d\mathfrak{s}_6.\end{cases}$
Schlufsprobe.	
$[pff]=p_1f_1f_1+p_2f_2f_2+\cdots+p_6f_6f_6,$ $[pvv]=p_1v_1v_1+p_2v_2v_2+\cdots+p_6v_6v_6,$ (129) $[pvv]=[pff]+\Sigma.$	
Mittlere Fehler.	
(125) $m=\pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-q}}.$ (39) $m_{\omega}=\pm\sqrt{\frac{1}{p_{\omega}}}.$ (126) $m_1=\pm m\sqrt{\frac{1}{p_1}},\quad m_2=\pm m\sqrt{\frac{1}{p_2}},\quad \dots\ m_6=\pm m\sqrt{\frac{1}{p_6}}.$	

längen mit ihren Gewichten und die genäherten Koordinaten*) zusammengestellt. Sodann folgen die Rechenformeln in der Ordnung wie sie zur Anwendung gelangen.

Auf Seite 126 und 127 folgt dann die nach diesen Formeln durchgeführte Rechnung, zu deren Erläuterung nichts mehr zu sagen ist.

---

*) Die Berechnung der genäherten Koordinaten ist [illegible] für das ganze [illegible] weggelassen.

1. Berechnung der Näherungswerthe $\mathfrak{s}$ der Streckenlängen.			2. Differenzialquotienten a, b.		3. Abweichungen f.		
	$\mathfrak{x}$. x_n. $\Delta\mathfrak{x} = \mathfrak{x} - x_n$	$\mathfrak{y}$. y_n. $\Delta\mathfrak{y} = \mathfrak{y} - y_n$.	$\Delta\mathfrak{x}\Delta\mathfrak{x}$. $\Delta\mathfrak{y}\Delta\mathfrak{y}$. $\mathfrak{s}^2 = \Delta\mathfrak{x}\Delta\mathfrak{x} + \Delta\mathfrak{y}\Delta\mathfrak{y}$.	$a = \frac{\Delta\mathfrak{x}}{\mathfrak{s}}$.	$b = \frac{\Delta\mathfrak{y}}{\mathfrak{s}}$.	$\mathfrak{s}$.	s.	$f = \mathfrak{s} - s$.
P_1	6 323,70 6 548,30 − 224,60	2 306,00 2 061,99 + 244,01	5 04 45 5 95 41 10 99 86	− 0,677	+ 0,735	331,64	331,60	+ 0,04
P_2	6 323,70 6 570,58 − 246,88	2 306,00 2 420,30 − 114,30	6 09 50 1 30 64 7 40 14	− 0,908	− 0,420	272,06	272,00	+ 0,06
P_3	6 323,70 6 297,72 + 25,98	2 306,00 2 552,03 − 246,03	6 75 6 05 31 6 12 06	+ 0,105	− 0,996	247,40	247,10	+ 0,30
P_4	6 323,70 6 056,29 + 267,41	2 306,00 2 276,00 + 30,00	7 15 08 9 00 7 24 08	+ 0,994	+ 0,111	269,09	269,50	− 0,41
P_5	6 323,70 6 246,43 + 77,27	2 306,00 1 896,99 + 409,01	59 71 16 72 89 17 32 60	+ 0,186	+ 0,983	416,25	416,70	− 0,45
				− 0,300	+ 0,413	6,44	6,90	− 0,46

4. Bildung der Factoren u. s. w. der Endgleichungen.

	p	$\sqrt{p}$.	$a\sqrt{p}$.	$b\sqrt{p}$.	$f\sqrt{p}$.	paa.	pab.	paf.	pbb.	pbf.	pff.
P_1	5,41	2,33	− 1,58	+ 1,71	+ 0,09	2,50	− 2,70	− 0,14	2,92	+ 0,15	0,01
P_2	6,93	2,63	− 2,39	− 1,10	+ 0,16	5,71	+ 2,63	− 0,38	1,21	− 0,18	0,03
P_3	5,16	2,27	+ 0,24	− 2,26	+ 0,68	0,06	− 0,54	+ 0,16	5,11	− 1,54	0,46
P_4	6,93	2,63	+ 2,61	+ 0,29	− 1,08	6,81	+ 0,76	− 2,82	0,08	− 0,31	1,17
P_5	2,60	1,61	+ 0,30	+ 1,58	− 0,72	0,09	+ 0,47	− 0,22	2,50	− 1,14	0,52
						+ 15,17	+ 0,62	− 3,40	+ 11,82	− 3,02	+ 2,19
						$[paa] = \mathfrak{a}_1$	$[pab] = \mathfrak{b}_1$	$[paf] = \mathfrak{f}_1$	$[pbb] = \mathfrak{b}_2$	$[pbf] = \mathfrak{f}_2$	$[pff]$

5. Auflösung der Endgleichungen und wahrscheinlichste Werthe xy der Koordinaten.

$\mathfrak{a}_1$	+ 15,17	$\mathfrak{b}_1$	+ 0,62	$\mathfrak{f}_1$	− 3,40	$\mathfrak{b}_2$	+ 11,82	$\mathfrak{f}_2$	− 3,02
		$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}$	− 0,041	$-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}$	+ 0,224	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1$	− 0,03	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	+ 0,14
				$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}d\mathfrak{y}$	− 0,010	$\mathfrak{B}_2$	+ 11,79	$\mathfrak{F}_2$	− 2,88
				$d\mathfrak{x}$	+ 0,214			$d\mathfrak{y} = -\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$	+ 0,244
				$\mathfrak{x} = 6\,323,70$				$\mathfrak{y} = 2\,306,00$	
				$x = 6\,323,91$				$y = 2\,306,24$	

6. Probe.

$-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	− 0,762	$\mathfrak{f}_1 d\mathfrak{x}$	− 0,728
$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	− 0,703	$\mathfrak{f}_2 d\mathfrak{y}$	− 0,737
Σ	− 1,465	Σ	− 1,465

7. Wahrscheinlichste Werthe S der Streckenlängen.			8. Fehler v.	9. Aenderungen $d\mathfrak{s}$ der Näherungswerthe $\mathfrak{s}$.			10. Probe.	11. Quadratsumme der Fehler $[pvv]$.		12. Mittlere Fehler $m = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p}}$.
$\Delta x = x - x_n$. $\Delta y = y - y_n$.	$\Delta x\ \Delta x$. $\Delta y\ \Delta y$.	$S^2 = \Delta x \Delta x + \Delta y \Delta y$. S.	$v = S - \mathfrak{s}$.	$a\,d\mathfrak{x}$	$+\ b\,dy$	$= d\mathfrak{s}$.	$v = f + d\mathfrak{s}$.	$v\sqrt{p}$.	pvv.	$\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p}}$.
224,39 244,25	5 03 50 5 96 58	11 00 08 331,67	+ 0,07	− 0,145	+ 0,179	+ 0,03	+ 0,07	+ 0,16	0,03	± 0,21
246,67 114,06	6 08 46 1 30 10	7 38 56 271,76	− 0,24	− 0,194	− 0,102	− 0,30	− 0,24	− 0,63	0,40	± 0,19
26,19 245,79	6 86 6 04 13	6 10 99 247,18	+ 0,08	+ 0,022	− 0,243	− 0,22	+ 0,08	+ 0,18	0,03	± 0,22
267,62 30,24	7 16 21 9 14	7 25 35 269,32	− 0,18	+ 0,213	+ 0,027	+ 0,24	− 0,17	− 0,45	0,20	± 0,19
77,48 409,25	60 03 16 74 85	17 34 88 416,52	− 0,18	+ 0,040	+ 0,240	+ 0,28	− 0,17	− 0,27	0,07	± 0,30
		6,45	− 0,45	− 0,064	+ 0,101	+ 0,03	− 0,43	$[pvv]$	0,73	

13. Schlufsprobe und mittlere Fehler.

$$[pvv] = [pff] + \Sigma = 2{,}19 - 1{,}46 = 0{,}73.$$

$$\mathfrak{m} = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-q}} = \pm\sqrt{\frac{0{,}73}{5-2}} = \pm 0{,}49\,\mathrm{m}. \quad \mathfrak{m}_{100} = \pm\,\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{\mathfrak{p}_{100}}} = \pm 0{,}49\sqrt{\frac{1}{14{,}8}} = \pm 0{,}13\,\mathrm{m}.$$

§ 32. Richtungsbestimmungen aus Winkelbeobachtungen.

Auf dem Punkte P = Redemoissel der Elbkette sind seitens der trigonometrischen Abtheilung der Landesaufnahme zur Bestimmung der Richtungen nach den Punkten P_1 = Glienitz, P_2 = Höhbeck, P_3 = Pugelatz, P_4 = Hohen-Bünstorf die nachstehend mitgeteilten Winkelwerthe bestimmt worden:

	P_1				P_2				P_3			
P_2	$w_{1\cdot2}$	82	47	60,833								
P_3	$w_{1\cdot3}$	195	42	46,425	$w_{2\cdot3}$	112	54	45,450				
P_4	$w_{1\cdot4}$	269	07	57,858	$w_{2\cdot4}$	186	19	57,942	$w_{3\cdot4}$	73	25	12,558

Die Winkelwerthe sind als einfaches arithmetisches Mittel aus den Ergebnissen von je 6 Doppelbeobachtungen eines Winkels gewonnen, so dafs, wenn das Gewicht einer Doppelbeobachtung eines Winkels oder einer Beobachtung einer Richtung als Gewichtseinheit genommen wird, das Gewicht der mitgeteilten Winkelwerthe $p = 6$ wird.

Es sollen die wahrscheinlichsten Werthe R_1, R_2, R_3, R_4 der Richtungen, sowie der mittlere Fehler $\mathfrak{m}$ der Gewichtseinheit und der mittlere Fehler m der Beobachtungsergebnisse berechnet werden.

1. Der wahre Werth $(w_{l.r})$ eines Winkels steht zu den wahren Werthen (R_l) und (R_r) der Richtungen des linken und rechten Winkelschenkels in der Beziehung, dafs $(w_{l.r}) = -(R_l) + (R_r)$ ist. Demnach erhalten wir für die Beziehungen zwischen den wahren Werthen der beobachteten Winkel und der zu bestimmenden Richtungen die folgenden Gleichungen:

(108)

	P_1	P_2	P_3
P_2	$(w_{1.2}) = -(R_1) + (R_2)$,		
P_3	$(w_{1.3}) = -(R_1) + (R_3)$,	$(w_{2.3}) = -(R_2) + (R_3)$,	
P_4	$(w_{1.4}) = -(R_1) + (R_4)$,	$(w_{2.4}) = -(R_2) + (R_4)$,	$(w_{3.4}) = -(R_3) + (R_4)$.

2. Hieraus folgt für die wahrscheinlichsten Werthe W der Winkel und die wahrscheinlichsten Werthe R der Richtungen:

(109)

	P_1	P_2	P_3
P_2	$W_{1.2} = -R_1 + R_2$,		
P_3	$W_{1.3} = -R_1 + R_3$,	$W_{2.3} = -R_2 + R_3$,	
P_4	$W_{1.4} = -R_1 + R_4$,	$W_{2.4} = -R_2 + R_4$,	$W_{3.4} = -R_3 + R_4$,

sowie für die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler v:

(110)

	P_1	P_2	P_3
P_2	$v_{1.2} = W_{1.2} - w_{1.2}$,		
P_3	$v_{1.3} = W_{1.3} - w_{1.3}$,	$v_{2.3} = W_{2.3} - w_{2.3}$,	
P_4	$v_{1.4} = W_{1.4} - w_{1.4}$,	$v_{2.4} = W_{2.4} - w_{2.4}$,	$v_{3.4} = W_{3.4} - w_{3.4}$.

3. Die wahrscheinlichsten Werthe R der zu bestimmenden Richtungen zerlegen wir in die Näherungswerthe $\mathfrak{r}$ und die diesen beizufügenden kleinen Aenderungen $d\mathfrak{r}$, so dafs ist:

$$
\textbf{(111)} \qquad \begin{cases} R_1 = \mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{r}_1, \\ R_2 = \mathfrak{r}_2 + d\mathfrak{r}_2, \\ R_3 = \mathfrak{r}_3 + d\mathfrak{r}_3, \\ R_4 = \mathfrak{r}_4 + d\mathfrak{r}_4. \end{cases}
$$

Die Näherungswerthe $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, $\mathfrak{r}_4$ können ohne weiteres so festgesetzt werden, dafs $\mathfrak{r}_1 = 0°00'00''$ und $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, $\mathfrak{r}_4$ gleich den auf volle Sekunden abgerundeten Winkeln $w_{1.2}$, $w_{1.3}$, $w_{1.4}$ genommen werden. Aus diesen Näherungswerthen ergeben sich dann die Näherungswerthe $\mathfrak{w}$ der Winkel nach:

(112)

	P_1	P_2	P_3
P_2	$\mathfrak{w}_{1.2} = -\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2$,		
P_3	$\mathfrak{w}_{1.3} = -\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_3$,	$\mathfrak{w}_{2.3} = -\mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_3$,	
P_4	$\mathfrak{w}_{1.4} = -\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_4$,	$\mathfrak{w}_{2.4} = -\mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_4$,	$\mathfrak{w}_{3.4} = -\mathfrak{r}_3 + \mathfrak{r}_4$.

Den kleinen Aenderungen $d\mathfrak{r}$ der Näherungswerthe der Richtungen entsprechen die kleinen Aenderungen $d\mathfrak{w}$ der Näherungswerthe der Winkel, so dafs sich die wahrscheinlichsten Werthe W der Winkel aufser nach den Formeln **(109)** auch ergeben nach:

(113)

	P_1	P_2	P_3
P_2	$W_{1\cdot2} = \mathfrak{w}_{1\cdot2} + d\mathfrak{w}_{1\cdot2}$,		
P_3	$W_{1\cdot3} = \mathfrak{w}_{1\cdot3} + d\mathfrak{w}_{1\cdot3}$,	$W_{2\cdot3} = \mathfrak{w}_{2\cdot3} + d\mathfrak{w}_{2\cdot3}$,	
P_4	$W_{1\cdot4} = \mathfrak{w}_{1\cdot4} + d\mathfrak{w}_{1\cdot4}$,	$W_{2\cdot4} = \mathfrak{w}_{2\cdot4} + d\mathfrak{w}_{2\cdot4}$,	$W_{3\cdot4} = \mathfrak{w}_{3\cdot4} + d\mathfrak{w}_{3\cdot4}$.

4. Differenziren wir die Ausdrücke (**112**) für die Näherungswerthe $\mathfrak{w}$ der Winkel nach $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, $\mathfrak{r}_4$, so erhalten wir folgende Differenzialquotienten:

(114)

$a = \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \mathfrak{r}_1}$.	$b = \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \mathfrak{r}_2}$.	$c = \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \mathfrak{r}_3}$.	$d = \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \mathfrak{r}_4}$.
$a_{1\cdot2} = -1$	$b_{1\cdot2} = +1$	$c_{1\cdot2} = 0$	$d_{1\cdot2} = 0$
$a_{1\cdot3} = -1$	$b_{1\cdot3} = 0$	$c_{1\cdot3} = +1$	$d_{1\cdot3} = 0$
$a_{1\cdot4} = -1$	$b_{1\cdot4} = 0$	$c_{1\cdot4} = 0$	$d_{1\cdot4} = +1$
$a_{2\cdot3} = 0$	$b_{2\cdot3} = -1$	$c_{2\cdot3} = +1$	$d_{2\cdot3} = 0$
$a_{2\cdot4} = 0$	$b_{2\cdot4} = -1$	$c_{2\cdot4} = 0$	$d_{2\cdot4} = +1$
$a_{3\cdot4} = 0$	$b_{3\cdot4} = 0$	$c_{3\cdot4} = -1$	$d_{3\cdot4} = +1$

Ferner ergeben sich die Abweichungen f zwischen den Näherungswerthen $\mathfrak{w}$ der Winkel und den Beobachtungsergebnissen w nach:

(115)

	P_1	P_2	P_3
P_2	$f_{1\cdot2} = \mathfrak{w}_{1\cdot2} - w_{1\cdot2}$,		
P_3	$f_{1\cdot3} = \mathfrak{w}_{1\cdot3} - w_{1\cdot3}$,	$f_{2\cdot3} = \mathfrak{w}_{2\cdot3} - w_{2\cdot3}$,	
P_4	$f_{1\cdot4} = \mathfrak{w}_{1\cdot4} - w_{1\cdot4}$,	$f_{2\cdot4} = \mathfrak{w}_{2\cdot4} - w_{2\cdot4}$,	$f_{3\cdot4} = \mathfrak{w}_{3\cdot4} - w_{3\cdot4}$.

Hiermit erhalten wir die folgenden umgeformten Fehlergleichungen:

(116)

	P_1	P_2	P_3
P_2	$d\mathfrak{w}_{1\cdot2} = -d\mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{r}_2$,		
P_3	$d\mathfrak{w}_{1\cdot3} = -d\mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{r}_3$,	$d\mathfrak{w}_{2\cdot3} = -d\mathfrak{r}_2 + d\mathfrak{r}_3$,	
P_4	$d\mathfrak{w}_{1\cdot4} = -d\mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{r}_4$,	$d\mathfrak{w}_{2\cdot4} = -d\mathfrak{r}_2 + d\mathfrak{r}_4$,	$d\mathfrak{w}_{3\cdot4} = -d\mathfrak{r}_3 + d\mathfrak{r}_4$,

(117)

	P_1	P_2	P_3
P_2	$v_{1\cdot2} = f_{1\cdot2} + d\mathfrak{w}_{1\cdot2}$,		
P_3	$v_{1\cdot3} = f_{1\cdot3} + d\mathfrak{w}_{1\cdot3}$,	$v_{2\cdot3} = f_{2\cdot3} + d\mathfrak{w}_{2\cdot3}$,	
P_4	$v_{1\cdot4} = f_{1\cdot4} + d\mathfrak{w}_{1\cdot4}$,	$v_{2\cdot4} = f_{2\cdot4} + d\mathfrak{w}_{2\cdot4}$,	$v_{3\cdot4} = f_{3\cdot4} + d\mathfrak{w}_{3\cdot4}$.

5. Mit den Differenzialquotienten a, b, c, d und den Abweichungen f ergeben sich die Faktoren und Absolutglieder der Endgleichungen, wenn wir die für alle Beobachtungsergebnisse gleichen Gewichte vorläufig gleich Eins nehmen, wie folgt:

Nr.	a.	b.	c.	d.	f.	aa.	ab.	ac.	ad.	af.	bb.	bc.	bd.	bf.	cc.	cd.	cf.	dd.	df.
1·2	−1	+1	·	·	$f_{1\cdot2}$	+1	−1	·	·	$-f_{1\cdot2}$	+1	·	·	$+f_{1\cdot2}$	·	·	·	·	·
1·3	−1	·	+1	·	$f_{1\cdot3}$	+1	·	−1	·	$-f_{1\cdot3}$	·	·	·	·	+1	·	$+f_{1\cdot3}$	·	·
1·4	−1	·	·	+1	$f_{1\cdot4}$	+1	·	·	−1	$-f_{1\cdot4}$	·	·	·	·	·	·	·	+1	$+f_{1\cdot4}$
2·3	·	−1	+1	·	$f_{2\cdot3}$	·	·	·	·	·	+1	−1	·	$-f_{2\cdot3}$	+1	·	$+f_{2\cdot3}$	·	·
2·4	·	−1	·	+1	$f_{2\cdot4}$	·	·	·	·	·	+1	·	−1	$-f_{2\cdot4}$	·	·	·	+1	$+f_{2\cdot4}$
3·4	·	·	−1	+1	$f_{3\cdot4}$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	+1	−1	$-f_{3\cdot4}$	+1	$+f_{3\cdot4}$
						+3	−1	−1	−1		+3	−1	−1		+3	−1		+3	

womit sich folgende Endgleichungen ergeben:

$$(118)\quad \begin{cases} +3\,d\mathfrak{r}_1 - d\mathfrak{r}_2 - d\mathfrak{r}_3 - d\mathfrak{r}_4 + (-f_{1\cdot 2} - f_{1\cdot 3} - f_{1\cdot 4}) = 0, \\ -\,d\mathfrak{r}_1 + 3\,d\mathfrak{r}_2 - d\mathfrak{r}_3 - d\mathfrak{r}_4 + (+f_{1\cdot 2} - f_{2\cdot 3} - f_{2\cdot 4}) = 0, \\ -\,d\mathfrak{r}_1 - d\mathfrak{r}_2 + 3\,d\mathfrak{r}_3 - d\mathfrak{r}_4 + (+f_{1\cdot 3} + f_{2\cdot 3} - f_{3\cdot 4}) = 0, \\ -\,d\mathfrak{r}_1 - d\mathfrak{r}_2 - d\mathfrak{r}_3 + 3\,d\mathfrak{r}_4 + (+f_{1\cdot 4} + f_{2\cdot 4} + f_{3\cdot 4}) = 0. \end{cases}$$

Addiren wir diese Gleichungen, so erhalten wir $0 = 0$, die Gleichungen liefern also keine bestimmten Werthe der Aenderungen $d\mathfrak{r}_1$, $d\mathfrak{r}_2$, $d\mathfrak{r}_3$, $d\mathfrak{r}_4$ und damit auch keine bestimmten Werthe der Richtungen und zwar, wie leicht zu erkennen ist, weil wir bis jetzt nicht festgesetzt haben, auf welche Anfangsrichtung wir die Richtungen beziehen wollen. Treffen wir diese Festsetzung nun in der Weise, dafs wir diejenige Anfangsrichtung nehmen, wofür die Summe der Aenderungen $d\mathfrak{r}_1$, $d\mathfrak{r}_2$, $d\mathfrak{r}_3$, $d\mathfrak{r}_4$ gleich Null ist, so erhalten wir die Gleichung:

$$d\mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{r}_2 + d\mathfrak{r}_3 + d\mathfrak{r}_4 = 0,$$

die wir zu den Endgleichungen (**118**) addiren, womit diese sich vereinfachen auf:

$$\begin{aligned} +4\,d\mathfrak{r}_1 &= +f_{1\cdot 2} + f_{1\cdot 3} + f_{1\cdot 4}, \\ +4\,d\mathfrak{r}_2 &= -f_{1\cdot 2} + f_{2\cdot 3} + f_{2\cdot 4}, \\ +4\,d\mathfrak{r}_3 &= -f_{1\cdot 3} - f_{2\cdot 3} + f_{3\cdot 4}, \\ +4\,d\mathfrak{r}_4 &= -f_{1\cdot 4} - f_{2\cdot 4} - f_{3\cdot 4}. \end{aligned}$$

6. Stellen wir die Abweichungen f wie folgt in einer Tabelle zusammen und bezeichnen die Summen der in den einzelnen Spalten stehenden Abweichungen mit s_1, s_2, s_3, s_4 und die Summen der auf den einzelnen Zeilen stehenden Abweichungen mit σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, so dafs wir folgendes haben:

	P_1	P_2	P_3	P_4	
P_1					σ_1
P_2	$+f_{1\cdot 2}$				σ_2
P_3	$+f_{1\cdot 3}$	$+f_{2\cdot 3}$			σ_3
P_4	$+f_{1\cdot 4}$	$+f_{2\cdot 4}$	$+f_{3\cdot 4}$		σ_4
	s_1	s_2	s_3	s_4	

so sind die Absolutglieder der obigen Endgleichungen:

$$\begin{aligned} +f_{1\cdot 2} + f_{1\cdot 3} + f_{1\cdot 4} &= s_1 - \sigma_1, \\ -f_{1\cdot 2} + f_{2\cdot 3} + f_{2\cdot 4} &= s_2 - \sigma_2, \\ -f_{1\cdot 3} - f_{2\cdot 3} + f_{3\cdot 4} &= s_3 - \sigma_3, \\ -f_{1\cdot 4} - f_{2\cdot 4} - f_{3\cdot 4} &= s_4 - \sigma_4, \end{aligned}$$

womit die Endgleichungen übergehen in:

$$(122)\quad \begin{cases} 4\,d\mathfrak{r}_1 = s_1 - \sigma_1, \\ 4\,d\mathfrak{r}_2 = s_2 - \sigma_2, \\ 4\,d\mathfrak{r}_3 = s_3 - \sigma_3, \\ 4\,d\mathfrak{r}_4 = s_4 - \sigma_4, \end{cases} \qquad \text{oder:}\quad (123)\quad \begin{cases} d\mathfrak{r}_1 = \dfrac{s_1 - \sigma_1}{4}, \\ d\mathfrak{r}_2 = \dfrac{s_2 - \sigma_2}{4}, \\ d\mathfrak{r}_3 = \dfrac{s_3 - \sigma_3}{4}, \\ d\mathfrak{r}_4 = \dfrac{s_4 - \sigma_4}{4}. \end{cases}$$

7. Die letzteren Formeln können verallgemeinert werden für alle Fälle, in denen, wie hier, die Winkel gleich genau beobachtet worden sind, die sich aus allen möglichen Kombinationen je zweier der zu bestimmenden Richtungen ergeben. Wie leicht zu übersehen ist, ist der Divisor in den Formeln für $d\mathfrak{r}$ immer gleich der Anzahl ν der zu bestimmenden Richtungen, und die Absolutglieder der Endgleichungen werden immer richtig aus den Differenzen $s - \sigma$ der Summen s und σ erhalten, wenn diese aus den Abweichungen f gebildet werden, wie oben gezeigt ist, so dafs allgemein $d\mathfrak{r} = \dfrac{s - \sigma}{\nu}$ ist.

8. Die Anzahl der Kombinationen zu zweien ist für ν Elemente gleich $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$. Demnach werden bei dem hier behandelten Verfahren zur Bestimmung von ν Richtungen $n=\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$ Winkel beobachtet. Zur einfachen, nicht versicherten Bestimmung von ν Richtungen sind $q=\nu-1$ Winkel erforderlich, wonach die Anzahl der überschüssigen Winkel $n-q=\frac{1}{2}\nu(\nu-1)-(\nu-1)$ $=\frac{1}{2}(\nu-2)(\nu-1)$ ist. Demnach erhalten wir für den mittleren Fehler $\mathfrak{m}$ der Gewichtseinheit, da alle Winkel das gleiche Gewicht p haben,:

(125) $$\mathfrak{m}=\pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-q}}=\pm\sqrt{\frac{p[vv]}{\frac{1}{2}(\nu-2)(\nu-1)}},$$

oder in unserm Falle, wo $p=6$, $\nu=4$, also $\frac{1}{2}(\nu-2)(\nu-1)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3$ ist:

$$\mathfrak{m}=\pm\sqrt{\frac{6[vv]}{3}}=\pm\sqrt{2[vv]}.$$

Der mittlere Fehler m der Beobachtungsergebnisse, deren Gewicht p ist, wird:

(126) $$m=\pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p}}=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{\frac{1}{2}(\nu-2)(\nu-1)}},$$

oder in unserm Falle:

$$m=\pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{6}}=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{3}}.$$

9. Die allgemeine Form der vereinfachten Endgleichungen ist, wenn wir in diese die Gewichte p einführen,:

(118) $$\begin{cases} \nu p\,d\mathfrak{r}_1=p(s_1-\sigma_1), \\ \nu p\,d\mathfrak{r}_2=p(s_2-\sigma_2), \\ \nu p\,d\mathfrak{r}_3=p(s_3-\sigma_3), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Demnach ist:

(120a) $$\begin{cases} \mathfrak{a}_1=+\nu p,\ \mathfrak{b}_1=0,\quad \mathfrak{c}_1=0,\quad \ldots,\ \mathfrak{f}_1=-p(s_1-\sigma_1), \\ \qquad\qquad \mathfrak{b}_2=+\nu p,\ \mathfrak{c}_2=0,\quad \ldots,\ \mathfrak{f}_2=-p(s_2-\sigma_2), \\ \qquad\qquad\qquad \mathfrak{c}_3=+\nu p,\ \ldots,\ \mathfrak{f}_3=-p(s_3-\sigma_3), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots,\ \ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

und damit wird:

(120b) $$\begin{cases} \mathfrak{B}_2=\mathfrak{b}_2=+\nu p,\ \mathfrak{C}_2=0,\quad \ldots,\ \mathfrak{F}_2=\mathfrak{f}_2=-p(s_2-\sigma_2), \\ \qquad \mathfrak{C}_3=\mathfrak{c}_3=+\nu p,\ \ldots,\ \mathfrak{F}_3=\mathfrak{f}_3=-p(s_3-\sigma_3), \\ \qquad\qquad \ldots,\ \ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

ferner:

(127) $$\begin{aligned} \Sigma &= -\frac{p(s_1-\sigma_1)}{\nu p}p(s_1-\sigma_1)-\frac{p(s_2-\sigma_2)}{\nu p}p(s_2-\sigma_2) \\ &\quad -\frac{p(s_3-\sigma_3)}{\nu p}p(s_3-\sigma_3)-\ldots \\ &= -\frac{p}{\nu}\left((s_1-\sigma_1)^2+(s_2-\sigma_2)^2+(s_3-\sigma_3)^2+\cdots\right)=-\frac{p}{\nu}[(s-\sigma)^2], \end{aligned}$$

endlich:

(129) $$[pvv]=p[vv]=[pff]+\Sigma=p[ff]-\frac{p}{\nu}[(s-\sigma)^2]=p\left([ff]-\frac{[(s-\sigma)^2]}{\nu}\right).$$

10. Hiernach gestaltet sich die Rechnung wie folgt:

	P_1.			P_2.			P_3.			P_4.			Summe.
	°	'	"	°	'	"	°	'	"	°	'	"	
1. Gemessene Winkel w.													
P_2	82	47	60,833										
P_3	195	42	46,425	112	54	45,450							
P_4	269	07	57,858	186	19	57,942	73	25	12,558				
			45,116			43,392			12,558				
2. Näherungswerthe $\mathfrak{r}$ der Richtungen.													
	0	00	00	82	47	61	195	42	46	269	07	58	45"
3. Näherungswerthe $\mathfrak{w}$ der Winkel. (Formel 112.)													
P_2	82	47	61										
P_3	195	42	46	112	54	45							
P_4	269	07	58	186	19	57	73	25	12				
			45			42			12				
4. Abweichungen $f = \mathfrak{w} - w$. (Formel 115.)													$\sigma =$
P_1													0,000
P_2			+ 0,167										+ 0,167
P_3			− 0,425			− 0,450							− 0,875
P_4			+ 0,142			− 0,942			− 0,558				− 1,358
s			− 0,116			− 1,392			− 0,558			0,000	− 2,066
$-\sigma$			0,000			− 0,167			+ 0,875			+ 1,358	+ 2,066
$s-\sigma$			− 0,116			− 1,559			+ 0,317			+ 1,358	0,000
5. Aenderungen $d\mathfrak{r} = \frac{1}{4}(s-\sigma)$ der Näherungswerthe $\mathfrak{r}$. (Formel 123.)													
			− 0,029			− 0,390			+ 0,079			+ 0,340	0,000
6. Wahrscheinlichste Werthe $R = \mathfrak{r} + d\mathfrak{r}$ der Richtungen. (Formel 111.)													
	359	59	59,971	82	47	60,610	195	42	46,079	269	07	58,340	45,000
7. Wahrscheinlichste Werthe W der Winkel. (Formel 109.)													
P_2	82	47	60,639										
P_3	195	42	46,108	112	54	45,469							
P_4	269	07	58,369	186	19	57,730	73	25	12,261				
			45,116			43,199			12,261				
8. Wahrscheinlichste Beobachtungsfehler $v = W - w$. (Formel 110.)													
P_1													0,000
P_2			− 0,194										− 0,194
P_3			− 0,317			+ 0,019							− 0,298
P_4			+ 0,511			− 0,212			− 0,297				+ 0,002
			0,000			− 0,193			− 0,297			0,000	− 0,490
9. Aenderungen $d\mathfrak{w}$ der Näherungswerthe $\mathfrak{w}$ der Winkel. (Formel 116.)													
P_2			− 0,361										
P_3			+ 0,108			+ 0,469							
P_4			+ 0,369			+ 0,730			+ 0,261				
			+ 0,116			+ 1,199			+ 0,261				

	P_1. ° ′ ″	P_2. ° ′ ″	P_3. ° ′ ″	P_4. ° ′ ″	Summe.
	10. Wahrscheinlichste Beobachtungsfehler $v = f + dw$. (Formel 117.)				
P_2	−0,194				
P_3	−0,317	+0,019			
P_4	+0,511	−0,212	−0,297		
	0,000	−0,193	−0,297		
	11. Quadratsumme $[ff]$ der Abweichungen f.				
P_2	0,028				0,028
P_3	0,181	0,202			0,383
P_4	0,020	0,887	0,311		1,218
	0,229	1,089	0,311		1,629
	12. Quadratsumme $[vv]$ der wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler v.				
P_2	0,038				0,038
P_3	0,100	0,000			0,100
P_4	0,261	0,045	0,088		0,394
	0,399	0,045	0,088		0,532
	13. Summe $\frac{\Sigma}{p} = -\frac{1}{4}[(s-\sigma)^2]$. (Formel 127.)				
	−0,003	−0,608	−0,025	−0,461	−1,097

14. Schlufsprobe und mittlere Fehler.

(129) $$[vv] = [ff] - \frac{1}{4}[(s-\sigma)^2] = 1{,}629 - 1{,}097 = 0{,}532.$$

(125) $$m = \pm\sqrt{2[vv]} = \pm\sqrt{1{,}064} = \pm 1{,}03''.$$

(126) $$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{3}} = \pm\sqrt{0{,}177} = \pm 0{,}42''.$$

11. Für die Richtigkeit der Rechnungen ergeben sich zahlreiche Proben, denn, wie leicht zu übersehen ist, mufs sein:

$$\left.\begin{aligned}[r] &= [w_1] = [R],\\ [W_1] &= [r] - (s_1 - \sigma_1),\\ [dw_1] &= -(s_1 - \sigma_1),\end{aligned}\right\}$$ unter $[w_1]$ und $[W_1]$ die Summe der Winkelwerthe und unter $[dw_1]$ die Summe der Aenderungen dw in der ersten Spalte verstanden,

$$w_{2\cdot4} - w_{2\cdot3} = w_{3\cdot4},$$
$$W_{2\cdot4} - W_{2\cdot3} = W_{3\cdot4},$$
$$dw_{2\cdot4} - dw_{2\cdot3} = dw_{3\cdot4},$$

$$\left.\begin{aligned}[w] - [w] &= [f] = s,\\ [W] - [w] &= [v],\\ [f] + [dw] &= [v],\end{aligned}\right\}$$ in jeder Spalte,

$$[s - \sigma] = 0 \text{ und } [dr] = 0,$$

(128) $$\left\{\begin{aligned} -v_{1\cdot2} - v_{1\cdot3} - v_{1\cdot4} &= 0,\\ +v_{1\cdot2} - v_{2\cdot3} - v_{2\cdot4} &= 0,\\ +v_{1\cdot3} + v_{2\cdot3} - v_{3\cdot4} &= 0,\\ +v_{1\cdot4} + v_{2\cdot4} + v_{3\cdot4} &= 0,\end{aligned}\right\}$$ oder die Spaltensumme der wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler ist gleich ihrer Zeilensumme.

Durch die Proben kann die Richtigkeit der Rechnung in jeder Abtheilung gesichert werden und defshalb kann die Rechnung bei der praktischen Anwendung des Verfahrens erheblich abgekürzt werden.

12. In den Rechnungen der trigonometrischen Abtheilung der Landesaufnahme wird nicht, wie es hier geschehen ist, das arithmetische Mittel w aller aus den Beobachtungen gewonnenen Winkelwerthe als Beobachtungsergebnis eingeführt, sondern die Summe der Satzmittel $(=pw)$, unter Satzmittel das Mittel aus dem Ergebnis einer im Hingang und einer im Rückgang gemachten Beobachtung verstanden. Ferner wird in diesen Rechnungen die Quadratsumme der wahrscheinlichsten Werthe der Beobachtungsfehler gebildet aus den Abweichungen der wahrscheinlichsten Werthe der Winkel W von den einzelnen Satzmitteln.

13. Aus den Gleichungen (**128**) wird mit den unter Nr. 4 erhaltenen Zahlenwerthen der Differenzialquotienten a, b, c, d, wie bereits unter Nr. 11 angeführt ist,:

$$
\begin{aligned}
-v_{1\cdot 2}-v_{1\cdot 3}-v_{1\cdot 4}&=0,\\
+v_{1\cdot 2}-v_{2\cdot 3}-v_{2\cdot 4}&=0,\\
+v_{1\cdot 3}+v_{2\cdot 3}-v_{3\cdot 4}&=0,\\
+v_{1\cdot 4}+v_{2\cdot 4}+v_{3\cdot 4}&=0.
\end{aligned}
$$

Setzen wir in diese Gleichungen für $v_{l\cdot r}$ die Werthe $-R_l+R_r-w_{l\cdot r}$, die sich nach den unter Nr. 2 erhaltenen Fehlergleichungen (**109**) und (**110**) ergeben, so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
+R_1-R_2+w_{1\cdot 2}+R_1-R_3+w_{1\cdot 3}+R_1-R_4+w_{1\cdot 4}&=0,\\
-R_1+R_2-w_{1\cdot 2}+R_2-R_3+w_{2\cdot 3}+R_2-R_4+w_{2\cdot 4}&=0,\\
-R_1+R_3-w_{1\cdot 3}-R_2+R_3-w_{2\cdot 3}+R_3-R_4+w_{3\cdot 4}&=0,\\
-R_1+R_4-w_{1\cdot 4}-R_2+R_4-w_{2\cdot 4}-R_3+R_4-w_{3\cdot 4}&=0.
\end{aligned}
$$

Addiren wir nun zur ersten Gleichung $+R_1-R_1=0$, zur zweiten $+R_2-R_2=0$, zur dritten $+R_3-R_3=0$, zur vierten $+R_4-R_4=0$ und setzen die Anfangsrichtung, worauf die wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen bezogen werden, derart fest, dafs $R_1+R_2+R_3+R_4=0$ wird, so wird:

$$
\begin{aligned}
4R_1&=-w_{1\cdot 2}-w_{1\cdot 3}-w_{1\cdot 4},\\
4R_2&=+w_{1\cdot 2}-w_{2\cdot 3}-w_{2\cdot 4},\\
4R_3&=+w_{1\cdot 3}+w_{2\cdot 3}-w_{3\cdot 4},\\
4R_4&=+w_{1\cdot 4}+w_{2\cdot 4}+w_{3\cdot 4}.
\end{aligned}
$$

Hiernach ergeben sich die wahrscheinlichsten Werthe R_1, R_2, R_3, R_4 der Richtungen, wenn wir die Winkel wie folgt tabellarisch zusammenstellen

	P_1.	P_2.	P_3.	P_4.
P_1	.	$-w_{1\cdot 2}$	$-w_{1\cdot 3}$	$-w_{1\cdot 4}$
P_2	$+w_{1\cdot 2}$	.	$-w_{2\cdot 3}$	$-w_{2\cdot 4}$
P_3	$+w_{1\cdot 3}$	$+w_{2\cdot 3}$	.	$-w_{3\cdot 4}$
P_4	$+w_{1\cdot 4}$	$+w_{2\cdot 4}$	$+w_{3\cdot 4}$	.

in einfachster Weise als arithmetisches Mittel der auf den einzelnen Zeilen stehenden Winkelwerthe.*)

14. Wenn nicht die sämtlichen Winkel beobachtet worden sind, die sich aus den $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$ Kombinationen der Richtungen ergeben, sondern irgend welche Winkel, so werden diese zweckmäfsig ebenso behandelt, wie im folgenden § 35

*) Vergl. Gaufs, Die trig. u. polyg. Rechnungen u. s. w. 2. Aufl., I. Teil, S. 208 u. 209.

die Höhenunterschiede im Nivellementsnetze. Die dort unter Nr. 8 gegebenen mechanischen Regeln zur Bildung der Faktoren und Absolutglieder der Endgleichungen gelten für Winkel $w_{a \cdot b}$, $w_{a \cdot c}$, $w_{a \cdot d}$, ..., die zur Bestimmung der Richtungen R_a, R_b, R_c, ... nach den Punkten P_a, P_b, P_c, ... beobachtet worden sind, in folgender Fassung:

a) $[paa]$, $[pbb]$, $[pcc]$, $[pdd]$, ... sind gleich der Summe der Gewichte derjenigen Winkel, deren einer Schenkel die Richtung nach einem der Punkte P_a, P_b, P_c, P_d, ... ist;

b) $[pab]$, $[pac]$, $[pad]$, ...; $[pbc]$, $[pbd]$, ...; $[pcd]$, ...; .... sind gleich den negativen Gewichten der Winkel $w_{a \cdot b}$, $w_{a \cdot c}$, $w_{a \cdot d}$, ...; $w_{b \cdot c}$, $w_{b \cdot d}$, ...; $w_{c \cdot d}$, ...; ...;

c) für $[paf]$, $[pbf]$, $[pcf]$, $[pdf]$, ... sind die Produkte pf für sämtliche Winkel anzusetzen, deren einer Schenkel die Richtung nach einem der Punkte P_a, P_b, P_c, P_d, ... ist, und zwar mit dem Vorzeichen von f, wenn die betreffende Richtung der rechte Winkelschenkel ist, dagegen mit dem entgegengesetzten Vorzeichen von f, wenn die betreffende Richtung der linke Winkelschenkel ist.*)

§ 33. Richtungsbestimmungen aus Richtungssätzen.

1. Verfahren.

Bei einer Triangulation sind auf dem ♁ 37 die Richtungen nach den ♁♁ 40, 51, 35, 46, 42, 52 in 4 Richtungssätzen mit gleicher Genauigkeit beobachtet worden, so dafs das Gewicht der Beobachtung einer jeden Richtung in einem Satze = 1 ist. Die aus den Ablesungen abgeleiteten Satzmittel sind:

	Satz I.				Satz II.				Satz III.				Satz IV.			
		°	'	"		°	'	"		°	'	"		°	'	"
P_1 = ♁ 40	s_1^I	28	30	42	s_1^{II}	73	25	30	.	.	.	.	s_1^{IV}	163	28	30
P_2 = ♁ 51	.	.	.	.	s_2^{II}	142	28	22	s_2^{III}	187	35	20	s_2^{IV}	232	31	45
P_3 = ♁ 35	s_3^I	122	17	40	s_3^{II}	167	12	07	s_3^{III}	212	19	23	.	.	.	.
P_4 = ♁ 46	.	.	.	.	s_4^{II}	201	16	02	s_4^{III}	246	22	40	s_4^{IV}	291	18	58
P_5 = ♁ 42	s_5^I	185	35	47	s_5^{II}	230	29	47	s_5^{III}	275	37	03	.	.	.	.
P_6 = ♁ 52	s_6^I	221	15	50	.	.	.	.	s_6^{III}	311	16	53	s_6^{IV}	356	13	38
	$[s^I]$		39	59	$[s^{II}]$		51	48	$[s^{III}]$		11	19	$[s^{IV}]$		32	51

Es sollen die wahrscheinlichsten Werthe r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 der Richtungen und der mittlere Fehler $\mathfrak{m} = m$ einer einmal beobachteten Richtung berechnet werden.

1. Die einzelnen Richtungssätze sind in verschiedenen Lagen des Teilkreises beobachtet worden, so dafs also die Nullrichtung des Teilkreises für alle Sätze verschieden ist. Um aus den vorliegenden Beobachtungsergebnissen zuerst Richtungen zu erhalten, die sich auf eine gemeinschaftliche Nullrichtung beziehen, müssen von den Beobachtungsergebnissen die Orientirungswinkel subtrahirt werden, die die Nullrichtung des Teilkreises bei den verschiedenen Lagen des Teilkreises mit der Richtung nach irgend einem für alle Sätze gleichen Punkte bildet.

*) Vergl. Gaufs, Die trig. und polyg. Rechnungen u. s. w. 2. Aufl. I. Teil, S. 214 u. f.

Diese Orientirungswinkel sind uns unbekannt, ihre wahrscheinlichsten Werthe o^I, o^{II}, o^{III}, o^{IV} müssen daher aus den Beobachtungsergebnissen mit abgeleitet werden.

2. Zwischen den wahren Werthen der Beobachtungsergebnisse (s) und den wahren Werthen der zu bestimmenden Gröſsen (r) und (o), besteht also allgemein die Beziehung, daſs $(s)-(o)=(r)$, oder $(s)=(r)+(o)$ ist.

Demnach erhalten wir für unser Beispiel die folgenden Gleichungen für die Beziehungen zwischen den wahren Werthen der beobachteten und der zu bestimmenden Gröſsen:

(108)

	Satz I.	Satz II.	Satz III.	Satz IV.
P_1	$(s_1^I)=(r_1)+(o^I)$,	$(s_1^{II})=(r_1)+(o^{II})$,	.	$(s_1^{IV})=(r_1)+(o^{IV})$,
P_2	.	$(s_2^{II})=(r_2)+(o^{II})$,	$(s_2^{III})=(r_2)+(o^{III})$,	$(s_2^{IV})=(r_2)+(o^{IV})$,
P_3	$(s_3^I)=(r_3)+(o^I)$,	$(s_3^{II})=(r_3)+(o^{II})$,	$(s_3^{III})=(r_3)+(o^{III})$,	.
P_4	.	$(s_4^{II})=(r_4)+(o^{II})$,	$(s_4^{III})=(r_4)+(o^{III})$,	$(s_4^{IV})=(r_4)+(o^{IV})$,
P_5	$(s_5^I)=(r_5)+(o^I)$,	$(s_5^{II})=(r_5)+(o^{II})$,	$(s_5^{III})=(r_5)+(o^{III})$,	.
P_6	$(s_6^I)=(r_6)+(o^I)$,	.	$(s_6^{III})=(r_6)+(o^{III})$,	$(s_6^{IV})=(r_6)+(o^{IV})$.

3. Hieraus folgen die Fehlergleichungen:

(109)

	Satz I.	Satz II.	Satz III.	Satz IV.
P_1	$S_1^I=r_1+o^I$,	$S_1^{II}=r_1+o^{II}$,	.	$S_1^{IV}=r_1+o^{IV}$,
P_2	.	$S_2^{II}=r_2+o^{II}$,	$S_2^{III}=r_2+o^{III}$,	$S_2^{IV}=r_2+o^{IV}$,
P_3	$S_3^I=r_3+o^I$,	$S_3^{II}=r_3+o^{II}$,	$S_3^{III}=r_3+o^{III}$,	.
P_4	.	$S_4^{II}=r_4+o^{II}$,	$S_4^{III}=r_4+o^{III}$,	$S_4^{IV}=r_4+o^{IV}$,
P_5	$S_5^I=r_5+o^I$,	$S_5^{II}=r_5+o^{II}$,	$S_5^{III}=r_5+o^{III}$,	.
P_6	$S_6^I=r_6+o^I$,	.	$S_6^{III}=r_6+o^{III}$,	$S_6^{IV}=r_6+o^{IV}$,

(110)

	Satz I.	Satz II.	Satz III.	Satz IV.
P_1	$v_1^I=S_1^I-s_1^I$,	$v_1^{II}=S_1^{II}-s_1^{II}$,	.	$v_1^{IV}=S_1^{IV}-s_1^{IV}$,
P_2	.	$v_2^{II}=S_2^{II}-s_2^{II}$,	$v_2^{III}=S_2^{III}-s_2^{III}$,	$v_2^{IV}=S_2^{IV}-s_2^{IV}$,
P_3	$v_3^I=S_3^I-s_3^I$,	$v_3^{II}=S_3^{II}-s_3^{II}$,	$v_3^{III}=S_3^{III}-s_3^{III}$,	.
P_4	.	$v_4^{II}=S_4^{II}-s_4^{II}$,	$v_4^{III}=S_4^{III}-s_4^{III}$,	$v_4^{IV}=S_4^{IV}-s_4^{IV}$,
P_5	$v_5^I=S_5^I-s_5^I$,	$v_5^{II}=S_5^{II}-s_5^{II}$,	$v_5^{III}=S_5^{III}-s_5^{III}$,	.
P_6	$v_6^I=S_6^I-s_6^I$,	.	$v_6^{III}=S_6^{III}-s_6^{III}$,	$v_6^{IV}=S_6^{IV}-s_6^{IV}$.

4. Wir zerlegen nun die wahrscheinlichsten Werthe r und o der zu bestimmenden Gröſsen in die Näherungswerthe $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{o}$ und in die diesen beizufügenden kleinen Aenderungen $d\mathfrak{r}$ und $d\mathfrak{o}$, setzen also:

$$(111)\qquad \begin{cases} r_1=\mathfrak{r}_1+d\mathfrak{r}_1, \\ r_2=\mathfrak{r}_2+d\mathfrak{r}_2, \\ r_3=\mathfrak{r}_3+d\mathfrak{r}_3, \\ r_4=\mathfrak{r}_4+d\mathfrak{r}_4, \\ r_5=\mathfrak{r}_5+d\mathfrak{r}_5, \\ r_6=\mathfrak{r}_6+d\mathfrak{r}_6, \end{cases} \qquad \begin{aligned} o^I &= \mathfrak{o}^I+d\mathfrak{o}^I, \\ o^{II} &= \mathfrak{o}^{II}+d\mathfrak{o}^{II}, \\ o^{III} &= \mathfrak{o}^{III}+d\mathfrak{o}^{III}, \\ o^{IV} &= \mathfrak{o}^{IV}+d\mathfrak{o}^{IV}. \end{aligned}$$

5. Mit diesen Näherungswerthen der zu bestimmenden Richtungen ergeben sich die Näherungswerthe $\mathfrak{s}$ der beobachteten Satzmittel nach:

(112)

	Satz I.	Satz II.	Satz III.	Satz IV.
P_1	$\mathfrak{s}_1^I = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{o}^I$,	$\mathfrak{s}_1^{II} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{o}^{II}$,	.	$\mathfrak{s}_1^{IV} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{o}^{IV}$,
P_2	.	$\mathfrak{s}_2^{II} = \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{o}^{II}$,	$\mathfrak{s}_2^{III} = \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{o}^{III}$,	$\mathfrak{s}_2^{IV} = \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{o}^{IV}$,
P_3	$\mathfrak{s}_3^I = \mathfrak{r}_3 + \mathfrak{o}^I$,	$\mathfrak{s}_3^{II} = \mathfrak{r}_3 + \mathfrak{o}^{II}$,	$\mathfrak{s}_3^{III} = \mathfrak{r}_3 + \mathfrak{o}^{III}$,	.
P_4	.	$\mathfrak{s}_4^{II} = \mathfrak{r}_4 + \mathfrak{o}^{II}$,	$\mathfrak{s}_4^{III} = \mathfrak{r}_4 + \mathfrak{o}^{III}$,	$\mathfrak{s}_4^{IV} = \mathfrak{r}_4 + \mathfrak{o}^{IV}$,
P_5	$\mathfrak{s}_5^I = \mathfrak{r}_5 + \mathfrak{o}^I$,	$\mathfrak{s}_5^{II} = \mathfrak{r}_5 + \mathfrak{o}^{II}$,	$\mathfrak{s}_5^{III} = \mathfrak{r}_5 + \mathfrak{o}^{III}$,	.
P_6	$\mathfrak{s}_6^I = \mathfrak{r}_6 + \mathfrak{o}^I$,	.	$\mathfrak{s}_6^{III} = \mathfrak{r}_6 + \mathfrak{o}^{III}$,	$\mathfrak{s}_6^{IV} = \mathfrak{r}_6 + \mathfrak{o}^{IV}$.

6. Differenziren wir diese Ausdrücke für die Näherungswerthe $\mathfrak{s}$ nach $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{o}$, so erhalten wir folgende Differenzialquotienten:

(114)

	Satz I.	Satz II.	Satz III.	Satz IV.
P_1	$a_1^I = \frac{\partial F_1^I}{\partial \mathfrak{r}_1} = +1$,	$a_1^{II} = \frac{\partial F_1^{II}}{\partial \mathfrak{r}_1} = +1$,	.	$a_1^{IV} = \frac{\partial F_1^{IV}}{\partial \mathfrak{r}_1} = +1$,
P_2	.	$b_2^{II} = \frac{\partial F_2^{II}}{\partial \mathfrak{r}_2} = +1$,	$b_2^{III} = \frac{\partial F_2^{III}}{\partial \mathfrak{r}_2} = +1$,	$b_2^{IV} = \frac{\partial F_2^{IV}}{\partial \mathfrak{r}_2} = +1$,
P_3	$c_3^I = \frac{\partial F_3^I}{\partial \mathfrak{r}_3} = +1$,	$c_3^{II} = \frac{\partial F_3^{II}}{\partial \mathfrak{r}_3} = +1$,	$c_3^{III} = \frac{\partial F_3^{III}}{\partial \mathfrak{r}_3} = +1$,	.
P_4	.	$d_4^{II} = \frac{\partial F_4^{II}}{\partial \mathfrak{r}_4} = +1$,	$d_4^{III} = \frac{\partial F_4^{III}}{\partial \mathfrak{r}_4} = +1$,	$d_4^{IV} = \frac{\partial F_4^{IV}}{\partial \mathfrak{r}_4} = +1$,
P_5	$e_5^I = \frac{\partial F_5^I}{\partial \mathfrak{r}_5} = +1$,	$e_5^{II} = \frac{\partial F_5^{II}}{\partial \mathfrak{r}_5} = +1$,	$e_5^{III} = \frac{\partial F_5^{III}}{\partial \mathfrak{r}_5} = +1$,	.
P_6	$g_6^I = \frac{\partial F_6^I}{\partial \mathfrak{r}_6} = +1$,	.	$g_6^{III} = \frac{\partial F_6^{III}}{\partial \mathfrak{r}_6} = +1$,	$g_6^{IV} = \frac{\partial F_6^{IV}}{\partial \mathfrak{r}_6} = +1$,
P_1	$h_1^I = \frac{\partial F_1^I}{\partial \mathfrak{o}^I} = +1$,	$i_1^{II} = \frac{\partial F_1^{II}}{\partial \mathfrak{o}^{II}} = +1$,	.	$l_1^{IV} = \frac{\partial F_1^{IV}}{\partial \mathfrak{o}^{IV}} = +1$,
P_2	.	$i_2^{II} = \frac{\partial F_2^{II}}{\partial \mathfrak{o}^{II}} = +1$,	$k_2^{III} = \frac{\partial F_2^{III}}{\partial \mathfrak{o}^{III}} = +1$,	$l_2^{IV} = \frac{\partial F_2^{IV}}{\partial \mathfrak{o}^{IV}} = +1$,
P_3	$h_3^I = \frac{\partial F_3^I}{\partial \mathfrak{o}^I} = +1$,	$i_3^{II} = \frac{\partial F_3^{II}}{\partial \mathfrak{o}^{II}} = +1$,	$k_3^{III} = \frac{\partial F_3^{III}}{\partial \mathfrak{o}^{III}} = +1$,	.
P_4	.	$i_4^{II} = \frac{\partial F_4^{II}}{\partial \mathfrak{o}^{II}} = +1$,	$k_4^{III} = \frac{\partial F_4^{III}}{\partial \mathfrak{o}^{III}} = +1$,	$l_4^{IV} = \frac{\partial F_4^{IV}}{\partial \mathfrak{o}^{IV}} = +1$,
P_5	$h_5^I = \frac{\partial F_5^I}{\partial \mathfrak{o}^I} = +1$,	$i_5^{II} = \frac{\partial F_5^{II}}{\partial \mathfrak{o}^{II}} = +1$,	$k_5^{III} = \frac{\partial F_5^{III}}{\partial \mathfrak{o}^{III}} = +1$,	.
P_6	$h_6^I = \frac{\partial F_6^I}{\partial \mathfrak{o}^I} = +1$,	.	$k_6^{III} = \frac{\partial F_6^{III}}{\partial \mathfrak{o}^{III}} = +1$,	$l_6^{IV} = \frac{\partial F_6^{IV}}{\partial \mathfrak{o}^{IV}} = +1$.

7. Die Abweichungen f zwischen den Näherungswerthen $\mathfrak{s}$ der beobachteten Gröſsen und den Beobachtungsergebnissen s sind:

(115)

	Satz I.	Satz II.	Satz III.	Satz IV.
P_1	$f_1^I = \mathfrak{s}_1^I - s_1^I$,	$f_1^{II} = \mathfrak{s}_1^{II} - s_1^{II}$,	.	$f_1^{IV} = \mathfrak{s}_1^{IV} - s_1^{IV}$,
P_2	.	$f_2^{II} = \mathfrak{s}_2^{II} - s_2^{II}$,	$f_2^{III} = \mathfrak{s}_2^{III} - s_2^{III}$,	$f_2^{IV} = \mathfrak{s}_2^{IV} - s_2^{IV}$,
P_3	$f_3^I = \mathfrak{s}_3^I - s_3^I$,	$f_3^{II} = \mathfrak{s}_3^{II} - s_3^{II}$,	$f_3^{III} = \mathfrak{s}_3^{III} - s_3^{III}$,	.
P_4	.	$f_4^{II} = \mathfrak{s}_4^{II} - s_4^{II}$,	$f_4^{III} = \mathfrak{s}_4^{III} - s_4^{III}$,	$f_4^{IV} = \mathfrak{s}_4^{IV} - s_4^{IV}$,
P_5	$f_5^I = \mathfrak{s}_5^I - s_5^I$,	$f_5^{II} = \mathfrak{s}_5^{II} - s_5^{II}$,	$f_5^{III} = \mathfrak{s}_5^{III} - s_5^{III}$,	.
P_6	$f_6^I = \mathfrak{s}_6^I - s_6^I$,	.	$f_6^{III} = \mathfrak{s}_6^{III} - s_6^{III}$,	$f_6^{IV} = \mathfrak{s}_6^{IV} - s_6^{IV}$.

8. Hiermit ergeben sich die, der nachfolgenden Reduktion wegen, gleich zusammengefafsten umgeformten Fehlergleichungen (**116**) und (**117**):

(**116**) und (**117**)

Satz.	P_1.	P_3.	P_5.
I	$v_1^I = f_1^I + d\mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{o}^I$,	$v_3^I = f_3^I + d\mathfrak{r}_3 + d\mathfrak{o}^I$,	$v_5^I = f_5^I + d\mathfrak{r}_5 + d\mathfrak{o}^I$,
II	$v_1^{II} = f_1^{II} + d\mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{o}^{II}$,	$v_3^{II} = f_3^{II} + d\mathfrak{r}_3 + d\mathfrak{o}^{II}$,	$v_5^{II} = f_5^{II} + d\mathfrak{r}_5 + d\mathfrak{o}^{II}$,
III	.	$v_3^{III} = f_3^{III} + d\mathfrak{r}_3 + d\mathfrak{o}^{III}$,	$v_5^{III} = f_5^{III} + d\mathfrak{r}_5 + d\mathfrak{o}^{III}$,
IV	$v_1^{IV} = f_1^{IV} + d\mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{o}^{IV}$,	.	.
	P_2.	P_4.	P_6.
I	.	.	$v_6^I = f_6^I + d\mathfrak{r}_6 + d\mathfrak{o}^I$,
II	$v_2^{II} = f_2^{II} + d\mathfrak{r}_2 + d\mathfrak{o}^{II}$,	$v_4^{II} = f_4^{II} + d\mathfrak{r}_4 + d\mathfrak{o}^{II}$,	.
III	$v_2^{III} = f_2^{III} + d\mathfrak{r}_2 + d\mathfrak{o}^{III}$,	$v_4^{III} = f_4^{III} + d\mathfrak{r}_4 + d\mathfrak{o}^{III}$,	$v_6^{III} = f_6^{III} + d\mathfrak{r}_6 + d\mathfrak{o}^{III}$,
IV	$v_2^{IV} = f_2^{IV} + d\mathfrak{r}_2 + d\mathfrak{o}^{IV}$,	$v_4^{IV} = f_4^{IV} + d\mathfrak{r}_4 + d\mathfrak{o}^{IV}$,	$v_6^{IV} = f_6^{IV} + d\mathfrak{r}_6 + d\mathfrak{o}^{IV}$.

9. Diese umgeformten Fehlergleichungen können nach den Formeln (**134**) reduzirt werden auf die folgenden nur noch $d\mathfrak{o}^I$, $d\mathfrak{o}^{II}$, $d\mathfrak{o}^{III}$, $d\mathfrak{o}^{IV}$ enthaltenden Fehlergleichungen:

(**134**)

Satz.	P_1.	P_3.	P_5.
I	$\mathfrak{v}_1^I = f_1^I + d\mathfrak{o}^I$, Gew. = 1,	$\mathfrak{v}_3^I = f_3^I + d\mathfrak{o}^I$, Gew. = 1,	$\mathfrak{v}_5^I = f_5^I + d\mathfrak{o}^I$, Gew. = 1,
II	$\mathfrak{v}_1^{II} = f_1^{II} + d\mathfrak{o}^{II}$, „ = 1,	$\mathfrak{v}_3^{II} = f_3^{II} + d\mathfrak{o}^{II}$, „ = 1,	$\mathfrak{v}_5^{II} = f_5^{II} + d\mathfrak{o}^{II}$, „ = 1,
III	.	$\mathfrak{v}_3^{III} = f_3^{III} + d\mathfrak{o}^{III}$, „ = 1,	$\mathfrak{v}_5^{III} = f_5^{III} + d\mathfrak{o}^{III}$, „ = 1,
IV	$\mathfrak{v}_1^{IV} = f_1^{IV} + d\mathfrak{o}^{IV}$, „ = 1,	.	.
	P_2.	P_4.	P_6.
I	.	.	$\mathfrak{v}_6^I = f_6^I + d\mathfrak{o}^I$, Gew. = 1,
II	$\mathfrak{v}_2^{II} = f_2^{II} + d\mathfrak{o}^{II}$, Gew. = 1,	$\mathfrak{v}_4^{II} = f_4^{II} + d\mathfrak{o}^{II}$, Gew. = 1,	.
III	$\mathfrak{v}_2^{III} = f_2^{III} + d\mathfrak{o}^{III}$, „ = 1,	$\mathfrak{v}_4^{III} = f_4^{III} + d\mathfrak{o}^{III}$, „ = 1,	$\mathfrak{v}_6^{III} = f_6^{III} + d\mathfrak{o}^{III}$, „ = 1,
IV	$\mathfrak{v}_2^{IV} = f_2^{IV} + d\mathfrak{o}^{IV}$, „ = 1,	$\mathfrak{v}_4^{IV} = f_4^{IV} + d\mathfrak{o}^{IV}$, „ = 1,	$\mathfrak{v}_6^{IV} = f_6^{IV} + d\mathfrak{o}^{IV}$, „ = 1,
P_1	$\mathfrak{v}_1 = [f_1] + d\mathfrak{o}^I + d\mathfrak{o}^{II} + d\mathfrak{o}^{IV}$, Gew. $= -\frac{1}{n_1}$,		
P_2	$\mathfrak{v}_2 = [f_2] + d\mathfrak{o}^{II} + d\mathfrak{o}^{III} + d\mathfrak{o}^{IV}$, „ $= -\frac{1}{n_2}$,		
P_3	$\mathfrak{v}_3 = [f_3] + d\mathfrak{o}^I + d\mathfrak{o}^{II} + d\mathfrak{o}^{III}$, „ $= -\frac{1}{n_3}$,		
P_4	$\mathfrak{v}_4 = [f_4] + d\mathfrak{o}^{II} + d\mathfrak{o}^{III} + d\mathfrak{o}^{IV}$, „ $= -\frac{1}{n_4}$,		
P_5	$\mathfrak{v}_5 = [f_5] + d\mathfrak{o}^I + d\mathfrak{o}^{II} + d\mathfrak{o}^{III}$, „ $= -\frac{1}{n_5}$,		
P_6	$\mathfrak{v}_6 = [f_6] + d\mathfrak{o}^I + d\mathfrak{o}^{III} + d\mathfrak{o}^{IV}$, „ $= -\frac{1}{n_6}$,		

worin $n_1, n_2, n_3, \ldots$ die Zahlen sind, die angeben wie oft die Richtungen $r_1, r_2, r_3, \ldots$ beobachtet worden sind.

10. Die in den letzten Fehlergleichungen vorkommenden Werthe $[f]$ werden sämtlich $= 0$, wenn für die Näherungswerthe $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \cdots \mathfrak{r}_6$ das arithmetische Mittel der durch Subtraktion der Näherungswerthe der Orientirungswinkel $\mathfrak{o}^I$, $\mathfrak{o}^{II}$, $\mathfrak{o}^{III}$, $\mathfrak{o}^{IV}$ orientirten Satzmittel s genommen wird, wenn also beispielsweise $\mathfrak{r}_1$ berechnet wird nach:

$$\mathfrak{r}_1 = \frac{(s_1^I - \mathfrak{o}^I) + (s_1^{II} - \mathfrak{o}^{II}) + (s_1^{IV} - \mathfrak{o}^{IV})}{3}.$$

Denn dann wird nach den Formeln (**112**) und (**115**):

$$f_1^I = \frac{1}{3}\left((s_1^I - o^I) + (s_1^{II} - o^{II}) + (s_1^{IV} - o^{IV})\right) + o^I - s_1^I\,,$$

$$f_1^{II} = \frac{1}{3}\left((s_1^I - o^I) + (s_1^{II} - o^{II}) + (s_1^{IV} - o^{IV})\right) + o^{II} - s_1^{II}\,,$$

$$f_1^{IV} = \frac{1}{3}\left((s_1^I - o^I) + (s_1^{II} - o^{II}) + (s_1^{IV} - o^{IV})\right) + o^{IV} - s_1^{IV}\,,$$

$$[f_1] = \left((s_1^I - o^I) + (s_1^{II} - o^{II}) + (s_1^{IV} - o^{IV})\right) - \left((s_1^I - o^I) + (s_1^{II} - o^{II}) + (s_1^{IV} - o^{IV})\right) = 0.$$

11. Hiernach ergeben sich aus den Faktoren u. s. w. der reduzirten Fehlergleichungen die Faktoren u. s. w. der reduzirten Endgleichungen wie folgt:

Nr.	*p.*	*h.*	*i.*	*k.*	*l.*	*f.*	*phh.*	*phi.*	*phk.*	*phl.*	*phf.*	*pii.*	*pik.*	*pil.*	*pif.*	*pkk.*	*pkl.*	*pkf.*	*pll.*	*plf.*
1^I	1	+1	.	.	.	f_1^I	+1	.	.	.	$+f_1^I$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1^{II}	1	.	+1	.	.	f_1^{II}	.	.	.	.	.	+1	.	.	$+f_1^{II}$	.	.	.	.	.
1^{IV}	1	.	.	.	+1	f_1^{IV}	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	$+f_1^{IV}$
2^{II}	1	.	+1	.	.	f_2^{II}	.	.	.	.	.	+1	.	.	$+f_2^{II}$	.	.	.	.	.
2^{III}	1	.	.	+1	.	f_2^{III}	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	$+f_2^{III}$	.	.
2^{IV}	1	.	.	.	+1	f_2^{IV}	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	$+f_2^{IV}$
3^I	1	+1	.	.	.	f_3^I	+1	.	.	.	$+f_3^I$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3^{II}	1	.	+1	.	.	f_3^{II}	.	.	.	.	.	+1	.	.	$+f_3^{II}$	.	.	.	.	.
3^{III}	1	.	.	+1	.	f_3^{III}	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	$+f_3^{III}$	.	.
4^{II}	1	.	+1	.	.	f_4^{II}	.	.	.	.	.	+1	.	.	$+f_4^{II}$	.	.	.	.	.
4^{III}	1	.	.	+1	.	f_4^{III}	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	$+f_4^{III}$	.	.
4^{IV}	1	.	.	.	+1	f_4^{IV}	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	$+f_4^{IV}$
5^I	1	+1	.	.	.	f_5^I	+1	.	.	.	$+f_5^I$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5^{II}	1	.	+1	.	.	f_5^{II}	.	.	.	.	.	+1	.	.	$+f_5^{II}$	.	.	.	.	.
5^{III}	1	.	.	+1	.	f_5^{III}	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	$+f_5^{III}$	.	.
6^I	1	+1	.	.	.	f_6^I	+1	.	.	.	$+f_6^I$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6^{III}	1	.	.	+1	.	f_6^{III}	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	$+f_6^{III}$	.	.
6^{IV}	1	.	.	.	+1	f_6^{IV}	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	$+f_6^{IV}$
1	$-\frac{1}{3}$	+1	+1	.	+1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	.	$-\frac{1}{3}$	.	$-\frac{1}{3}$	.	$-\frac{1}{3}$	.	.	.	.	$-\frac{1}{3}$	.
2	$-\frac{1}{3}$	.	+1	+1	+1	0	.	.	.	.	.	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	.	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	.	$-\frac{1}{3}$	.
3	$-\frac{1}{3}$	+1	+1	+1	.	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	.	.	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	.	.	$-\frac{1}{3}$	.	.	.	.
4	$-\frac{1}{3}$	.	+1	+1	+1	0	.	.	.	.	.	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	.	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	.	$-\frac{1}{3}$	.
5	$-\frac{1}{3}$	+1	+1	+1	.	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	.	.	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	.	.	$-\frac{1}{3}$	.	.	.	.
6	$-\frac{1}{3}$	+1	.	+1	+1	0	$-\frac{1}{3}$	.	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	.	.	.	.	.	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	.	$-\frac{1}{3}$	.
							$+\frac{8}{3}$	-1	-1	$-\frac{2}{3}$	$[f^I]$	$+\frac{10}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-1	$[f^{II}]$	$+\frac{10}{3}$	-1	$[f^{III}]$	$+\frac{8}{3}$	$[f^{IV}]$

12. Die reduzirten Endgleichungen sind hiernach:

$$
\begin{aligned}
+\tfrac{8}{3}d\mathfrak{o}^{I} - d\mathfrak{o}^{II} - d\mathfrak{o}^{III} - \tfrac{2}{3}d\mathfrak{o}^{IV} + [f^{I}] &= 0,\\
- d\mathfrak{o}^{I} + \tfrac{10}{3}d\mathfrak{o}^{II} - \tfrac{4}{3}d\mathfrak{o}^{III} - d\mathfrak{o}^{IV} + [f^{II}] &= 0,\\
- d\mathfrak{o}^{I} - \tfrac{4}{3}d\mathfrak{o}^{II} + \tfrac{10}{3}d\mathfrak{o}^{III} - d\mathfrak{o}^{IV} + [f^{III}] &= 0,\\
-\tfrac{2}{3}d\mathfrak{o}^{I} - d\mathfrak{o}^{II} - d\mathfrak{o}^{III} + \tfrac{8}{3}d\mathfrak{o}^{IV} + [f^{IV}] &= 0.
\end{aligned}
$$

Die Summe dieser Endgleichungen giebt $0 = 0$, die Gleichungen liefern also keine bestimmten Werthe für $d\mathfrak{o}^{I}$, $d\mathfrak{o}^{II}$, $d\mathfrak{o}^{III}$, $d\mathfrak{o}^{IV}$, was hier ebenso wie im § 32 darauf zurückzuführen ist, dafs wir bis jetzt keine Bestimmung darüber getroffen haben, auf welche Richtung als Anfangsrichtung die Richtungen bezogen werden sollen. Wir treffen diese Bestimmung jetzt und zwar in der Weise, dafs wir die Anfangsrichtung nehmen, die sich ergiebt, wenn

$$d\mathfrak{o}^{I} + d\mathfrak{o}^{II} + d\mathfrak{o}^{III} + d\mathfrak{o}^{IV} = 0$$

wird.

13. Addiren wir diese Gleichung zu allen reduzirten Endgleichungen, so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
+\tfrac{11}{3}d\mathfrak{o}^{I} \quad . \quad\quad . \quad + \tfrac{1}{3}d\mathfrak{o}^{IV} + [f^{I}] &= 0,\\
. \quad + \tfrac{13}{3}d\mathfrak{o}^{II} - \tfrac{1}{3}d\mathfrak{o}^{III} \quad . \quad + [f^{II}] &= 0,\\
. \quad - \tfrac{1}{3}d\mathfrak{o}^{II} + \tfrac{13}{3}d\mathfrak{o}^{III} \quad . \quad + [f^{III}] &= 0,\\
+\tfrac{1}{3}d\mathfrak{o}^{I} \quad . \quad\quad . \quad + \tfrac{11}{3}d\mathfrak{o}^{IV} + [f^{IV}] &= 0,
\end{aligned}
$$

woraus $d\mathfrak{o}^{I}$, $d\mathfrak{o}^{II}$, $d\mathfrak{o}^{III}$, $d\mathfrak{o}^{IV}$ in einfachster Weise erhalten werden.

14. Für $d\mathfrak{r}_1, d\mathfrak{r}_2, \ldots d\mathfrak{r}_6$ erhalten wir nach Formel (**137**):

$$
\begin{aligned}
d\mathfrak{r}_1 &= -\frac{1}{n_1}(d\mathfrak{o}^{I} + d\mathfrak{o}^{II} \quad . \quad + d\mathfrak{o}^{IV}),\\
d\mathfrak{r}_2 &= -\frac{1}{n_2}(\ . \ + d\mathfrak{o}^{II} + d\mathfrak{o}^{III} + d\mathfrak{o}^{IV}),\\
d\mathfrak{r}_3 &= -\frac{1}{n_3}(d\mathfrak{o}^{I} + d\mathfrak{o}^{II} + d\mathfrak{o}^{III} \quad . \quad),\\
d\mathfrak{r}_4 &= -\frac{1}{n_4}(\ . \ + d\mathfrak{o}^{II} + d\mathfrak{o}^{III} + d\mathfrak{o}^{IV}),\\
d\mathfrak{r}_5 &= -\frac{1}{n_5}(d\mathfrak{o}^{I} + d\mathfrak{o}^{II} + d\mathfrak{o}^{III} \quad . \quad),\\
d\mathfrak{r}_6 &= -\frac{1}{n_6}(d\mathfrak{o}^{I} \quad . \quad + d\mathfrak{o}^{III} + d\mathfrak{o}^{IV}),
\end{aligned}
$$

oder, wenn wir von den in den Klammern stehenden Ausdrücken $d\mathfrak{o}^{I} + d\mathfrak{o}^{II} + d\mathfrak{o}^{III} + d\mathfrak{o}^{IV} = 0$ subtrahiren,:

$$
\begin{aligned}
d\mathfrak{r}_1 &= +\frac{1}{n_1}d\mathfrak{o}^{III}, & d\mathfrak{r}_4 &= +\frac{1}{n_4}d\mathfrak{o}^{I},\\
d\mathfrak{r}_2 &= +\frac{1}{n_2}d\mathfrak{o}^{I}, & d\mathfrak{r}_5 &= +\frac{1}{n_5}d\mathfrak{o}^{IV},\\
d\mathfrak{r}_3 &= +\frac{1}{n_3}d\mathfrak{o}^{IV}, & d\mathfrak{r}_6 &= +\frac{1}{n_6}d\mathfrak{o}^{II}.
\end{aligned}
$$

15. Bei der praktischen Anwendung des dargelegten Verfahrens kann jede Formelentwicklung vermieden werden, indem wie folgt verfahren wird:

a) Aus den Beobachtungsergebnissen s werden durch Subtraktion der Näherungswerthe $\mathfrak{o}$ der Orientirungswinkel die orientirten Satzmittel $s-\mathfrak{o}$ gebildet. Diese werden gemittelt, womit die Näherungswerthe $\mathfrak{r}$ der Richtungen erhalten werden.

b) Hiermit werden die Abweichungen der Näherungswerthe von den Beobachtungsergebnissen $f=\mathfrak{r}-(s-\mathfrak{o})$ gebildet. Die Summe dieser Abweichungen soll für jede einzelne Richtung gleich Null sein. Die kleinen durch Abrundung der Zahlenwerthe von $\mathfrak{r}$ entstehenden Abweichungen der Summen von Null werden vernachlässigt. Die Summe der Abweichungen f für jeden Satz liefert die Werthe $[f^I]$, $[f^{II}]$, $[f^{III}]$, ..., die die Absolutglieder $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{f}_3$, ... der reduzirten Endgleichungen sind.

c) Sodann wird für die Bildung der Faktoren der reduzirten Endgleichungen eine Tabelle nach folgendem Schema hergestellt:

Nr. der Richtungen.	p.	a.	b.	c.	d.	....	paa.	pab.	pac.	pad.	....	pbb.	pbc.	pbd.	....	pcc.	pcd.	....	pdd.	....
		S. I.	S. II.	S. III.	S. IV.	....	n^I+1	$+1$	$+1$	$+1$	....	$n^{II}+1$	$+1$	$+1$	....	$n^{III}+1$	$+1$	....	$n^{IV}+1$	....
1	$-\frac{1}{n_1}$																			
2	$-\frac{1}{n_2}$																			
3	$-\frac{1}{n_3}$																			
....	....																			

In diese Tabelle wird in die mit Satz I, Satz II, Satz III, Satz IV, ... überschriebenen Spalten $+1$ eingetragen für jede Richtung, die in dem betreffenden Satze vorkommt. Für n^I, n^{II}, n^{III}, n^{IV}, ... wird die Anzahl der Richtungen eingesetzt, die in den Sätzen I, II, III, IV, ... vorkommen und für n_1, n_2, n_3, ... die Zahl, die angiebt, wie oft die Richtungen 1, 2, 3, ... beobachtet worden sind, wonach sogleich die Bildung der Faktoren der Endgleichungen in dieser Tabelle in gewohnter Weise erfolgen kann. Die in den Spalten für paa, pab, pac, ... vorgetragenen Beiträge n^I+1, $+1$, $+1$, ... zu den Summen $[paa]$, $[pab]$, $[pac]$, ... sind, wie eine Betrachtung der Tabelle auf Seite 139 zeigt, die Beiträge, die die in dem Schema unberücksichtigt gelassenen Fehlergleichungen und die Gleichung $d\mathfrak{o}^I+d\mathfrak{o}^{II}+d\mathfrak{o}^{III}+d\mathfrak{o}^{IV}+\cdots=0$ zu den Faktoren der reduzirten Endgleichungen liefern.

d) Durch Auflösung der reduzirten Endgleichungen werden die Zahlenwerthe von $d\mathfrak{o}^I$, $d\mathfrak{o}^{II}$, $d\mathfrak{o}^{III}$, $d\mathfrak{o}^{IV}$, ... erhalten, und danach die Zahlenwerthe von $d\mathfrak{r}_1$, $d\mathfrak{r}_2$, $d\mathfrak{r}_3$, ..., indem richtungsweise die Summen der $d\mathfrak{o}^I$, $d\mathfrak{o}^{II}$, $d\mathfrak{o}^{III}$, $d\mathfrak{o}^{IV}$, ... derjenigen Sätze, worin die Richtungen 1, 2, 3, ... nicht vorkommen, gebildet und durch n_1, n_2, n_3, ... dividirt werden, so dafs also beispielsweise, wenn die Richtung 2 im Satze I, III und V beobachtet worden ist, während sie in den Sätzen II und IV nicht beobachtet worden ist, $d\mathfrak{r}_2=\frac{1}{n_2=3}(d\mathfrak{o}^{II}+d\mathfrak{o}^{IV})$ ist.

Wenn in allen Sätzen alle Richtungen vorkommen, wenn also alle Sätze voll sind, so werden hiernach die Aenderungen $d\mathfrak{r}_1$, $d\mathfrak{r}_2$, $d\mathfrak{r}_3$, ...

sämtlich gleich Null, und die wahrscheinlichsten Werthe r der Richtungen sind dann gleich den Näherungswerthen $\mathfrak{r}$.

e) Nachdem die wahrscheinlichsten Werthe $o = \mathfrak{o} + d\mathfrak{o}$ der Orientirungswinkel und $r = \mathfrak{r} + d\mathfrak{r}$ der Richtungen gebildet sind, werden zur Probe für die gesamte Rechnung und behufs Berechnung des mittleren Fehlers die wahrscheinlichsten Werthe $S = r + o$ der Satzmittel und die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler $v = S - s$ gebildet. Die Summe der wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler mufs nach den Formeln (**128**) sowohl für jede einzelne Richtung, als auch für jeden Satz gleich Null sein.

f) Der mittlere Fehler $\mathfrak{m} = m$ einer Richtung vom Gewichte 1 ergiebt sich nach Formel (**125**) $\mathfrak{m} = m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-q}}$, worin, wenn n_r die Anzahl der zu bestimmenden Richtungen und n_s die Anzahl der beobachteten Sätze bezeichnet, die Anzahl der zur einfachen nicht versicherten Bestimmung der n_r Richtungen $q = n_r + n_s - 1$ ist. Dafs die Anzahl der zu bestimmenden Gröfsen in unserer Rechnung $= n_r + n_s$ ist, widerspricht

Nr. der Zielpunkte.	Satz I.			Satz II.			Satz III.			Satz IV.					
	°	′	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″
	1. Satzmittel s.														
♁ 40	28	30	42	73	25	30	·	·	·	163	28	30			
51	·	·	·	142	28	22	187	35	20	232	31	45			
35	122	17	40	167	12	07	212	19	23	·	·	·			
46	·	·	·	201	16	02	246	22	40	291	18	58			
42	185	35	47	230	29	47	275	37	03	·	·	·			
52	221	15	50	·	·	·	311	16	53	356	13	38			
$[s]$		39	59		51	48		11	19		32	51			
	2. Näherungswerthe $\mathfrak{o}$ der Orientirungswinkel.												4. Näherungswerthe der Richtungen $\mathfrak{r} = \frac{[s-\mathfrak{o}]}{n}$.		
	28	30	40	73	25	30	118	32	20	163	28	30			
	3. Genähert orientirte Satzmittel $s - \mathfrak{o}$.														
♁ 40	0	00	02	0	00	00	·	·	·	0	00	00	0	00	00,7
51	·	·	·	69	02	52	69	03	00	69	03	15	69	03	02,3
35	93	47	00	93	46	37	93	47	03	·	·	·	93	46	53,3
46	·	·	·	127	50	32	127	50	20	127	50	28	127	50	26,7
42	157	05	07	157	04	17	157	04	43	·	·	·	157	04	42,3
52	192	45	10	·	·	·	192	44	33	192	45	08	192	44	57,0
$[s-\mathfrak{o}]$		37	19		44	18		29	39		38	51		30	02,3 = $[\mathfrak{r}]$
$+ n \cdot \mathfrak{o}$		02	40		07	30		41	40		54	00	Probe.		
$= [s]$		39	59		51	48		11	19		32	51			
	5. Abweichungen $f = \mathfrak{r} - (s - \mathfrak{o})$.												Summe.		
♁ 40		—	1,3		+	0,7			·		+	0,7	+	0,1	
51			·		+	10,3		+	2,3		—	12,7	—	0,1	
35		—	6,7		+	16,3		—	9,7			·	—	0,1	
46			·		—	5,3		+	6,7		—	1,3	+	0,1	
42		—	24,7		+	25,3		—	0,7			·	—	0,1	
52		—	13,0			·		+	24,0		—	11,0		0,0	
	$[f^{I}] = -45,7$			$[f^{II}] = +47,3$			$[f^{III}] = +22,6$			$[f^{IV}]$ — 24,3			—	0,1	

6. Bildung der Faktoren der Endgleichungen.

	p.	a.	b.	c.	d.	paa.	pab	pac.	pad.	pbb.	pbc.	pbd.	pcc.	pcd.	pdd.
		S.I.	S.II.	S.III.	S.IV.	+5	+1	+1	+1	+6	+1	+1	+6	+1	+5
♁ 40	$-\frac{1}{3}$	+1	+1	·	+1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	·	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	·	$-\frac{1}{3}$	·	·	$-\frac{1}{3}$
51	$-\frac{1}{3}$	·	+1	+1	+1	·	·	·	·	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
35	$-\frac{1}{3}$	+1	+1	+1	·	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	·	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	·	$-\frac{1}{3}$	·	·
46	$-\frac{1}{3}$	·	+1	+1	+1	·	·	·	·	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
42	$-\frac{1}{3}$	+1	+1	+1	·	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	·	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	·	$-\frac{1}{3}$	·	·
52	$-\frac{1}{3}$	+1	·	+1	+1	$-\frac{1}{3}$	·	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	·	·	·	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
						$+\frac{11}{3}$	0	0	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{13}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\frac{13}{3}$	0	$+\frac{11}{3}$

7. Endgleichungen.

$$+\frac{11}{3}d\mathfrak{o}^{I} \quad \cdot \quad \cdot \quad +\frac{1}{3}d\mathfrak{o}^{IV} - 45,7 = 0,$$

$$\cdot \quad +\frac{13}{3}d\mathfrak{o}^{II} - \frac{1}{3}d\mathfrak{o}^{III} \quad \cdot \quad +47,3 = 0,$$

$$\cdot \quad -\frac{1}{3}d\mathfrak{o}^{II} + \frac{13}{3}d\mathfrak{o}^{III} \quad \cdot \quad +22,6 = 0,$$

$$+\frac{1}{3}d\mathfrak{o}^{I} \quad \cdot \quad \cdot \quad +\frac{11}{3}d\mathfrak{o}^{IV} - 24,3 = 0.$$

8. Auflösung der Endgleichungen.

$\frac{120}{3}d\mathfrak{o}^{I} - 502,7 + 24,3 = 0,$	$d\mathfrak{o}^{I} = +12,0,$
$\frac{168}{3}d\mathfrak{o}^{II} + 614,9 + 22,6 = 0,$	$d\mathfrak{o}^{II} = -11,4,$
$\frac{168}{3}d\mathfrak{o}^{III} + 293,8 + 47,3 = 0,$	$d\mathfrak{o}^{III} = -6,1,$
$\frac{120}{3}d\mathfrak{o}^{IV} - 267,3 + 45,7 = 0,$	$d\mathfrak{o}^{IV} = +5,5,$
	$[d\mathfrak{o}] = 0,0.$

9. Wahrscheinlichste Werthe o der Orientirungswinkel.

$o^{I} = \mathfrak{o}^{I} + d\mathfrak{o}^{I} = 28°\ 30'\ 52,0'',$

$o^{II} = \mathfrak{o}^{II} + d\mathfrak{o}^{II} = 73\ 25\ 18,6,$

$o^{III} = \mathfrak{o}^{III} + d\mathfrak{o}^{III} = 118\ 32\ 13,9,$

$o^{IV} = \mathfrak{o}^{IV} + d\mathfrak{o}^{IV} = 163\ 28\ 35,5,$

$[o] = [\mathfrak{o}] = 57\ 00,0.$

10. Wahrscheinlichste Werthe r der Richtungen.

♁ 40	$d\mathfrak{r}_1 = \frac{1}{3}d\mathfrak{o}^{III} = -2,0,$	$r_1 = \mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{r}_1 = 359°\ 59'\ 58,7'',$
51	$d\mathfrak{r}_2 = \frac{1}{3}d\mathfrak{o}^{I} = +4,0,$	$r_2 = \mathfrak{r}_2 + d\mathfrak{r}_2 = 69\ 03\ 06,3,$
35	$d\mathfrak{r}_3 = \frac{1}{3}d\mathfrak{o}^{IV} = +1,8,$	$r_3 = \mathfrak{r}_3 + d\mathfrak{r}_3 = 93\ 46\ 55,1,$
46	$d\mathfrak{r}_4 = \frac{1}{3}d\mathfrak{o}^{I} = +4,0,$	$r_4 = \mathfrak{r}_4 + d\mathfrak{r}_4 = 127\ 50\ 30,7,$
42	$d\mathfrak{r}_5 = \frac{1}{3}d\mathfrak{o}^{IV} = +1,8,$	$r_5 = \mathfrak{r}_5 + d\mathfrak{r}_5 = 157\ 04\ 44,1,$
52	$d\mathfrak{r}_6 = \frac{1}{3}d\mathfrak{o}^{II} = -3,8,$	$r_6 = \mathfrak{r}_6 + d\mathfrak{r}_6 = 192\ 44\ 53,2,$
	$[d\mathfrak{r}] = +5,8,$	$[r] = [\mathfrak{r}] + [d\mathfrak{r}] = 30\ 08,1.$

Nr. der Zielpunkte.	Satz I. °	'	"	Satz II. °	'	"	Satz III. °	'	"	Satz IV. °	'	"	
	11. Wahrscheinlichste Werthe $S = r + o$ der Satzmittel.												
△⊙ 40	28	30	50,7	73	25	17,3	.	.	.	163	28	34,2	
51	.	.	.	142	28	24,9	187	35	20,2	232	31	41,8	
35	122	17	47,1	167	12	13,7	212	19	09,0	.	.	.	
46	.	.	.	201	15	49,3	246	22	44,6	291	19	06,2	
42	185	35	36,1	230	30	02,7	275	36	58,0	.	.	.	
52	221	15	45,2	.	.	.	311	17	07,1	356	13	28,7	Probe.
		39	59,1		51	47,9		11	18,9		32	50,9	$[S] = [s]$.
	12. Wahrscheinlichste Beobachtungsfehler $v = S - s$.												Summe.
△⊙ 40		+	8,7		—	12,7			.		+	4,2	+ 0,2
51			.		+	2,9		+	0,2		—	3,2	— 0,1
35		+	7,1		+	6,7		—	14,0			.	— 0,2
46			.		—	12,7		+	4,6		+	8,2	+ 0,1
42		—	10,9		+	15,7		—	5,0			.	— 0,2
52		—	4,8			.		+	14,1		—	9,3	0,0
		+	0,1		—	0,1		—	0,1		—	0,1	— 0,2
	13. Quadratsumme $[vv]$.												Summe.
△⊙ 40		76			161			.			18		255
51		.			8			0			10		18
35		50			45			196			.		291
46		.			161			21			67		249
42		119			246			25			.		390
52		23			.			199			86		308
		268			621			441			181		$1511 = [vv]$

$$m = m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n - (n_r + n_s - 1)}} = \pm\sqrt{\frac{1511}{18 - 9}} = \pm 13{,}0''.$$

dieser Bestimmung von q nur scheinbar, denn eine von den in der Rechnung vorkommenden zu bestimmenden Größsen mufs willkürlich angenommen werden, um für die übrigen bestimmte Werthe zu erlangen.

16. Nach dem vorstehend dargelegten Verfahren ist die Rechnung für unser Beispiel in den vorstehenden Tabellen (Seite 142, 143 und 144) durchgeführt.

17. Nach den Formeln (**128**) soll hier, wo die Gewichte $p = 1$ sind, $[av] = [bv] = [cv] = \cdots\cdot = 0$ sein. Bilden wir nun die Summen $[av]$, $[bv]$, $[cv]$, ... mit den unter Nr. 6 erhaltenen Werthen der Differenzialquotienten $a, b, c, \ldots.$ und mit den unter Nr. 3 in den Fehlergleichungen (**109**) und (**110**) erhaltenen Ausdrücken für die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler v, so erhalten wir folgende Gleichungen:

$$[av] = (r_1 + o^I - s_1^I) + (r_1 + o^{II} - s_1^{II}) + \quad . \quad + (r_1 + o^{IV} - s_1^{IV}) = 0,$$
$$[bv] = \quad . \quad (r_2 + o^{II} - s_2^{II}) + (r_2 + o^{III} - s_2^{III}) + (r_2 + o^{IV} - s_2^{IV}) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$[gv] = (r_6 + o^I - s_6^I) + \quad . \quad + (r_6 + o^{III} - s_6^{III}) + (r_6 + o^{IV} - s_6^{IV}) = 0,$$

$$
\begin{aligned}
[hv] &= (r_1+o^I-s_1^I)+\quad . \quad+(r_3+o^I-s_3^I)+\quad . \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +(r_5+o^I-s_5^I)+(r_6+o^I-s_6^I)=0,\\
[iv] &= (r_1+o^{II}-s_1^{II})+(r_2+o^{II}-s_2^{II})+(r_3+o^{II}-s_3^{II})+(r_4+o^{II}-s_4^{II})\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +(r_5+o^{II}-s_5^{II})+\quad . \quad=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
[lv] &= (r_1+o^{IV}-s_1^{IV})+(r_2+o^{IV}-s_2^{IV})+\quad . \quad+(r_4+o^{IV}-s_4^{IV})\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +\quad . \quad+(r_6+o^{IV}-s_6^{IV})=0.
\end{aligned}
$$

Hiernach mufs, wie leicht zu übersehen ist und wie unter Nr. 15e bereits angeführt ist, die Summe der Abweichungen zwischen den wahrscheinlichsten Werthen r der Richtungen und den orientirten Satzmitteln $s-o$, oder, was dasselbe ist, die Summe der wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler sowohl für jede einzelne Richtung, als auch für jeden Satz gleich Null sein.

18. Aus den obigen Gleichungen folgt:

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{1}{3}\left((s_1^I-o^I)+(s_1^{II}-o^{II})+\quad . \quad+(s_1^{IV}-o^{IV})\right),\\
r_2 &= \frac{1}{3}\left(\quad . \quad+(s_2^{II}-o^{II})+(s_2^{III}-o^{III})+(s_2^{IV}-o^{IV})\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
r_6 &= \frac{1}{3}\left((s_6^I-o^I)+\quad . \quad+(s_6^{III}-o^{III})+(s_6^{IV}-o^{IV})\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
o^I &= \frac{1}{4}\left((s_1^I-r_1)+\quad . \quad+(s_3^I-r_3)+\quad . \quad+(s_5^I-r_5)+(s_6^I-r_6)\right),\\
o^{II} &= \frac{1}{5}\left((s_1^{II}-r_1)+(s_2^{II}-r_2)+(s_3^{II}-r_3)+(s_4^{II}-r_4)+(s_5^{II}-r_5)+\quad . \quad\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
o^{IV} &= \frac{1}{4}\left((s_1^{IV}-r_1)+(s_2^{IV}-r_2)+\quad . \quad+(s_4^{IV}-r_4)+\quad . \quad+(s_6^{IV}-r_6)\right).
\end{aligned}
$$

Hiernach sind die wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen r je gleich dem arithmetischen Mittel der orientirten Satzmittel $s-o$ für die betreffende Richtung und die wahrscheinlichsten Werthe der Orientirungswinkel o je gleich dem arithmetischen Mittel der Unterschiede $s-r$ der Satzmittel und der wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen in dem betreffenden Satze.

Auf diesen Regeln beruht das folgende vielfach angewendete Näherungsverfahren:*)

Es werden in irgend einer Weise möglichst gute erste Näherungswerthe $\mathfrak{o}'$ der Orientirungswinkel gesucht, damit die Satzmittel s orientirt und die orientirten Satzmittel $s-\mathfrak{o}'$ richtungsweise gemittelt, womit erste Näherungswerthe $\mathfrak{r}'$ der Richtungen gewonnen werden. Diese werden von den orientirten Satzmitteln subtrahirt und die erhaltenen Unterschiede $(s-\mathfrak{o}')-\mathfrak{r}'$ werden richtungsweise und satzweise addirt. Die Summe der Unterschiede $(s-\mathfrak{o}')-\mathfrak{r}'$ mufs richtungsweise gleich Null sein, da die Werthe $\mathfrak{r}'$ das arithmetische Mittel der für jede Richtung vorliegenden orientirten Satzmittel $s-\mathfrak{o}'$ sind. Das arithmetische Mittel der Unterschiede $(s-\mathfrak{o}')-\mathfrak{r}'$ in jedem Satze liefert zweite Näherungswerthe $\mathfrak{o}''$ der Orientirungswinkel, die, den einmal orientirten Satzmitteln $s-\mathfrak{o}'$ beigefügt, die besser orientirten Satzmittel $(s-\mathfrak{o}')-\mathfrak{o}''$ liefern, die nun weiter behandelt werden, wie die einmal orientirten Satzmittel. Hiermit wird fortgefahren bis

*) Vergl. Helmert, Ausgleichungsrechnung. S. 154 ff., Jordan, Handbuch der Vermessungskunde 2. Aufl., 1. Band, S. 341 ff., 3. Aufl. 1. Band, S. 22[illegible] ff., Kataster-Anweisung IX v. 25. 10. 81, S. 93 ff., Gaufs, Trig. und polyg. Rechnungen, 2. Aufl., I. Teil. S. 192 ff.

die Summen der Unterschiede zwischen den orientirten Satzmitteln und den Mittelwerthen der Richtungen sowohl richtungs- als satzweise gleich Null, oder so nahe gleich Null sind, dafs die Abweichungen von Null vernachlässigt werden können. Wenn dies erreicht ist, stimmen die zuletzt erhaltenen Mittelwerthe der Richtungen $\mathfrak{r}$ so genau mit den sich bei dem direkten Verfahren ergebenden wahrscheinlichsten Werthen r der Richtungen überein, dafs die erstern für die letztern genommen werden können.

Anstatt zuerst Näherungswerthe $\mathfrak{o}'$ der Orientirungswinkel zu ermitteln, können auch zuerst Näherungswerthe $\mathfrak{r}'$ der Richtungen bestimmt werden. Dann ändert sich das ganze Verfahren nur in sofern als die obigen Formeln oder Regeln für r und o in umgekehrter Reihenfolge angewendet werden.

Das Näherungsverfahren führt um so schneller zum Ziel, je mehr die ersten Näherungswerthe bereits den wahrscheinlichsten Werthen nahekommen.

§ 34. Richtungsbestimmungen aus Richtungssätzen.

2. Verfahren.

Auf § 16 sind die Richtungen nach den §§ 13, 17, 18, 20 in 16 Sätzen mit gleicher Genauigkeit beobachtet worden. Die Beobachtungsergebnisse sind so weit wie thunlich in der Weise zusammengefafst worden, dafs für die Sätze, worin dieselben Richtungen vorkommen, das Mittel aus allen Beobachtungsergebnissen gebildet worden ist. Diese gemittelten Beobachtungsergebnisse sind:

Mittel aus	Satzgruppe I. 3 Sätzen.			Satzgruppe II. 2 Sätzen.			Satzgruppe III. 3 Sätzen.			Satzgruppe IV. 4 Sätzen.			Satzgruppe V. 2 Sätzen.			Satzgruppe VI. 2 Sätzen.		
	°	′	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″
$P_1 =$ § 13	0	00	00	.	.	.	0	00	00	0	00	00	.	.	.	0	00	00
$P_2 =$ 17	12	04	38	0	00	00	12	04	13	.	.	.	.	.	.	12	04	37
$P_3 =$ 18	37	10	03	25	05	40	.	.	.	37	10	20	0	00	00	.	.	.
$P_4 =$ 20	55	47	38	43	42	45	55	47	20	.	.	.	18	37	50	.	.	.
		02	19		48	25		51	33		10	20		37	50		04	37

Es sollen die wahrscheinlichsten Werthe r_1, r_2, r_3, r_4 der Richtungen und der mittlere Fehler m einer einmal beobachteten Richtung berechnet werden.

Wir nehmen als Gewichtseinheit das Gewicht des Mittels aus 2 Sätzen, so dafs das Gewicht des Mittels aus 3 Sätzen $= 1{,}5$, aus 4 Sätzen $= 2{,}0$ ist, während das Gewicht einer einmal beobachteten Richtung $= 0{,}5$ ist.

1. Wenn, wie im vorliegenden Beispiele, die Anzahl der Richtungen kleiner ist als die Anzahl der Sätze, empfiehlt es sich, das im § 33 behandelte Verfahren derart zu ändern, dafs in den reduzirten Fehlergleichungen und demnach auch in den reduzirten Endgleichungen nur die Aenderungen $d\mathfrak{r}_1$, $d\mathfrak{r}_2$, $d\mathfrak{r}_3$, ... der Richtungen vorkommen.

Mit Beibehaltung der im Beispiel 3 gewählten Bezeichnungen, ergeben sich für das vorliegende Beispiel die folgenden umgeformten Fehlergleichungen:

(116) und (117)

	Satzgruppe I.	Satzgruppe IV.
P_1	$v_1^I = f_1^I + d\mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{o}^I$, Gew. $= p_1^I$,	$v_1^{IV} = f_1^{IV} + d\mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{o}^{IV}$, Gew. $= p_1^{IV}$,
P_2	$v_2^I = f_2^I + d\mathfrak{r}_2 + d\mathfrak{o}^I$, „ $= p_2^I$,	. .
P_3	$v_3^I = f_3^I + d\mathfrak{r}_3 + d\mathfrak{o}^I$, „ $= p_3^I$,	$v_3^{IV} = f_3^{IV} + d\mathfrak{r}_3 + d\mathfrak{o}^{IV}$, „ $= p_3^{IV}$,
P_4	$v_4^I = f_4^I + d\mathfrak{r}_4 + d\mathfrak{o}^I$, „ $= p_4^I$,	. .
	Satzgruppe II.	Satzgruppe V.
P_1	. .	. .
P_2	$v_2^{II} = f_2^{II} + d\mathfrak{r}_2 + d\mathfrak{o}^{II}$, Gew. $= p_2^{II}$,	. .
P_3	$v_3^{II} = f_3^{II} + d\mathfrak{r}_3 + d\mathfrak{o}^{II}$, „ $= p_3^{II}$,	$v_3^V = f_3^V + d\mathfrak{r}_3 + d\mathfrak{o}^V$, Gew. $= p_3^V$,
P_4	$v_4^{II} = f_4^{II} + d\mathfrak{r}_4 + d\mathfrak{o}^{II}$, „ $= p_4^{II}$,	$v_4^V = f_4^V + d\mathfrak{r}_4 + d\mathfrak{o}^V$, „ $= p_4^V$,
	Satzgruppe III.	Satzgruppe VI.
P_1	$v_1^{III} = f_1^{III} + d\mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{o}^{III}$, Gew. $= p_1^{III}$,	$v_1^{VI} = f_1^{VI} + d\mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{o}^{VI}$, Gew. $= p_1^{VI}$,
P_2	$v_2^{III} = f_2^{III} + d\mathfrak{r}_2 + d\mathfrak{o}^{III}$, „ $= p_2^{III}$,	$v_2^{VI} = f_2^{VI} + d\mathfrak{r}_2 + d\mathfrak{o}^{VI}$, „ $= p_2^{VI}$,
P_3	. .	. .
P_4	$v_4^{III} = f_4^{III} + d\mathfrak{r}_4 + d\mathfrak{o}^{III}$, „ $= p_4^{III}$,	. .

2. Diese umgeformten Fehlergleichungen können nach den Formeln (**130**) reduzirt werden auf die folgenden nur noch $d\mathfrak{r}_1$, $d\mathfrak{r}_2$, $d\mathfrak{r}_3$, $d\mathfrak{r}_4$ enthaltenden Fehlergleichungen: (**130**)

	Satzgruppe I.	Satzgruppe IV.
P_1	$\mathfrak{v}_1^I = f_1^I + d\mathfrak{r}_1$, Gew. $= p_1^I$,	$\mathfrak{v}_1^{IV} = f_1^{IV} + d\mathfrak{r}_1$, Gew. $= p_1^{IV}$,
P_2	$\mathfrak{v}_2^I = f_2^I + d\mathfrak{r}_2$, „ $= p_2^I$,	. .
P_3	$\mathfrak{v}_3^I = f_3^I + d\mathfrak{r}_3$, „ $= p_3^I$,	$\mathfrak{v}_3^{IV} = f_3^{IV} + d\mathfrak{r}_3$, „ $= p_3^{IV}$,
P_4	$\mathfrak{v}_4^I = f_4^I + d\mathfrak{r}_4$, „ $= p_4^I$,	. .
	Satzgruppe II.	Satzgruppe V.
P_1	. .	. .
P_2	$\mathfrak{v}_2^{II} = f_2^{II} + d\mathfrak{r}_2$, Gew. $= p_2^{II}$,	. .
P_3	$\mathfrak{v}_3^{II} = f_3^{II} + d\mathfrak{r}_3$, „ $= p_3^{II}$,	$\mathfrak{v}_3^V = f_3^V + d\mathfrak{r}_3$, Gew. $= p_3^V$,
P_4	$\mathfrak{v}_4^{II} = f_4^{II} + d\mathfrak{r}_4$, „ $= p_4^{II}$,	$\mathfrak{v}_4^V = f_4^V + d\mathfrak{r}_4$, „ $= p_4^V$,
	Satzgruppe III.	Satzgruppe VI.
P_1	$\mathfrak{v}_1^{III} = f_1^{III} + d\mathfrak{r}_1$, Gew. $= p_1^{III}$,	$\mathfrak{v}_1^{VI} = f_1^{VI} + d\mathfrak{r}_1$, Gew. $= p_1^{VI}$,
P_2	$\mathfrak{v}_2^{III} = f_2^{III} + d\mathfrak{r}_2$, „ $= p_2^{III}$,	$\mathfrak{v}_2^{VI} = f_2^{VI} + d\mathfrak{r}_2$, „ $= p_2^{VI}$,
P_3	. .	. .
P_4	$\mathfrak{v}_4^{III} = f_4^{III} + d\mathfrak{r}_4$, „ $= p_4^{III}$,	. .
S. G. I	$\mathfrak{v}^I = p^I\,[f^I] + p^I\,d\mathfrak{r}_1 + p^I\,d\mathfrak{r}_2 + p^I\,d\mathfrak{r}_3 + p^I\,d\mathfrak{r}_4$, Gew. $= -\frac{1}{n^I p^I}$,	
S. G. II	$\mathfrak{v}^{II} = p^{II}\,[f^{II}] \quad . \quad + p^{II}\,d\mathfrak{r}_2 + p^{II}\,d\mathfrak{r}_3 + p^{II}\,d\mathfrak{r}_4$, „ $= -\frac{1}{n^{II} p^{II}}$,	
S. G. III	$\mathfrak{v}^{III} = p^{III}[f^{III}] + p^{III}d\mathfrak{r}_1 + p^{III}d\mathfrak{r}_2 \quad . \quad + p^{III}d\mathfrak{r}_4$, „ $= -\frac{1}{n^{III} p^{III}}$,	
S. G. IV	$\mathfrak{v}^{IV} = p^{IV}[f^{IV}] + p^{IV}d\mathfrak{r}_1 \quad . \quad + p^{IV}d\mathfrak{r}_3 \quad .$, „ $= -\frac{1}{n^{IV} p^{IV}}$,	
S. G. V	$\mathfrak{v}^V = p^V\,[f^V] \quad . \quad . \quad + p^V\,d\mathfrak{r}_3 + p^V\,d\mathfrak{r}_4$, „ $= -\frac{1}{n^V p^V}$,	
S. G. VI	$\mathfrak{v}^{VI} = p^{VI}\,[f^{VI}] + p^{VI}d\mathfrak{r}_1 + p^{VI}d\mathfrak{r}_2 \quad . \quad .$, „ $= -\frac{1}{n^{VI} p^{VI}}$,	

worin n^I, n^{II}, n^{III}, ... die Anzahl der Richtungen in den Sätzen I, II, III, ... bezeichnet.

3. Die in den letzten 6 Fehlergleichungen vorkommenden Werthe $[f]$ werden sämtlich $= 0$, wenn für die Näherungswerthe $\mathfrak{o}^I$, $\mathfrak{o}^{II}$, ... $\mathfrak{o}^{VI}$ das arithmetische Mittel der Differenzen $s - \mathfrak{r}$ in den einzelnen Sätzen genommen wird, wenn also beispielsweise $\mathfrak{o}^I$ berechnet wird nach:

$$\mathfrak{o}^I = \frac{(s_1^I - \mathfrak{r}_1) + (s_2^I - \mathfrak{r}_2) + (s_3^I - \mathfrak{r}_3) + (s_4^I - \mathfrak{r}_4)}{n^I = 4}.$$

Denn dann wird nach den Formeln (**112**) und (**115**):

Nr.	*p.*	*a.*	*b.*	*c.*	*d.*	*f.*	*paa.*	*pab.*	*pac.*	*pad.*	*paf.*
1^I	1,5	+1	.	.	.	f_1^I	+1,5	.	.	.	$+1,5 f_1^I$
2^I	1,5	.	+1	.	.	f_2^I	.	.	.	.	.
3^I	1,5	.	.	+1	.	f_3^I	.	.	.	.	.
4^I	1,5	.	.	.	+1	f_4^I	.	.	.	.	.
2^{II}	1	.	+1	.	.	f_2^{II}	.	.	.	.	.
3^{II}	1	.	.	+1	.	f_3^{II}	.	.	.	.	.
4^{II}	1	.	.	.	+1	f_4^{II}	.	.	.	.	.
1^{III}	1,5	+1	.	.	.	f_1^{III}	+1,5	.	.	.	$+1,5 f_1^{III}$
2^{III}	1,5	.	+1	.	.	f_2^{III}	.	.	.	.	.
4^{III}	1,5	.	.	.	+1	f_4^{III}	.	.	.	.	.
1^{IV}	2	+1	.	.	.	f_1^{IV}	+2	.	.	.	$+2 f_1^{IV}$
3^{IV}	2	.	.	+1	.	f_3^{IV}	.	.	.	.	.
3^V	1	.	.	+1	.	f_3^V	.	.	.	.	.
4^V	1	.	.	.	+1	f_4^V	.	.	.	.	.
1^{VI}	1	+1	.	.	.	f_1^{VI}	+1	.	.	.	$+f_1^{VI}$
2^{VI}	1	.	+1	.	.	f_2^{VI}	.	.	.	.	.
I	$-\frac{3}{8}$	+1	+1	+1	+1	0	$-3/8$	$-3/8$	$-3/8$	$-3/8$	.
II	$-\frac{1}{3}$	.	+1	+1	+1	0	.	.	.	.	.
III	$-\frac{1}{2}$	+1	+1	.	+1	0	$-1/2$	$-1/2$	.	$-1/2$	.
IV	-1	+1	.	+1	.	0	-1	.	-1	.	.
V	$-\frac{1}{2}$	.	.	+1	+1	0	.	.	.	.	.
VI	$-\frac{1}{2}$	+1	+1	.	.	0	$-1/2$	$-1/2$	.	.	.
							$+29/8$	$-11/8$	$-11/8$	$-7/8$	$+[p_1 f_1]$

$$f_1^I = \mathfrak{r}_1 - s_1^I + \frac{1}{4}\left((s_1^I - \mathfrak{r}_1) + (s_2^I - \mathfrak{r}_2) + (s_3^I - \mathfrak{r}_3) + (s_4^I - \mathfrak{r}_4)\right),$$
$$f_2^I = \mathfrak{r}_2 - s_2^I + \frac{1}{4}\left((s_1^I - \mathfrak{r}_1) + (s_2^I - \mathfrak{r}_2) + (s_3^I - \mathfrak{r}_3) + (s_4^I - \mathfrak{r}_4)\right),$$
$$f_3^I = \mathfrak{r}_3 - s_3^I + \frac{1}{4}\left((s_1^I - \mathfrak{r}_1) + (s_2^I - \mathfrak{r}_2) + (s_3^I - \mathfrak{r}_3) + (s_4^I - \mathfrak{r}_4)\right),$$
$$f_4^I = \mathfrak{r}_4 - s_4^I + \frac{1}{4}\left((s_1^I - \mathfrak{r}_1) + (s_2^I - \mathfrak{r}_2) + (s_3^I - \mathfrak{r}_3) + (s_4^I - \mathfrak{r}_4)\right),$$
$$[f^I] = [\mathfrak{r} - s^I] + [s^I - \mathfrak{r}] = 0.$$

4. Ferner können die letzten 6 Fehlergleichungen nach Formel (**142**) noch vereinfacht werden, indem dafür gesetzt wird:

pbb.	*pbc.*	*pbd.*	*pbf.*	*pcc.*	*pcd.*	*pcf.*	*pdd.*	*pdf.*
.	.	.	.	.	.	.	.	.
+1,5	.	.	$+1,5 f_2^I$	.	.	.	.	.
.	.	.	.	+1,5	.	$+1,5 f_3^I$	.	.
.	.	.	.	.	.	.	+1,5	$+1,5 f_4^I$
+1	.	.	$+f_2^{II}$	.	.	.	.	.
.	.	.	.	+1	.	$+f_3^{II}$	.	.
.	.	.	.	.	.	.	+1	$+f_4^{II}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.
+1,5	.	.	$+1,5 f_2^{III}$	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	+1,5	$+1,5 f_4^{III}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	+2	.	$+2 f_3^{IV}$	.	.
.	.	.	.	+1	.	$+f_3^V$	.	.
.	.	.	.	.	.	.	+1	$+f_4^V$
.	.	.	.	.	.	.	.	.
+1	.	.	$+f_2^{VI}$	.	.	.	.	.
−3/8	−3/8	−3/8	.	−3/8	−3/8	.	−3/8	.
−1/3	−1/3	−1/3	.	−1/3	−1/3	.	−1/3	.
−1/2	.	−1/2	.	.	.	.	−1/2	.
.	.	.	.	−1	.	.	.	.
.	.	.	.	−1/2	−1/2	.	−1/2	.
−1/2	.	.	.	.	.	.	.	.
+79/24	−17/24	−20/24	$[p_2 f_2]$	+79/24	−20/24	$[p_3 f_3]$	+79/24	$[p_4 f_4]$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{v}^{I} &= d\mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{r}_2 + d\mathfrak{r}_3 + d\mathfrak{r}_4, && \text{Gew.} = -\frac{p^{I}}{n^{I}},\\
\mathfrak{v}^{II} &= \quad . \quad + d\mathfrak{r}_2 + d\mathfrak{r}_3 + d\mathfrak{r}_4, && \text{„} \quad = -\frac{p^{II}}{n^{II}}\\
\mathfrak{v}^{III} &= d\mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{r}_2 \quad . \quad + d\mathfrak{r}_4, && \text{„} \quad = -\frac{p^{III}}{n^{III}},\\
\mathfrak{v}^{IV} &= d\mathfrak{r}_1 \quad . \quad + d\mathfrak{r}_3 \quad . \quad, && \text{„} \quad = -\frac{p^{IV}}{n^{IV}},\\
\mathfrak{v}^{V} &= \quad . \quad . \quad + d\mathfrak{r}_3 + d\mathfrak{r}_4, && \text{„} \quad = -\frac{p^{V}}{n^{V}},\\
\mathfrak{v}^{VI} &= d\mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{r}_2 \quad . \quad . \quad, && \text{„} \quad = -\frac{p^{VI}}{n^{VI}}.
\end{aligned}
$$

5. Hiernach ergeben sich die Faktoren u. s. w. der reduzirten Endgleichungen aus den Faktoren u. s. w. der reduzirten Fehlergleichungen wie folgt: (Siehe die Tabelle auf Seite 148 und 149.)

6. Die reduzirten und behufs Vereinfachung mit 24 multiplizirten Endgleichungen sind hiernach:

$$
\begin{aligned}
+87\,d\mathfrak{r}_1 - 33\,d\mathfrak{r}_2 - 33\,d\mathfrak{r}_3 - 21\,d\mathfrak{r}_4 + 24\,[p_1 f_1] &= 0,\\
-33\,d\mathfrak{r}_1 + 79\,d\mathfrak{r}_2 - 17\,d\mathfrak{r}_3 - 29\,d\mathfrak{r}_4 + 24\,[p_2 f_2] &= 0,\\
-33\,d\mathfrak{r}_1 - 17\,d\mathfrak{r}_2 + 79\,d\mathfrak{r}_3 - 29\,d\mathfrak{r}_4 + 24\,[p_3 f_3] &= 0,\\
-21\,d\mathfrak{r}_1 - 29\,d\mathfrak{r}_2 - 29\,d\mathfrak{r}_3 + 79\,d\mathfrak{r}_4 + 24\,[p_4 f_4] &= 0.
\end{aligned}
$$

Die Summe dieser Endgleichungen giebt $0 = 0$, die Gleichungen liefern also keine bestimmten Werthe für $d\mathfrak{r}_1$, $d\mathfrak{r}_2$, $d\mathfrak{r}_3$, $d\mathfrak{r}_4$. Setzen wir nun aber die bis dahin noch unbestimmte Anfangsrichtung derart fest, dafs wir die Anfangsrichtung nehmen, die sich ergiebt, wenn

$$d\mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{r}_2 + d\mathfrak{r}_3 + d\mathfrak{r}_4 = 0$$

wird, und addiren wir diese Gleichung, nachdem sie mit 24 multiplizirt ist, zu den reduzirten Endgleichungen, so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
111\,d\mathfrak{r}_1 - 9\,d\mathfrak{r}_2 - 9\,d\mathfrak{r}_3 + 3\,d\mathfrak{r}_4 + 24\,[p_1 f_1] &= 0,\\
-9\,d\mathfrak{r}_1 + 103\,d\mathfrak{r}_2 + 7\,d\mathfrak{r}_3 - 5\,d\mathfrak{r}_4 + 24\,[p_2 f_2] &= 0,\\
-9\,d\mathfrak{r}_1 + 7\,d\mathfrak{r}_2 + 103\,d\mathfrak{r}_3 - 5\,d\mathfrak{r}_4 + 24\,[p_3 f_3] &= 0,\\
+3\,d\mathfrak{r}_1 - 5\,d\mathfrak{r}_2 - 5\,d\mathfrak{r}_3 + 103\,d\mathfrak{r}_4 + 24\,[p_4 f_4] &= 0.
\end{aligned}
$$

7. Für $d\mathfrak{o}^{I}$, $d\mathfrak{o}^{II}$, ... $d\mathfrak{o}^{VI}$ erhalten wir nach Formel (**133**):

$$
\begin{aligned}
d\mathfrak{o}^{I} &= -\frac{1}{n^{I}}(d\mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{r}_2 + d\mathfrak{r}_3 + d\mathfrak{r}_4),\\
d\mathfrak{o}^{II} &= -\frac{1}{n^{II}}(\quad . \quad + d\mathfrak{r}_2 + d\mathfrak{r}_3 + d\mathfrak{r}_4),\\
d\mathfrak{o}^{III} &= -\frac{1}{n^{III}}(d\mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{r}_2 \quad . \quad + d\mathfrak{r}_4),\\
d\mathfrak{o}^{IV} &= -\frac{1}{n^{IV}}(d\mathfrak{r}_1 \quad . \quad + d\mathfrak{r}_3 \quad . \quad),\\
d\mathfrak{o} &= -\frac{1}{n^{V}}(\quad . \quad . \quad + d\mathfrak{r}_3 + d\mathfrak{r}_4),\\
d\mathfrak{o}^{VI} &= -\frac{1}{n^{VI}}(d\mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{r}_2 \quad . \quad . \quad),
\end{aligned}
$$

oder, wenn wir von den in Klammern stehenden Ausdrücken $d\mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{r}_2 + d\mathfrak{r}_3 + d\mathfrak{r}_4 = 0$ subtrahiren,:

$$do^{I} = 0, \qquad do^{IV} = +\frac{1}{n^{IV}}(dr_2 + dr_4),$$

$$do^{II} = +\frac{1}{n^{II}}\,dr_1, \qquad do^{V} = +\frac{1}{n^{V}}(dr_1 + dr_2),$$

$$do^{III} = +\frac{1}{n^{III}}\,dr_2, \qquad do^{VI} = +\frac{1}{n^{VI}}(dr_3 + dr_4).$$

8. Die Bildung der Faktoren der reduzirten Endgleichungen kann nach folgendem Schema erfolgen:

Nr. der Sätze.	p.	a.	b.	c.	d.	....	paa.	pab.	pac.	pad.	....	pbb.	pbc.	pbd.	....	pcc.	pcd.	....	pdd.	....
		R. 1.	R. 2.	R. 3.	R. 4.	....	$[p_1]+1$	$+1$	$+1$	$+1$	....	$[p_2]+1$	$+1$	$+1$	....	$[p_3]+1$	$+1$	....	$[p_4]+1$	....
I	$-\frac{p^{I}}{n^{I}}$																			
II	$-\frac{p^{II}}{n^{II}}$																			
III	$-\frac{p^{III}}{n^{III}}$																			
......	....																			

9. Die praktische Durchführung des hier entwickelten 2. Verfahrens ist ganz ähnlich wie beim 1. Verfahren (§ 33), so dafs es zur weitern Erläuterung nur noch der Durchrechnung unsers Beispieles bedarf, die hier folgt: (Siehe die Tabellen auf Seite 152, 153 und 154.)

10. Das im § 33, Nr. 16 und 17 dargestellte Näherungsverfahren kann auch im vorliegenden Falle, wo die in die Rechnung eingeführten Beobachtungsergebnisse verschiedenes Gewicht haben, angewendet werden, wenn die Gewichte entsprechend berücksichtigt werden. Nach den Formeln (128) soll hier $[pav]$, $[pbv]$, $[pcv]$, ... gleich Null sein. Bilden wir diese Summen in gleicher Weise, wie im § 33, Nr. 16, so erhalten wir:

$$[pav] = p_1^{I}(r_1 + o^{I} - s_1^{I}) + \quad \cdot \quad + p_1^{III}(r_1 + o^{III} - s_1^{III}) + p_1^{IV}(r_1 + o^{IV} - s_1^{IV})$$
$$+ \quad \cdot \quad + p_1^{VI}(r_1 + o^{VI} - s_1^{VI}) = 0,$$

$$[pbv] = p_2^{I}(r_2 + o^{I} - s_2^{I}) + p_2^{II}(r_2 + o^{II} - s_2^{II}) + p_2^{III}(r_2 + o^{III} - s_2^{III}) + \quad \cdot$$
$$+ \quad \cdot \quad + p_2^{VI}(r_2 + o^{VI} - s_2^{VI}) = 0,$$

....,

$$[pdv] = p_4^{I}(r_4 + o^{I} - s_4^{I}) + p_4^{II}(r_4 + o^{II} - s_4^{II}) + p_4^{III}(r_4 + o^{III} - s_4^{III}) + \quad \cdot$$
$$+ p_4^{V}(r_4 + o^{V} - s_4^{V}) + \quad \cdot \quad 0,$$

$$[pev] = p_1^{I}(r_1 + o^{I} - s_1^{I}) + p_2^{I}(r_2 + o^{I} - s_2^{I}) + p_3^{I}(r_3 + o^{I} - s_3^{I}) + p_4^{I}(r_4 + o^{I} - s_4^{I}) = 0,$$

$$[pgv] = \quad \cdot \quad + p_2^{II}(r_2 + o^{II} - s_2^{II}) + p_3^{II}(r_3 + o^{II} - s_3^{II}) + p_4^{II}(r_4 + o^{II} - s_4^{II}) = 0,$$

....,

$$[plv] = p_1^{VI}(r_1 + o^{VI} - s_1^{VI}) + p_2^{VI}(r_2 + o^{VI} - s_2^{VI}) + \quad \cdot \quad + \quad \cdot \quad = 0.$$

Hiernach mufs die Summe der mit den Gewichten multiplizirten Abweichungen zwischen den wahrscheinlichsten Werthen r der Richtungen und den orientirten Satzmitteln $s - o$, oder die Summe der mit den Gewichten multiplizirten wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler sowohl für jede einzelne Richtung, als auch für jeden Satz gleich Null sein. Dasselbe mufs in jedem Satze der Fall sein für die nicht mit den Gewichten multiplizirten Abweichungen oder

Beobachtungsfehler, da die Gewichte der einzelnen Richtungen in jedem Satze einander gleich sind.

11. Aus den obigen Gleichungen folgt:

$$r_1 = \frac{1}{[p_1]}\left(p_1^I(s_1^I - o^I) + \quad \cdot \quad + p_1^{III}(s_1^{III} - o^{III}) + p_1^{IV}(s_1^{IV} - o^{IV}) + \quad \cdot \quad + p_1^{VI}(s_1^{VI} - o^{VI})\right),$$

$$r_2 = \frac{1}{[p_2]}\left(p_2^I(s_2^I - o^I) + p_2^{II}(s_2^{II} - o^{II}) + p_2^{III}(s_2^{III} - o^{III}) + \quad \cdot \quad + \quad \cdot \quad + p_2^{VI}(s_2^{VI} - o^{VI})\right),$$

. . . .,

$$r_4 = \frac{1}{[p_4]}\left(p_4^I(s_4^I - o^I) + p_4^{II}(s_4^{II} - o^{II}) + p_4^{III}(s_4^{III} - o^{III}) + \quad \cdot \quad + p_4^V(s_4^V - o^V) + \quad \cdot \quad \right),$$

Nr. der Zielpunkte.	Satz I. Gewicht = 1,5.			Satz II. Gewicht = 1.			Satz III. Gewicht = 1,5.			Satz IV. Gewicht = 2.			Satz V. Gewicht = 1.			Satz VI. Gewicht = 1.			
	°	′	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″	
	1. Satzmittel s.																		
△13	0	00	00	.	.	.	0	00	00	0	00	00	.	.	.	0	00	00	
17	12	04	38	0	00	00	12	04	13	.	.	.	.	.	.	12	04	37	
18	37	10	03	25	05	40	.	.	.	37	10	20	0	00	00	.	.	.	
20	55	47	33	43	42	45	55	47	20	.	.	.	18	37	50	.	.	.	
[s]		02	19		48	25		51	33		10	20		37	50		04	37	
	2. Näherungswerthe $\mathfrak{r}$ der Richtungen. $\mathfrak{r}_1 = 0°00'00''$, $\mathfrak{r}_2 = 12°04'40''$, $\mathfrak{r}_3 = 37°10'20''$, $\mathfrak{r}_4 = 55°47'40''$.																		Summe. 02′ 40″
	3. Näherungswerthe $\mathfrak{o} = \frac{[s - \mathfrak{r}]}{n}$ der Orientirungswinkel.																		
△13			0	.	.	.			0			0	.	.	.			0	
17		—	2	—12	04	40		—	27			.	.	.	.		—	3	
18		—	17	—12	04	40			.			0	—37	10	20			.	
20		—	2	—12	04	55		—	20			.	—37	09	50			.	
[$s - \mathfrak{r}$]		—	21			135		—	47			0		20	10		—	3	Summe.
$\mathfrak{o}$		—	5,2	—12	04	45,0		—	15,7			0,0	—37	10	05,0		—	1,5	— 15′ 12,4″
	4. Genähert orientirte Satzmittel $s - \mathfrak{o}$.																		
△13	0	00	05,2	.	.	.	0	00	15,7	0	00	00	.	.	.	0	00	01,5	
17	12	01	43,2	12	04	45,0	12	04	28,7	.	.	.	.	.	.	12	04	38,5	
18	37	10	08,2	37	10	25,0	.	.	.	37	10	20,0	37	10	05,0	.	.	.	
20	55	47	43,2	55	47	30,0	55	47	35,7	.	.	.	55	47	55,0	.	.	.	
[$s - \mathfrak{o}$]		02	39,8		02	40,0		52	20,1		10	20,0		58	00,0		04	40,0	
$+ n \cdot \mathfrak{o}$	—	.	20,8	—	14	15,0	—	.	47,1		.	00,0	—	20	10,0	—	.	03,0	
= [s]		02	19,0		48	25,0		51	33,0		10	20,0		37	50,0		04	37,0	
	5. Abweichungen $f = \mathfrak{r} - (s - \mathfrak{o})$.																		Summe [pf].
△13		—	5,2			.		—	15,7			0,0			.		—	1,5	$-32,8 = [p_1 f_1]$
17		—	3,2		—	5,0		+	11,3			.			.		+	1,5	$+ 8,6 = [p_2 f_2]$
18		+	11,8		—	5,0			.			0,0		+	15,0			.	$+27,7 = [p_3 f_3]$
20		—	3,2		+	10,0		+	4,3			.		—	15,0			.	$- 3,3 = [p_4 f_4]$
		+	0,2			0,0		—	0,1			0,0			0,0			0,0	+ 0,2

6. Bildung der Faktoren der Endgleichungen.

	p.	a.	b.	c.	d.	paa.	pab.	pac.	pad.	pbb.	pbc.	pbd.	pcc.	pcd.	pdd.
		♁ 13	♁ 17	♁ 18	♁ 20	+ 7	+ 1	+ 1	+ 1	+ 6	+ 1	+ 1	+ 6,5	+ 1	+ 6
Satz I.	$-\frac{3}{8}$	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$
„ II.	$-\frac{1}{3}$	.	+ 1	+ 1	+ 1	.	.	.	.	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
„ III.	$-\frac{1}{2}$	+ 1	+ 1	.	+ 1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	.	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	.	$-\frac{1}{2}$	.	.	$-\frac{1}{2}$
„ IV.	-1	+ 1	.	+ 1	.	-1	.	-1	.	.	.	.	-1	.	.
„ V.	$-\frac{1}{2}$	.	.	+ 1	+ 1	.	.	.	.	.	.	.	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
„ VI.	$-\frac{1}{2}$	+ 1	+ 1	.	.	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	.	.	$-\frac{1}{2}$	.	.	.	.	.
						$+\frac{87}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{103}{24}$	$+\frac{7}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$+\frac{103}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$+\frac{103}{24}$

7. Endgleichungen.

$$
\begin{aligned}
&+111\,d\mathfrak{r}_1 - 9\,d\mathfrak{r}_2 - 9\,d\mathfrak{r}_3 + 3\,d\mathfrak{r}_4 - 787{,}2 = 0\,,\\
&-\ \ 9\,d\mathfrak{r}_1 + 103\,d\mathfrak{r}_2 + 7\,d\mathfrak{r}_3 - 5\,d\mathfrak{r}_4 + 206{,}4 = 0\,,\\
&-\ \ 9\,d\mathfrak{r}_1 + 7\,d\mathfrak{r}_2 + 103\,d\mathfrak{r}_3 - 5\,d\mathfrak{r}_4 + 664{,}8 = 0\,,\\
&+\ \ 3\,d\mathfrak{r}_1 - 5\,d\mathfrak{r}_2 - 5\,d\mathfrak{r}_3 + 103\,d\mathfrak{r}_4 - 79{,}2 = 0\,.
\end{aligned}
$$

8. Auflösung der Endgleichungen.

$[paa]$.	$[pab]$.	$[pac]$.	$[pad]$.	$[p_1f_1]$.	$[pbb]$.	$[pbc]$.	$[pbd]$.	$[p_2f_2]$.	$[pcc]$.	$[pcd]$.	$[p_3f_3]$.	$[pdd]$.	$[p_4f_4]$.	Probe.	
+111	−9	−9	+3	−787,2	+103	+7	−5	+206,4	+103	−5	+664,8	+103	−79,2		
	+0,081	+0,081	−0,027	+7,09	− 1	−1	0	− 63,7	− 1	0	− 63,7	0	+21,2	−5580	−5133
				−0,01	+102	+6	−5	+142,7	0	0	− 8,4	0	+ 7,0	− 200	− 217
				−0,47		−0,059	+0,049	−1,40	+102	−5	+592,7	0	+29,1	−3444	−3856
				−0,09			· ·	+0,01		+0,049	−5,81	+103	−21,9	− 5	− 17
								+0,34			+0,01			−9229	−9223
			$d\mathfrak{r}_1$	+6,52			$d\mathfrak{r}_2$	−1,05		$d\mathfrak{r}_3$	−5,80	$d\mathfrak{r}_4$	+0,21		

9. Wahrscheinlichste Werthe r der Richtungen.

♁ 13	$r_1 = \mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{r}_1 =$ 0°00′06,5″
17	$r_2 = \mathfrak{r}_2 + d\mathfrak{r}_2 =$ 12 04 39,0
18	$r_3 = \mathfrak{r}_3 + d\mathfrak{r}_3 =$ 37 10 14,2
20	$r_4 = \mathfrak{r}_4 + d\mathfrak{r}_4 =$ 55 47 40,2
	$[r] = [\mathfrak{r}]$ = 02 39,9

10. Wahrscheinlichste Werthe o der Orientirungswinkel.

$d\mathfrak{o}^{I} = 0$	= 0,0″	$o^{I} = \mathfrak{o}^{I} + d\mathfrak{o}^{I} =$	− 5,2″
$d\mathfrak{o}^{II} = \frac{1}{3}(+6{,}52)$	= + 2,2	$o^{II} = \mathfrak{o}^{II} + d\mathfrak{o}^{II} =$	− 12°04′42,8
$d\mathfrak{o}^{III} = \frac{1}{3}(-5{,}80)$	= − 1,9	$o^{III} = \mathfrak{o}^{III} + d\mathfrak{o}^{III} =$	− 17,6
$d\mathfrak{o}^{IV} = \frac{1}{2}(-1{,}05 + 0{,}21)$	= − 0,4	$o^{IV} = \mathfrak{o}^{IV} + d\mathfrak{o}^{IV} =$	− 0,4
$d\mathfrak{o}^{V} = \frac{1}{2}(+6{,}52 - 1{,}05)$	= + 2,7	$o^{V} = \mathfrak{o}^{V} + d\mathfrak{o}^{V} =$	− 37°10′02,3
$d\mathfrak{o}^{VI} = \frac{1}{2}(-5{,}80 + 0{,}21)$	= − 2,8	$o^{VI} = \mathfrak{o}^{VI} + d\mathfrak{o}^{VI} =$	− 4,3
$[d\mathfrak{o}] =$	− 0,2	$[o] = [\mathfrak{o}] + [d\mathfrak{o}] =$	− 15 12,6

Nr. der Zielpunkte.	Satz I. Gewicht = 1,5.			Satz II. Gewicht = 1.			Satz III. Gewicht = 1,5.			Satz IV. Gewicht = 2.			Satz V. Gewicht = 1.			Satz VI. Gewicht = 1.			
	°	'	"	°	'	"	°	'	"	°	'	"	°	'	"	°	'	"	
	11. Wahrscheinlichste Werthe $S = r + o$ der Satzmittel.																		
♁ 13	0	00	01,3	.	.	.	359	59	48,9	0	00	06,1	.	.	.	0	00	02,2	
17	12	04	33,8	359	59	56,2	12	04	21,4	.	.	.	.	.	.	12	04	34,7	
18	37	10	09,0	25	05	31,4	.	.	.	37	10	13,8	0	00	11,9	.	.	.	
20	55	47	35,0	43	42	57,4	55	47	22,6	.	.	.	18	37	37,9	.	.	.	
		02	19,1		48	25,0		51	32,9		10	19,9		37	49,8		04	36,9	
	12. Wahrscheinlichste Beobachtungsfehler $v = S - s$.																		Summe $[pv]$.
♁ 13		+	1,3			.		—	11,1		+	6,1			.		+	2,2	— 0,2
17		—	4,2		—	3,8		+	8,4			.			.		—	2,3	+ 0,2
18		+	6,0		—	8,6			.		—	6,2		+	11,9			.	— 0,1
20		—	3,0		+	12,4		+	2,6			.		—	12,1			.	— 0,3
		+	0,1			0,0		—	0,1		—	0,1		—	0,2		—	0,1	— 0,4
	13. Quadratsumme $[pvv]$.																		Summe.
♁ 13			2			.			185			74			.			5	266
17			26			14			106			.			.			5	151
18			54			74			.			77			142			.	347
20			14			154			10			.			146			.	324
			96			242			301			151			288			10	1088

$$m = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n - (n_r + n_s - 1)}} = \pm \sqrt{\frac{1088}{16 - 9}} = \pm 12{,}5''. \qquad m = \pm m \sqrt{\frac{1}{p}} = \pm 12{,}5 \sqrt{\frac{1}{0{,}5}} = \pm 17{,}6''.$$

$$o^I = \frac{1}{4}\left((s_1^I - r_1) + (s_2^I - r_2) + (s_3^I - r_3) + (s_4^I - r_4)\right),$$

$$o^{II} = \frac{1}{3}\left(\quad \cdot \quad + (s_2^{II} - r_2) + (s_3^{II} - r_3) + (s_4^{II} - r_4)\right),$$

. . . .,

$$o^{VI} = \frac{1}{2}\left((s_1^{VI} - r_1) + (s_2^{VI} - r_2) + \quad \cdot \quad + \quad \cdot \quad\right).$$

Hiernach sind die wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen r je gleich dem unter Berücksichtigung der Gewichte gebildeten, allgemeinen arithmetischen Mittel der orientirten Satzmittel $s - o$ für die betreffende Richtung und die wahrscheinlichsten Werthe der Orientirungswinkel o je gleich dem einfachen arithmetischen Mittel der Unterschiede $s - r$ der Satzmittel und der wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen in dem betreffenden Satze.

Aus den vorstehenden Formeln und Regeln ergiebt sich ohne weiteres wie bei dem im § 33, Nr. 17 dargestellten Näherungsverfahren nöthigenfalls die Gewichte zu berücksichtigen sind.*)

§ 35. Bestimmung der Hauptpunkte eines Polygonnetzes.

Wir benutzen hier nochmals das bereits im § 21 nach dem Verfahren für direkte Beobachtungen behandelte Beispiel und lösen die dort gestellte Aufgabe nunmehr nach dem Verfahren für vermittelnde Beobachtungen.

*) Beispiele sind an den in der Note zu § 33, Nr. 17 angegebenen Stellen gegeben.

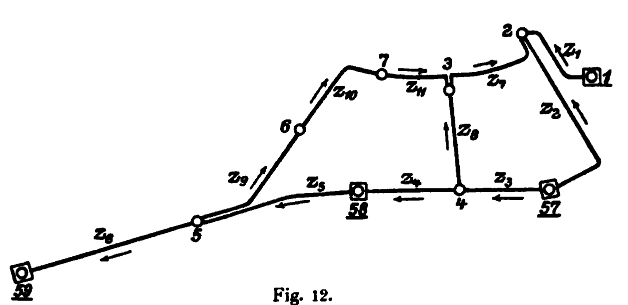


Fig. 12.

Wir setzen die das Nivellementsnetz darstellende Figur wieder hierher und stellen die gegebenen Höhen, die gemittelten Höhenunterschiede (Spalte 5, Seite 80) und deren Gewichte (Spalte 6, Seite 80) hier nochmals zusammen:

Gegebene Höhen.	Der Züge Nr.	Der Züge Anfangs- und Endpunkte.	Gemittelte Höhenunterschiede.	Gewichte.
$H_1 = \mathbf{58{,}725}$	1	**1**—2	$\Delta h_1 = 2{,}9748$	$p_1 = 0{,}82$
$H_{57} = \mathbf{61{,}142}$	2	**57**—2	$\Delta h_2 = 0{,}5625$	$p_2 = 0{,}44$
$H_{58} = \mathbf{61{,}128}$	3	**57**—4	$\Delta h_3 = \times 9{,}5052$	$p_3 = 1{,}12$
$H_{59} = \mathbf{60{,}325}$	4	4—**58**	$\Delta h_4 = 0{,}4815$	$p_4 = 1{,}02$
	5	**58**—5	$\Delta h_5 = 0{,}3038$	$p_5 = 0{,}56$
	6	5—**59**	$\Delta h_6 = \times 8{,}9010$	$p_6 = 0{,}50$
	7	2—3	$\Delta h_7 = \times 5{,}6622$	$p_7 = 0{,}64$
	8	4—3	$\Delta h_8 = \times 6{,}7038$	$p_8 = 0{,}98$
	9	5—6	$\Delta h_9 = \times 8{,}2362$	$p_9 = 0{,}70$
	10	6—7	$\Delta h_{10} = \times 7{,}3380$	$p_{10} = 0{,}92$
	11	7—3	$\Delta h_{11} = 0{,}3545$	$p_{11} = 1{,}10$
			$[\Delta h] = \times 1{,}0235$	$[p] = 8{,}80$

Unsere Aufgabe ist wieder, die wahrscheinlichsten Werthe H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7 der Höhen der Punkte 2, 3, 4, 5, 6, 7 und den mittleren Fehler $\mathfrak{m}_{1\,km}$ eines einmaligen Nivellements einer Strecke von 1 Kilometer Länge mit Zielweiten von 50^m, dessen Gewicht $\mathfrak{p}_{1\,km} = 0{,}25$ ist, zu berechnen.

1. Zwischen den wahren Werthen (Δh) der beobachteten Höhenunterschiede und den wahren Werthen (H) der zu bestimmenden Höhen besteht allgemein die Beziehung, dafs der Höhenunterschied gleich sein mufs dem Unterschiede zwischen der Höhe des Anfangspunktes und der Höhe des Endpunktes des betreffenden Zuges. Hiernach ergeben sich für diese Beziehungen die folgenden Gleichungen:

$$
\text{(108)}\quad \left\{
\begin{array}{ll|ll}
(\Delta h_1) = (H_2) - \mathbf{H}_1\,, & & (\Delta h_7\,) = (H_3) - (H_2), & \\
(\Delta h_2) = (H_2) - \mathbf{H}_{57}, & & (\Delta h_8\,) = (H_3) - (H_4), & \\
(\Delta h_3) = (H_4) - \mathbf{H}_{57}, & & (\Delta h_9\,) = (H_6) - (H_5), & \\
(\Delta h_4) = \mathbf{H}_{58} - (H_4), & & (\Delta h_{10}) = (H_7) - (H_6), & \\
(\Delta h_5) = (H_5) - \mathbf{H}_{58}, & & (\Delta h_{11}) = (H_3) - (H_7). & \\
(\Delta h_6) = \mathbf{H}_{59} - (H_5), & & &
\end{array}
\right.
$$

2. Daraus folgen für die wahrscheinlichsten Werthe ΔH der Höhenunterschiede und die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler v die Fehlergleichungen:

$$
\text{(109)}\quad \left\{
\begin{array}{ll|ll}
\Delta H_1 = H_2 - \mathbf{H}_1\,, & & \Delta H_7 = H_3 - H_2\,, & \\
\Delta H_2 = H_2 - \mathbf{H}_{57}, & & \Delta H_8 = H_3 - H_4\,, & \\
\Delta H_3 = H_4 - \mathbf{H}_{57}, & & \Delta H_9 = H_6 - H_5\,, & \\
\Delta H_4 = \mathbf{H}_{58} - H_4\,, & & \Delta H_{10} = H_7 - H_6\,, & \\
\Delta H_5 = H_5 - \mathbf{H}_{58}, & & \Delta H_{11} = H_3 - H_7\,; & \\
\Delta H_6 = \mathbf{H}_{59} - H_5\,, & & &
\end{array}
\right.
$$

$$(110)\quad \begin{cases} v_1 = \Delta H_1 - \Delta h_1, & v_7 = \Delta H_7 - \Delta h_7, \\ v_2 = \Delta H_2 - \Delta h_2, & v_8 = \Delta H_8 - \Delta h_8, \\ v_3 = \Delta H_3 - \Delta h_3, & v_9 = \Delta H_9 - \Delta h_9, \\ v_4 = \Delta H_4 - \Delta h_4, & v_{10} = \Delta H_{10} - \Delta h_{10}, \\ v_5 = \Delta H_5 - \Delta h_5, & v_{11} = \Delta H_{11} - \Delta h_{11}. \\ v_6 = \Delta H_6 - \Delta h_6, & \end{cases}$$

3. Die wahrscheinlichsten Werthe H der zu bestimmenden Höhen zerlegen wir in die Näherungswerthe $\mathfrak{h}$ und die ihnen beizufügenden Aenderungen $d\mathfrak{h}$:

$$(111)\quad \begin{cases} H_2 = \mathfrak{h}_2 + d\mathfrak{h}_2, & H_5 = \mathfrak{h}_5 + d\mathfrak{h}_5, \\ H_3 = \mathfrak{h}_3 + d\mathfrak{h}_3, & H_6 = \mathfrak{h}_6 + d\mathfrak{h}_6, \\ H_4 = \mathfrak{h}_4 + d\mathfrak{h}_4, & H_7 = \mathfrak{h}_7 + d\mathfrak{h}_7. \end{cases}$$

4. Mit den Näherungswerthen $\mathfrak{h}$ der zu bestimmenden Höhen ergeben sich die Näherungswerthe $\Delta\mathfrak{h}$ der beobachteten Höhenunterschiede nach:

$$(112)\quad \begin{cases} \Delta\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2 - H_1, & \Delta\mathfrak{h}_7 = \mathfrak{h}_3 - \mathfrak{h}_2, \\ \Delta\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_2 - H_{57}, & \Delta\mathfrak{h}_8 = \mathfrak{h}_3 - \mathfrak{h}_4, \\ \Delta\mathfrak{h}_3 = \mathfrak{h}_4 - H_{57}, & \Delta\mathfrak{h}_9 = \mathfrak{h}_6 - \mathfrak{h}_5, \\ \Delta\mathfrak{h}_4 = H_{58} - \mathfrak{h}_4, & \Delta\mathfrak{h}_{10} = \mathfrak{h}_7 - \mathfrak{h}_6, \\ \Delta\mathfrak{h}_5 = \mathfrak{h}_5 - H_{58}, & \Delta\mathfrak{h}_{11} = \mathfrak{h}_3 - \mathfrak{h}_7. \\ \Delta\mathfrak{h}_6 = H_{59} - \mathfrak{h}_5, & \end{cases}$$

Ferner ergeben sich die wahrscheinlichsten Werthe ΔH der Höhenunterschiede aus den Näherungswerthen $\Delta\mathfrak{h}$ derselben und den diesen beizufügenden, den Aenderungen $d\mathfrak{h}$ entsprechenden Aenderungen $d\Delta\mathfrak{h}$ nach:

$$(113)\quad \begin{cases} \Delta H_1 = \Delta\mathfrak{h}_1 + d\Delta\mathfrak{h}_1, & \Delta H_7 = \Delta\mathfrak{h}_7 + d\Delta\mathfrak{h}_7, \\ \Delta H_2 = \Delta\mathfrak{h}_2 + d\Delta\mathfrak{h}_2, & \Delta H_8 = \Delta\mathfrak{h}_8 + d\Delta\mathfrak{h}_8, \\ \Delta H_3 = \Delta\mathfrak{h}_3 + d\Delta\mathfrak{h}_3, & \Delta H_9 = \Delta\mathfrak{h}_9 + d\Delta\mathfrak{h}_9, \\ \Delta H_4 = \Delta\mathfrak{h}_4 + d\Delta\mathfrak{h}_4, & \Delta H_{10} = \Delta\mathfrak{h}_{10} + d\Delta\mathfrak{h}_{10}, \\ \Delta H_5 = \Delta\mathfrak{h}_5 + d\Delta\mathfrak{h}_5, & \Delta H_{11} = \Delta\mathfrak{h}_{11} + d\Delta\mathfrak{h}_{11}. \\ \Delta H_6 = \Delta\mathfrak{h}_6 + d\Delta\mathfrak{h}_6, & \end{cases}$$

5. Differenziren wir die Ausdrücke (**112**) für die Näherungswerthe $\Delta\mathfrak{h}$ nach $\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3, \ldots \mathfrak{h}_7$, so erhalten wir folgende Differenzialquotienten $a, b, \ldots g$:

(Tabelle zu

Nr.	p.	a.	b.	c.	d.	e.	g.	f.	paa.	pab.	pac.	pad.	pae.	pag.	paf.	pbb.	pbc.	pbd.	pbe.	pbg.
1	p_1	+1	·	·	·	·	·	f_1	$+p_1$	·	·	·	·	·	$+p_1f_1$	·	·	·	·	·
2	p_2	+1	·	·	·	·	·	f_2	$+p_2$	·	·	·	·	·	$+p_2f_2$	·	·	·	·	·
3	p_3	·	·	+1	·	·	·	f_3	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
4	p_4	·	·	−1	·	·	·	f_4	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
5	p_5	·	·	·	+1	·	·	f_5	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
6	p_6	·	·	·	−1	·	·	f_6	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
7	p_7	−1	+1	·	·	·	·	f_7	$+p_7$	$-p_7$	·	·	·	·	$-p_7f_7$	$+p_7$	·	·	·	·
8	p_8	·	+1	−1	·	·	·	f_8	·	·	·	·	·	·	·	$+p_8$	$-p_8$	·	·	·
9	p_9	·	·	·	−1	+1	·	f_9	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
10	p_{10}	·	·	·	·	−1	+1	f_{10}	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
11	p_{11}	·	+1	·	·	·	−1	f_{11}	·	·	·	·	·	·	·	$+p_{11}$	·	·	·	$-p_{11}$
									$+p_1$	$-p_7$	·	·	·	·	$+p_1f_1$	$+p_7$	$-p_8$	·	·	$-p_{11}$
									$+p_2$						$+p_2f_2$	$+p_8$				
									$+p_7$						$-p_7f_7$	$+p_{11}$				

(114)

Nr.	$a = \frac{\partial \Delta \mathfrak{h}}{\partial \mathfrak{h}_2}$.	$b = \frac{\partial \Delta \mathfrak{h}}{\partial \mathfrak{h}_3}$.	$c = \frac{\partial \Delta \mathfrak{h}}{\partial \mathfrak{h}_4}$.	$d = \frac{\partial \Delta \mathfrak{h}}{\partial \mathfrak{h}_5}$.	$e = \frac{\partial \Delta \mathfrak{h}}{\partial \mathfrak{h}_6}$.	$g = \frac{\partial \Delta \mathfrak{h}}{\partial \mathfrak{h}_7}$.
1	$a_1 = +1$	.	.	.	.	.
2	$a_2 = +1$	.	.	.	.	.
3	.	.	$c_3 = +1$	.	.	.
4	.	.	$c_4 = -1$	.	.	.
5	.	.	.	$d_5 = +1$	.	.
6	.	.	.	$d_6 = -1$	.	.
7	$a_7 = -1$	$b_7 = +1$	.	.	.	.
8	.	$b_8 = +1$	$c_8 = -1$	.	.	.
9	.	.	.	$d_9 = -1$	$e_9 = +1$	.
10	.	.	.	.	$e_{10} = -1$	$g_{10} = +1$
11	.	$b_{11} = +1$	.	.	.	$g_{11} = -1$

Die Abweichungen f der Näherungswerthe $\Delta \mathfrak{h}$ von den beobachteten Höhenunterschieden Δh ergeben sich nach:

(115)
$$\begin{cases} f_1 = \Delta \mathfrak{h}_1 - \Delta h_1, \\ f_2 = \Delta \mathfrak{h}_2 - \Delta h_2, \\ f_3 = \Delta \mathfrak{h}_3 - \Delta h_3, \\ f_4 = \Delta \mathfrak{h}_4 - \Delta h_4, \\ f_5 = \Delta \mathfrak{h}_5 - \Delta h_5, \\ f_6 = \Delta \mathfrak{h}_6 - \Delta h_6, \end{cases} \qquad \begin{aligned} f_7 &= \Delta \mathfrak{h}_7 - \Delta h_7, \\ f_8 &= \Delta \mathfrak{h}_8 - \Delta h_8, \\ f_9 &= \Delta \mathfrak{h}_9 - \Delta h_9, \\ f_{10} &= \Delta \mathfrak{h}_{10} - \Delta h_{10}, \\ f_{11} &= \Delta \mathfrak{h}_{11} - \Delta h_{11}. \end{aligned}$$

6. Hiernach erhalten wir folgende umgeformte Fehlergleichungen:

(116)
$$\begin{cases} d\Delta \mathfrak{h}_1 = +d\mathfrak{h}_2, \\ d\Delta \mathfrak{h}_2 = +d\mathfrak{h}_2, \\ d\Delta \mathfrak{h}_3 = +d\mathfrak{h}_4, \\ d\Delta \mathfrak{h}_4 = -d\mathfrak{h}_4, \\ d\Delta \mathfrak{h}_5 = +d\mathfrak{h}_5, \\ d\Delta \mathfrak{h}_6 = -d\mathfrak{h}_5, \\ d\Delta \mathfrak{h}_7 = -d\mathfrak{h}_2 + d\mathfrak{h}_3, \\ d\Delta \mathfrak{h}_8 = +d\mathfrak{h}_3 - d\mathfrak{h}_4, \\ d\Delta \mathfrak{h}_9 = -d\mathfrak{h}_5 + d\mathfrak{h}_6, \\ d\Delta \mathfrak{h}_{10} = -d\mathfrak{h}_6 + d\mathfrak{h}_7, \\ d\Delta \mathfrak{h}_{11} = +d\mathfrak{h}_3 - d\mathfrak{h}_7; \end{cases}$$

(117)
$$\begin{cases} v_1 = f_1 + d\Delta \mathfrak{h}_1, \\ v_2 = f_2 + d\Delta \mathfrak{h}_2, \\ v_3 = f_3 + d\Delta \mathfrak{h}_3, \\ v_4 = f_4 + d\Delta \mathfrak{h}_4, \\ v_5 = f_5 + d\Delta \mathfrak{h}_5, \\ v_6 = f_6 + d\Delta \mathfrak{h}_6, \\ v_7 = f_7 + d\Delta \mathfrak{h}_7, \\ v_8 = f_8 + d\Delta \mathfrak{h}_8, \\ v_9 = f_9 + d\Delta \mathfrak{h}_9, \\ v_{10} = f_{10} + d\Delta \mathfrak{h}_{10}, \\ v_{11} = f_{11} + d\Delta \mathfrak{h}_{11}. \end{cases}$$

Nr. 7, Seite 160.)

pbf.	pcc.	pcd.	pce.	pcg.	pcf.	pdd.	pde.	pdg.	pdf.	pee.	peg.	pef.	pgg.	pgf.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	$+p_3$	.	.	.	$+p_3 f_3$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	$+p_4$	.	.	.	$-p_4 f_4$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	$+p_5$	.	.	$+p_5 f_5$	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	$+p_6$	.	.	$-p_6 f_6$	.	.	.	.	.
$+p_7 f_7$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$+p_8 f_8$	$+p_8$	.	.	.	$-p_8 f_8$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	$+p_9$	$-p_9$	.	$-p_9 f_9$	$+p_9$	.	$+p_9 f_9$	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$+p_{10}$	$-p_{10}$	$-p_{10} f_{10}$	$+p_{10}$	$+p_{10} f_{10}$
$+p_{11} f_{11}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$+p_{11}$	$-p_{11} f_{11}$
$+p_7 f_7$	$+p_3$	.	.	.	$+p_3 f_3$	$+p_5$	$-p_9$	.	$+p_5 f_5$	$+p_9$	$-p_{10}$	$+p_9 f_9$	$+p_{10}$	$+p_{10} f_{10}$
$+p_8 f_8$	$+p_4$	.	.	.	$-p_4 f_4$	$+p_6$			$-p_6 f_6$	$+p_{10}$		$-p_{10} f_{10}$	$+p_{11}$	$-p_{11} f_{11}$.
$+p_{11} f_{11}$	$+p_8$	.	.	.	$-p_8 f_8$	$+p_9$			$-p_9 f_9$					

1. Näherungswerthe $\mathfrak{h}$ der Höhen.						2. Näherungswerthe $\Delta\mathfrak{h}$ der Höhenunterschiede.						3. Abweichungen f.		4. Produkte pf.	
Anfangspunkt Nr.	Anfangspunkt Höhe h.	Zug Nr.	Zug Höhenunterschied Δh.	Zu bestimmender Punkt Nr.	Zu bestimmender Punkt Höhe $\mathfrak{h} = h + \Delta h$	Nr. der Züge.	Anfangspunkt Nr.	Anfangspunkt Höhe $\mathfrak{h}_a$.	Endpunkt Nr.	Endpunkt Höhe $\mathfrak{h}_e$.	Höhenunterschied $\Delta\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_e - \mathfrak{h}_a$.	Beobachteter Höhenunterschied Δh.	$f = \Delta\mathfrak{h} - \Delta h$. mm	Gewichte p.	pf.
1	**58,73**	1	2,97	2	61,70	1	**1**	**58,725**	2	61,700	2,9750	2,9748	+0,2	0,82	+0,16
2	61,70	7	×5,66	3	57,36	2	**57**	**61,142**	2	61,700	0,5580	0,5625	-4,5	0,44	−1,98
3	57,36	11	×9,65	7	57,01	3	**57**	**61,142**	4	60,650	×9,5080	×9,5052	+2,8	1,12	+3,14
7	57,01	10	2,66	6	59,67	4	4	60,650	**58**	**61,128**	0,4780	0,4815	−3,5	1,02	−3,57
6	59,67	9	1,76	5	61,43	5	**58**	**61,128**	5	61,430	0,3020	0,3038	−1,8	0,56	−1,01
5	61,43	6	×8,90	**59**	(60,33)	6	5	61,430	**59**	**60,325**	×8,8950	×8,9010	−6,0	0,50	−3,00
57	**61,14**	3	×9,51	4	60,65	7	2	61,700	3	57,360	×5,6600	×5,6622	−2,2	0,64	−1,41
4	60,65	4	0,48	**58**	(61,13)	8	4	60,650	3	57,360	×6,7100	×6,7038	+6,2	0,98	+6,08
						9	5	61,430	6	59,670	×8,2400	×8,2362	+3,8	0,70	+2,66
						10	6	59,670	7	57,010	×7,3400	×7,3380	+2,0	0,92	+1,84
						11	7	57,010	3	57,360	0,3500	0,3545	−4,5	1,10	−4,95
								,677		,693	,0160	,0235	-7,5	8,80	

5. Bildung der Faktoren u. s. w. der Endgleichungen, Auflösung der Endgleichungen

$P_a : \odot\, 2.$								$P_b : \odot\, 3.$							$P_c :$		
Nr. der Züge.	[paa].	[pab].	[pac].	[pad].	[pae].	[pag].	[paf].	Nr. der Züge.	[pbb].	[pbc].	[pbd].	[pbe].	[pbg].	[pbf].	Nr. der Züge.	[pcc].	[pcd].
1	0,82						+0,16	7	0,64					−1,41	3	1,12	
2	0,44						−1,98	8	0,98	−0,98				+6,08	4	1,02	
7	0,64	−0,64					+1,41	11	1,10				−1,10	−4,95	8	0,98	
	+1,90	−0,64	.	.	.	.	−0,41		+2,72	−0,98	.	.	−1,10	−0,28		+3,12	.
		+0,34	.	.	.	.	+0,22		−0,22	.	.	.	.	−0,14		.	.
							.		+2,50	−0,98	.	.	−1,10	−0,42		−0,38	.
							.			+0,39	.	.	+0,44	+0,17		+2,74	.
							.							−3,70			.
							.							.			
							−1,40							.			
														−0,59			
							$d\mathfrak{h}_2 = -1,18$							$d\mathfrak{h}_3 = -4,12$			
							$\mathfrak{h}_2 = 61,7000$							$\mathfrak{h}_3 = 57,3600$			
							$H_2 = 61,6988$							$H_3 = 57,3559$			

6. Wahrscheinlichste Werthe ΔH der Höhenunterschiede.					7. Fehler v.	8. Aenderungen $d\Delta\mathfrak{h}$ der Näherungswerthe der Höhenunterschiede und Fehler v.						9. Quadratsummen.		
Anfangspunkt		Endpunkt		Höhenunterschied $\Delta H = H_e - H_a$.	$v = \Delta H - \Delta h$.	Anfangspunkt		Endpunkt		$d\Delta\mathfrak{h} = d\mathfrak{h}_e - d\mathfrak{h}_a$.	$v = f + d\Delta\mathfrak{h}$.	pv.	pff.	pvv.
Nr.	Höhe H_a.	Nr.	Höhe H_e.		mm	Nr.	$d\mathfrak{h}_a$. mm	Nr.	$d\mathfrak{h}_e$. mm	mm	mm			
1	**58,7250**	2	61,6988	2,9738	− 1,0	**1**	.	2	− 1,2	−1,2	− 1,0	−0,82	0,03	0,82
57	**61,1420**	2	61,6988	0,5568	− 5,7	**57**	.	2	− 1,2	−1,2	− 5,7	−2,51	8,91	14,31
57	**61,1420**	4	60,6485	×9,5065	+ 1,3	**57**	.	4	− 1,5	−1,5	+ 1,3	+1,46	8,79	1,90
4	60,6485	**58**	**61,1280**	0,4795	− 2,0	4	− 1,5	**58**	.	+1,5	− 2,0	−2,04	12,50	4,08
58	**61,1280**	5	61,4279	0,2999	− 3,9	**58**	.	5	− 2,1	−2,1	− 3,9	−2,18	1,82	8,50
5	61,4279	**59**	**60,3250**	×8,8971	− 3,9	5	− 2,1	**59**	.	+2,1	− 3,9	−1,95	18,00	7,60
2	61,6988	3	57,3559	×5,6571	− 5,1	2	− 1,2	3	− 4,1	−2,9	− 5,1	−3,26	3,10	16,63
4	60,6485	3	57,3559	×6,7074	+ 3,6	4	− 1,5	3	− 4,1	−2,6	+ 3,6	+3,53	37,70	12,71
5	61,4279	6	59,6638	×8,2359	− 0,3	5	− 2,1	6	− 6,2	−4,1	− 0,3	−0,21	10,11	0,06
6	59,6638	7	57,0016	×7,3378	− 0,2	6	− 6,2	7	− 8,4	−2,2	− 0,2	−0,18	3,68	0,04
7	57,0016	3	57,3559	0,3543	− 0,2	7	− 8,4	3	− 4,1	+4,3	− 0,2	−0,22	22,28	0,04
	,6540		,6601	,0061	−17,4		−23,0		−32,9	−9,9	−17,4		126,92	66,69

und Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe H der Höhen.

⊙ 4.

[pce].	[pcg].	[pcf].
		+3,14
		+3,57
		−6,08
.	.	+0,63
.	.	.
.	−0,43	−0,16
.	−0,43	+0,47
.	+0,16	−0,17
		−1,35
		.
		.

$d\mathfrak{h}_4 = -1,52$
$\mathfrak{h}_4 = 60,6500$
$H_4 = 60,6485$

P_d : ⊙ 5.

Nr. d. Züge.	[pdd].	[pde].	[pdg].	[pdf].
5	0,56			−1,01
6	0,50			+3,00
9	0,70	−0,70		−2,66
	+1,76	−0,70	.	−0,67
	.	.	.	.
	.	.	.	.
	.	.	.	.
	+1,76	−0,70	.	−0,67
		+0,40	.	+0,38
				.
				−2,49

$d\mathfrak{h}_5 = -2,11$
$\mathfrak{h}_5 = 61,4300$
$H_5 = 61,4279$

P_e : ⊙ 6.

Nr. d. Züge.	[pee].	[peg].	[pef].
9	0,70		+2,66
10	0,92	−0,92	−1,84
	+1,62	−0,92	+0,82
	.	.	.
	.	.	.
	.	.	.
	−0,28	.	−0,27
	+1,34	−0,92	+0,55
		+0,69	−0,41
			−5,81

$d\mathfrak{h}_6 = -6,22$
$\mathfrak{h}_6 = 59,6700$
$H_6 = 59,6638$

P_g : ⊙ 7.

Nr. d. Züge.	[pgg].	[pgf].
10	0,92	+1,84
11	1,10	+4,95
	+2,02	+6,79
	.	.
	−0,48	−0,18
	−0,07	+0,08
	.	.
	−0,63	+0,38
	+0,84	+7,07

$d\mathfrak{h}_7 = -8,42$
$\mathfrak{h}_7 = 57,0100$
$H_7 = 57,0016$

10. Mittlere Fehler.

$$m = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-q}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{66,7}{11-6}} = \pm 3,7^{\text{mm}}$$

$$m_{1\,\text{km}} = \pm m\sqrt{\frac{1}{p_{1\,\text{km}}}}$$

$$= \pm 3,7\sqrt{\frac{1}{0,25}} = \pm 7,4.$$

Probe.

−	+
− 0,09	+ 0,48
− 0,07	+ 1,16
− 0,08	− 0,96
− 0,25	+ 1,41
− 0,23	− 5,10
−59,53	−57,17
−60,25	−60,18

$= \Sigma$.

11. Schlufsprobe.

$[pvv] = [pff] + \Sigma$
$= 126,9 - 60,2$
$= 66,7.$

7. Mit den Faktoren $a, b, \ldots . g$ der umgeformten Fehlergleichungen, den Abweichungen f und den Gewichten $p_1, p_2, p_3, \ldots . p_{11}$ ergeben sich die Faktoren und Absolutglieder der Endgleichungen in vorstehender Tabelle (Seite 156 und 157) in gewohnter Weise.

8. Die Faktoren u. s. w. der Endgleichungen können aber auch in einfacherer Weise nach mechanischen Regeln gebildet werden.

Bezeichnen wir in unserer Figur die neu zu bestimmenden Punkte mit $P_a, P_b, P_c, P_d, P_e, P_g$ entsprechend der Bezeichnung a, b, c, d, e, g der Differenzialquotienten nach $\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3, \mathfrak{h}_4, \mathfrak{h}_5, \mathfrak{h}_6, \mathfrak{h}_7$, so ergeben sich durch Vergleichung der vorstehenden Tabelle (Seite 156 und 157) mit der Figur die folgenden Regeln:

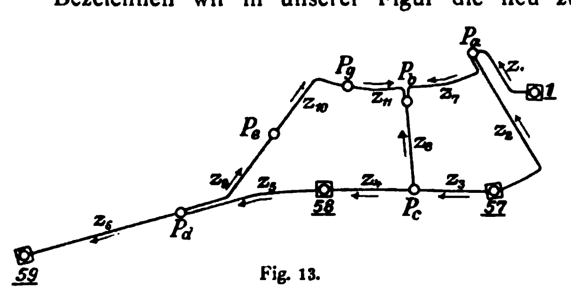


Fig. 13.

1. $[paa]$, $[pbb]$, $[pcc]$, $[pdd]$, ... sind gleich der Summe der Gewichte der Züge, die die Punkte P_a, P_b, P_c, P_d, ... treffen.

2. $[pab]$, $[pac]$, $[pad]$, ..., $[pbc]$, $[pbd]$, ..., $[pcd]$, ..., ... sind gleich den negativen Gewichten der Züge P_aP_b, P_aP_c, P_aP_d, ..., P_bP_c, P_bP_d, ..., P_cP_d, ..., ...

3. $[paf]$, $[pbf]$, $[pcf]$, $[pdf]$, ... setzen sich zusammen aus den Produkten pf der Züge, die die Punkte P_a, P_b, P_c, P_d, ... treffen und zwar so, dafs bei Bildung der Summe die Produkte pf für die Züge, die auf den betreffenden Punkten e n d i g e n, im p o s i t i v e n Sinne und für die Züge, die auf dem betreffenden Punkte a n f a n g e n, im n e g a t i v e n Sinne zu nehmen sind.

9. Die Auflösung der Endgleichungen, die Berechnuug des mittleren Fehlers und die Ziehung der Rechenproben erfolgt nach den Formeln (**120**a) bis (**129**) in gewohnter Weise.

10. Die Rechnung gestaltet sich für unser Beispiel in schematischer Anordnung wie folgt: (Siehe Seite 158 und 159.)

11. Die vorliegende Aufgabe kann auch in folgender Weise behandelt werden:

Aus den im Felde erhaltenen Lattenablesungen können Höhen h_a und h_e des Anfangs- und Endpunktes des Zuges gebildet werden, die sich auf einen beliebigen Punkt P als Anfangspunkt beziehen. Aus den wahren Werthen (h_a) und (h_e) dieser Höhen werden dann die wahren Werthe (H_a) und (H_e) der sich auf den Normal-Höhenpunkt (NN) beziehenden Höhen gewonnen durch Zulegung des wahren Werthes (o) des Höhenunterschiedes zwischen dem für die Höhen h_a und h_e gewählten Anfangspunkte und dem Normal-Höhenpunkte, so dafs wird:

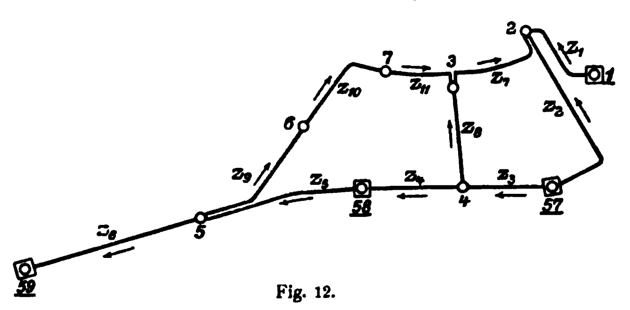


Fig. 12.

$$(H_a) = (h_a) + (o), \qquad \text{oder} \qquad (h_a) = (H_a) - (o),$$
$$(H_e) = (h_e) + (o), \qquad\qquad (h_e) = (H_e) - (o).$$

Hiernach ergeben sich für unser Beispiel die folgenden Gleichungen für die Beziehungen zwischen den wahren Werthen (h) der beobachteten Höhen, den wahren Werthen (H) der zu bestimmenden Höhen und den wahren Werthen (o) der Orientirungshöhenunterschiede:

$$
(108)\left\{\begin{array}{l|l|l}
\text{Zug 1:}\ (h^1_1) = H_1 - (o^1), & \text{Zug 5:}\ (h^5_{58}) = H_{58} - (o^5), & \text{Zug 9:}\ (h^9_5) = (H_5) - (o^9), \\
\qquad (h^1_2) = (H_2) - (o^1), & \qquad (h^5_5) = (H_5) - (o^5), & \qquad (h^9_6) = (H_6) - (o^9), \\
\text{Zug 2:}\ (h^2_{57}) = H_{57} - (o^2), & \text{Zug 6:}\ (h^6_5) = (H_5) - (o^6), & \text{Zug 10:}\ (h^{10}_6) = (H_6) - (o^{10}), \\
\qquad (h^2_2) = (H_2) - (o^2), & \qquad (h^6_{59}) = H_{59} - (o^6), & \qquad (h^{10}_7) = (H_7) - (o^{10}), \\
\text{Zug 3:}\ (h^3_{57}) = H_{57} - (o^3), & \text{Zug 7:}\ (h^7_2) = (H_2) - (o^7), & \text{Zug 11:}\ (h^{11}_7) = (H_7) - (o^{11}), \\
\qquad (h^3_4) = (H_4) - (o^3), & \qquad (h^7_3) = (H_3) - (o^7), & \qquad (h^{11}_3) = (H_3) - (o^{11}). \\
\text{Zug 4:}\ (h^4_4) = (H_4) - (o^4), & \text{Zug 8:}\ (h^8_4) = (H_4) - (o^8), & \\
\qquad (h^4_{58}) = H_{58} - (o^4), & \qquad (h^8_3) = (H_3) - (o^8), &
\end{array}\right.
$$

Hieraus ergeben sich folgende Fehlergleichungen (**109**) und (**110**), die wir gleich zusammenfassen:

$$
\begin{array}{c} (109) \\ \text{und} \\ (110) \end{array}\left\{\begin{array}{l|l|l}
\text{Zug 1:}\ v^1_1 = H_1 - o^1 - h^1_1, & \text{Zug 5:}\ v^5_{58} = H_{58} - o^5 - h^5_{58}, & \text{Zug 9:}\ v^9_5 = H_5 - o^9 - h^9_5, \\
\qquad v^1_2 = H_2 - o^1 - h^1_2, & \qquad v^5_5 = H_5 - o^5 - h^5_5, & \qquad v^9_6 = H_6 - o^9 - h^9_6, \\
\text{Zug 2:}\ v^2_{57} = H_{57} - o^2 - h^2_{57}, & \text{Zug 6:}\ v^6_5 = H_5 - o^6 - h^6_5, & \text{Zug 10:}\ v^{10}_6 = H_6 - o^{10} - h^{10}_6, \\
\qquad v^2_2 = H_2 - o^2 - h^2_2, & \qquad v^6_{59} = H_{59} - o^6 - h^6_{59}, & \qquad v^{10}_7 = H_7 - o^{10} - h^{10}_7, \\
\text{Zug 3:}\ v^3_{57} = H_{57} - o^3 - h^3_{57}, & \text{Zug 7:}\ v^7_2 = H_2 - o^7 - h^7_2, & \text{Zug 11:}\ v^{11}_7 = H_7 - o^{11} - h^{11}_7, \\
\qquad v^3_4 = H_4 - o^3 - h^3_4, & \qquad v^7_3 = H_3 - o^7 - h^7_3, & \qquad v^{11}_3 = H_3 - o^{11} - h^{11}_3. \\
\text{Zug 4:}\ v^4_4 = H_4 - o^4 - h^4_4, & \text{Zug 8:}\ v^8_4 = H_4 - o^8 - h^8_4, & \\
\qquad v^4_{58} = H_{58} - o^4 - h^4_{58}, & \qquad v^8_3 = H_3 - o^8 - h^8_3, &
\end{array}\right.
$$

Wie sich die Gleichungen zwischen den Näherungswerthen $\mathfrak{h}$ der beobachteten Höhen, den Näherungswerthen $\mathfrak{H}$ der zu bestimmenden Höhen und den Näherungswerthen $\mathfrak{o}$ der ebenfalls zu bestimmenden Orientirungshöhenunterschiede gestalten, ist nach den Gleichungen (**108**) leicht zu übersehen. Da jene Gleichungen für das folgende aber bedeutungslos sind, schreiben wir hier ohne weiteres die Differenzialquotienten nach den Gleichungen (**108**) an:

$$
(114)\left\{\begin{array}{l|l|l}
a^1 = \dfrac{\partial \mathfrak{h}^1_2}{\partial \mathfrak{H}_2} = +1, & a^2 = \dfrac{\partial \mathfrak{h}^2_2}{\partial \mathfrak{H}_2} = +1, & a^7 = \dfrac{\partial \mathfrak{h}^7_2}{\partial \mathfrak{H}_2} = +1, \\
b^7 = \dfrac{\partial \mathfrak{h}^7_3}{\partial \mathfrak{H}_3} = +1, & b^8 = \dfrac{\partial \mathfrak{h}^8_3}{\partial \mathfrak{H}_3} = +1, & b^{11} = \dfrac{\partial \mathfrak{h}^{11}_3}{\partial \mathfrak{H}_3} = +1, \\
\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\
g^{10} = \dfrac{\partial \mathfrak{h}^{10}_7}{\partial \mathfrak{H}_7} = +1, & g^{11} = \dfrac{\partial \mathfrak{h}^{11}_7}{\partial \mathfrak{H}_7} = +1, & \\
i_1 = \dfrac{\partial \mathfrak{h}^1_1}{\partial \mathfrak{o}^1} = -1, & i_2 = \dfrac{\partial \mathfrak{h}^1_2}{\partial \mathfrak{o}^1} = -1, & \\
k_{57} = \dfrac{\partial \mathfrak{h}^2_{57}}{\partial \mathfrak{o}^2} = -1, & k_2 = \dfrac{\partial \mathfrak{h}^2_2}{\partial \mathfrak{o}^2} = -1, & \\
\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, & \\
u_7 = \dfrac{\partial \mathfrak{h}^{11}_7}{\partial \mathfrak{o}^{11}} = -1, & u_3 = \dfrac{\partial \mathfrak{h}^{11}_3}{\partial \mathfrak{o}^{11}} = -1. &
\end{array}\right.
$$

Bilden wir nun die Summen $[pav]$, $[pbv]$, $[pcv]$, ... und beachten wir, dafs diese Summen nach den Formeln (**128**) gleich Null sein müssen, so erhalten wir folgende Gleichungen:

$$[pav]=p_2^1\ (H_2-o^1-h_2^1)+p_2^2\ (H_2-o^2-h_2^2)+p_2^7\ (H_2-o^7-h_2^7)=0,$$
$$[pbv]=p_3^7\ (H_3-o^7-h_3^7)+p_3^8\ (H_3-o^8-h_3^8)+p_3^{11}(H_3-o^{11}-h_3^{11})=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$$
$$[pgv]=p_7^{10}(H_7-o^{10}-h_7^{10})+p_7^{11}(H_7-o^{11}-h_7^{11})=0,$$

$$[piv]=-p_1^1\ (H_1\ -o^1-h_1^1)-p_2^1\ (H_2-o^1-h_2^1)=0,$$
$$[pkv]=-p_{57}^2\ (H_{57}-o^2-h_{57}^2)-p_2^2\ (H_2-o^2-h_2^2)=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$$
$$[puv]=-p_7^{11}(H_7\ -o^{11}-h_7^{11})-p_3^{11}(H_3-o^{11}-h_3^{11})=0.$$

Nach der ersten Gruppe dieser Gleichungen mufs die Summe der mit den Gewichten multiplizirten Abweichungen zwischen den wahrscheinlichsten Werthen H der Höhen und den durch Zulegung des Orientirungshöhenunterschiedes o orientirten Beobachtungsergebnissen h oder die Summe der mit den Gewichten multiplizirten wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler für jede Höhe oder für jeden Punkt gleich Null sein, und nach der zweiten Gruppe von Gleichungen mufs, da die Gewichte für die beiden Höhen eines jeden Zuges einander gleich sind, die einfache Summe der bezeichneten Abweichungen oder Beobachtungsfehler für jeden Zug gleich Null sein.

Aus obigen Gleichungen folgt:

$$H_2=\frac{1}{[p_2]}(p_2^1\ (h_2^1\ +o^1)+p_2^2\ (h_2^2+o^2)+p_2^7\ (h_2^7\ +o^7)),$$
$$H_3=\frac{1}{[p_3]}(p_3^7\ (h_3^7\ +o^7)+p_3^8\ (h_3^8\ +o^8)+p_3^{11}(h_3^{11}+o^{11})),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$$
$$H_7=\frac{1}{[p_7]}(p_7^{10}(h_7^{10}+o^{10})+p_7^{11}(h_7^{11}+o^{11})),$$

$$o^1\ =\frac{1}{2}((H_1\ -h_1^1)+(H_2-h_2^1)),$$
$$o^2\ =\frac{1}{2}((H_{57}-h_{57}^2)+(H_2-h_2^2)),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$$
$$o^{11}=\frac{1}{2}((H_7\ -h_7^{11})+(H_3-h_3^{11})).$$

Hiernach sind die wahrscheinlichsten Werthe H der Höhen je gleich dem mit Berücksichtigung der Gewichte gebildeten allgemeinen arithmetischen Mittel der durch Zulegung des Orientirungshöhenunterschiedes o orientirten Beobachtungsergebnisse h eines jeden Punktes, und die wahrscheinlichsten Werthe der Orientirungshöhenunterschiede o sind je gleich dem einfachen arithmetischen Mittel der beiden Unterschiede zwischen den wahrscheinlichsten Werthen H_a und H_e und den aus den Lattenablesungen gewonnenen Werthen h_a und h_e der Höhen des Anfangs- und Endpunktes eines jeden Zuges.

Die hier gewonnenen Formeln und Regeln stimmen im wesentlichen überein mit den im § 33, Nr. 16 und 17 und im § 34, Nr. 10 und 11 gewonnenen Formeln und Regeln, so dafs das dort behandelte Näherungsverfahren auch hier eingeschlagen werden kann.

Als Beobachtungsergebnis für den Anfangspunkt eines jeden Zuges wird $h_a=0{,}000$ und dementsprechend als Beobachtungsergebnis für den Endpunkt eines jeden Zuges $h_e=\Delta h$, oder der beobachtete Höhenunterschied genommen.

Da in der Regel viele Höhen H und Orientirungshöhenunterschiede o zu bestimmen sind, ist es, um möglichst rasch zum Ziele zu gelangen, wichtig, dafs die ersten Näherungswerthe bereits den wahrscheinlichsten Werthen nahe kommen.

Dies wird auch in einfacher Weise erreicht, indem das Netz erstens in Berechnungszüge zerlegt wird, die eine möglichst günstige Bestimmung der Höhen der einzelnen Punkte erwarten lassen, dafs dann zweitens die ersten Näherungswerthe $\mathfrak{h}_1$ der Höhen in den Berechnungszügen durch Addition der beobachteten Höhenunterschiede gebildet werden, wobei von den Höhen der gegebenen Punkte oder, wenn solche fehlen, von einer beliebig angenommenen Höhe eines passend gewählten Punktes ausgegangen wird, dafs hiernach drittens die Verbesserungen $\mathfrak{v}_1$ der einzelnen Höhen $\mathfrak{h}_1$ berechnet werden, die aus den Abschlüssen der Berechnungszüge auf die Höhen der Endpunkte dieser Züge folgen, und dafs endlich viertens das einfache arithmetische Mittel der Verbesserungen $\mathfrak{v}_1$ für die Höhen $\mathfrak{h}_1$ des Anfangs- und Endpunktes eines jeden Einzelzuges als erster Näherungswerth $\mathfrak{o}_1$ der Orientirungshöhenunterschiede genommen wird. Die Höhen der Endpunkte der Berechnungszüge, auf die abgeschlossen wird, sind, wenn der Endpunkt ein gegebener Punkt ist, die gegebene Höhe dieses Punktes, oder wenn der Endpunkt ein Knotenpunkt ist, das allgemeine arithmetische Mittel der Höhen $\mathfrak{h}_1$, die sich für den Knotenpunkt in den einzelnen auf diesem endigenden Berechnungszügen ergeben haben, oder wenn der Berechnungszug ein geschlossenes Polygon bildet, die Höhe des Ausgangspunktes.

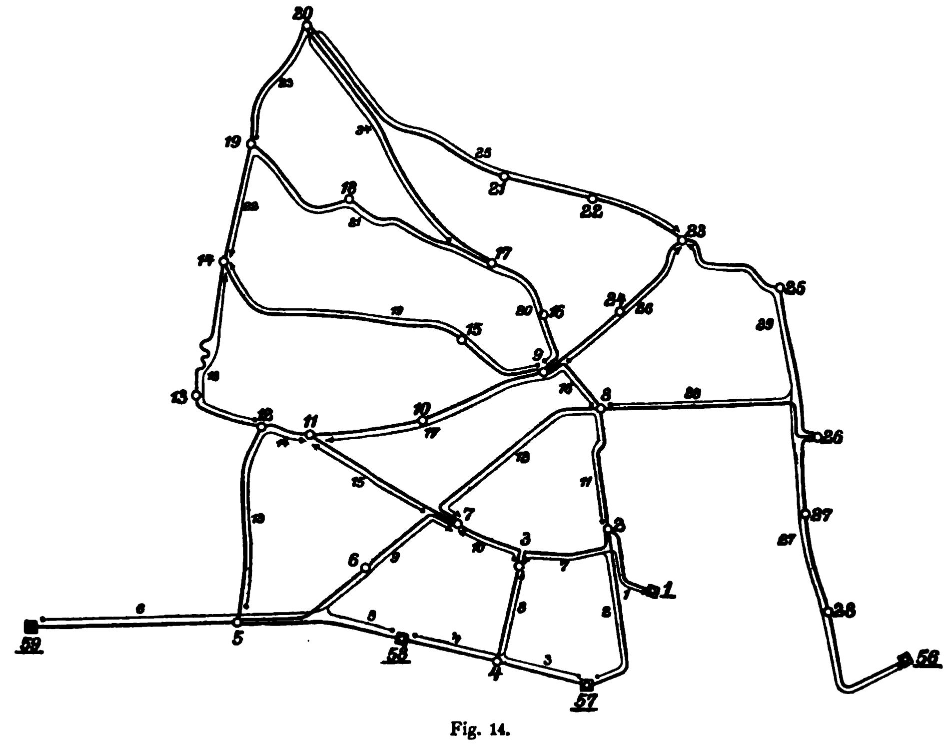


Fig. 14.

Zur weitern Erläuterung des Verfahrens ist auf Seite 164 und 165 die im Jahre 1885 ausgeführte Berechnung der Höhen der Knotenpunkte des von den Studirenden der Geodäsie an der Landwirthschaftlichen Akademie Poppelsdorf nivellirten Höhennetzes von Bonn und Umgebung wiedergegeben. Das Höhennetz, wovon das vorstehend unter Nr. 1 bis 10 und im § 21 behandelte Netz ein Teil ist, ist angeschlossen an 4 Punkte der Landesaufnahme und an die Höhenmarke der Europäischen Gradmessung an dem alten mittlerweile abgebrochenen Bahnhofs-

Nr. der Punkte.	Nr. der Züge.	Der Einzelzüge Anfangspunkt.	Der Einzelzüge Endpunkt.	Gewichte der Einzelzüge p.	Gewichte der Einzelzüge $\frac{1}{p}$.	Gewichte der Berechnungszüge p.	Gewichte der Berechnungszüge $\frac{1}{p}$.	Δh.	h_1.	$p\,dh_1$.	v_1.		$p v_1$.	o_1.	$h_1 + o_1 - h_2 = h_0 + dh_2$. m	mm	$p\,dh_2$.	v_2.	$p v_2$.	o_2.	$dh_3 = dh_2 + o_2$.	$p\,dh_3$.	v_3.	$p v_3$.	o_3.	$h_0 + \frac{[p\,dh_3] + [p\,o_3]}{[p]}$
◡ 1									58,725																	58,725
	1	**1**	2						58,725		0			−1	58,72	4				−0,4	3,6				−0,2	
◡ 57									61,142																	61,142
	2	**57**	2						61,142		0			−3	61,13	9				−1,4	7,6				0,8	
	3	**57**	4						61,142		0			0		12				+0,3	12,3				+0,3	
⊙ 2	1	**1**	2	0,82		0,8		2,975	61,700	0,0	+1	−3	+0,8	−1	61,69	9	7,4	−0,9	−0,7	−0,4	8,6	7,1	−0,5	−0,4	−0,2	61,698
	2	**57**	2	0,44		0,4		0,562	61,704	1,6	−3	−3	−1,2	−3		11	4,8	−2,9	−1,3	−1,4	9,6	4,2	−1,5	−0,7	−0,8	
	7	2	3	0,64		1,2	0,8		61,701	1,6		−3	−0,4	−6		5	3,2	+3,1	+2,0	+0,4	5,4	3,5	+2,7	+1,7	+0,2	
	11	2	8	1,34					61,698		0			0		8	10,7	+0,1	+0,1	+0,4	8,4	11,3	−0,3	−0,4	−0,1	
				3,24												8,1	26,1		+0,1		8,1	26,1		+0,2		
◡ 58									61,128																	61,128
	4	**58**	4						61,128		0			+1	61,12	9				+0,3	9,3				+0,3	
	5	**58**	5						61,128		0			−2		6				−0,8	5,2				−0,4	
⊙ 4	3	**57**	4	1,12		1,1		×9,505	60,647		0	+1		0	60,64	7	7,8	+0,6	+0,7	+0,3	7,3	8,2	+0,6	+0,7	+0,3	60,648
	4	**58**	4	1,02		1,0		×9,518	60,646		+1	+1		+1		7	7,1	+0,6	+0,6	+0,3	7,3	7,4	+0,6	+0,6	+0,3	
	8	4	3	0,98		2,1	0,5		60,647			+1		+2		9	8,8	−1,4	−1,4	+0,2	9,2	9,0	−1,3	−1,3	+0,2	
				3,12												7,6	23,7		−0,1		7,9	24,6		0,0		
◡ 59									60,325																	60,325
	6	**59**	5						60,325		0			+2	60,32	7				+1,2	8,2				+0,6	
⊙ 5	5	**58**	5	0,56		0,6		0,304	61,432	7,2	−4	0	−2,4	−2	61,42	10	5,6	−1,7	−1,0	−0,8	9,2	5,2	−0,9	−0,5	−0,4	61,428
	6	**59**	5	0,50		0,5		1,099	61,424	2,0	+4	0	+2,0	+2		6	3,0	+2,3	+1,2	+1,2	7,2	3,6	+1,1	+0,6	+0,6	
	9	5	7	0,40		1,1	0,9		61,428	9,2		0	−0,4	0		8	3,2	+0,3	+0,1	+0,1	8,1	3,2	+0,2	+0,1	0,0	
	13	5	12	0,50					61,428			0		+1		9	4,5	−0,7	−0,4	−0,6	8,4	4,2	−0,1	−0,0	0,0	
				1,96												8,3	16,3		−0,1		8,3	16,2		+0,2		
⊙ 3	7	2	3	0,64	1,6	0,4	2,4	×5,662	57,363	5,2	−8	0	−3,2	−6	57,35	7	4,5	−2,3	−1,5	+0,4	7,4	4,7	−2,4	−1,5	+0,2	57,355
	8	4	3	0,98	1,0	0,7	1,5	×6,704	57,351	0,7	+4	0	+2,8	+2		3	2,9	+1,7	+1,7	+0,2	3,2	3,1	+1,8	+1,8	+0,2	
	10	3	7	1,10		1,1	0,9		57,355	5,9		0	−0,4	0		5	5,5	−0,3	−0,3	+0,3	5,3	5,8	−0,3	−0,3	+0,2	
				2,72												4,7	12,9		−0,1		5,0	13,6		0,0		
⊙ 8	11	2	8	1,34	0,7		1,5	1,913	63,611		−1	+2		0	63,60	11	14,7	+0,7	+0,9	+0,4	11,4	15,3	+0,1	+0,1	−0,1	63,611
	12	8	7	0,42					63,611		−1	+2		−2		9	3,8	+2,7	+1,1	+0,3	9,3	3,9	+2,2	+0,9	0,0	
	16	8	9	1,72					63,610		0	+2		+2		12	20,6	−0,3	−0,5	−0,6	11,4	19,6	+0,1	+0,2	0,0	
	28	8	26	0,35					63,610			+2		+6		16	5,6	−4,3	−1,5	−0,8	15,2	5,3	−3,7	−1,3	−0,4	
				3,83												11,7	44,7		0,0		11,5	44,1		−0,1		
⊙ 7	9	5	7	0,40	2,5	0,3	3,4	×5,574	57,002	0,6	0		0,0	0	57,00	2	0,8	−0,1	−0,0	+0,1	2,1	0,8	−0,1	−0,0	0,0	57,002
	10	3	7	1,10	0,9	0,6	1,8	×9,646	57,001	0,6	+1		+0,6	0		1	1,1	+0,9	+1,0	+0,3	1,3	1,4	+0,7	+0,8	+0,2	
	12	8	7	0,42	2,4	0,3	3,9	×3,395	57,006	1,8	−4		−1,2	−2		4	1,7	−2,1	−0,9	+0,3	4,3	1,8	−2,3	1,0	0,0	
	15	7	11	0,60		1,2	0,8		57,002	3,0	0		−0,6	0		2	1,2	−0,1	−0,1	−0,2	1,8	1,1	+0,2	+0,1	+0,2	
				2,52												1,9	4,8		0,0		2,0	5,1		−0,1		

⊙ 12	13	5	12	0,50	2,0		2,9	×8,394	59,822		−1 +3		+1	59,82	3	1,5	−0,5	−0,2	−0,6	2,4	1,2	+0,1	+0,0	0,0	59,822
	14	12	11	2,86					59,822		−1 +3		0		2	5,7	+0,5	+1,4	+0,2	2,2	6,3	+0,3	+0,9	0,0	
	18	12	14	0,26					59,821		+3		+6		7	1,8	−4,5	−1,2	−0,4	6,6	1,7	−4,1	−1,1	0,0	
				3,62											2,5	9,0		0,0		2,5	9,2		−0,2		
⊙ 9	16	8	9	1,72	0,6		2,1	0,289	63,899		+1		+2	63,89	11	18,9	−0,8	−1,4	−0,6	10,4	17,9	−0,2	−0,3	0,0	63,900
	17	9	11	0,35					63,899		+1		+2		11	3,9	−0,8	−0,3	+0,5	11,5	4,0	−1,3	−0,5	+0,1	
	19	9	14	0,20					63,900		0		−2		8	1,6	+2,2	+0,4	+1,4	9,4	1,9	+0,8	+0,2	0,0	
	.20	9	17	0,59					63,900		0		−2		8	4,7	+2,2	+1,3	+0,6	8,6	5,1	+1,6	+0,9	+0,2	
	26	9	23	0,46					63,900		0		0		10	4,6	+0,2	+0,1	+0,7	10,7	4,9	−0,5	−0,2	+0,2	
				3,32											10,2	33,7		+0,1		10,2	33,8		+0,1		
⊙ 11	14	12	11	2,86	0,3	0,3	3,2	7,295	67,117	2,1	−1	−0,3	0	67,11	7	20,0	−0,2	−0,6	+0,2	7,2	20,6	−0,2	−0,6	0,0	67,117
	15	7	11	0,60	1,7	0,4	2,5	10,115	67,117	2,8	−1	−0,4	0		7	4,2	−0,2	−0,1	−0,2	6,8	4,1	+0,2	+0,1	+0,2	
	17	9	11	0,35	2,9	0,2	5,0	3,214	67,113	0,6	+3	+0,6	+2		5	1,8	+1,8	+0,6	+0,5	5,5	1,9	+1,5	+0,5	+0,1	
				3,81		0,9			67,116	5,5		−0,1			6,8	26,0		−0,1		7,0	26,6		+0,0		
⊙ 17	20	9	17	0,59	1,7		3,8	28,544	92,444		−2 −2		−2	92,43	12	7,1	−1,0	−0,6	+0,6	12,6	7,4	−1,2	−0,7	+0,2	92,441
	21	17	19	0,28					92,444		−2 −2		−2		12	3,4	−1,0	−0,3	+0,1	12,1	3,4	−0,7	−0,2	0,0	
	24	17	20	0,29					92,442		−2		−4		8	2,3	+3,0	+0,9	+0,2	8,2	2,4	+3,2	+0,9	−0,2	
				1,16											11,0	12,8		0,0		11,4	13,2		0,0		
⊙ 19	21	17	19	0,28	3,6		7,4	62,312	154,756		−4 +4		−2	154,75	4	1,1	+1,2	+0,3	+0,1	4,1	1,1	+0,6	+0,2	0,0	154,754
	22	19	14	0,69					154,756		−4 +4		−2		4	2,8	+1,2	+0,8	−0,1	3,9	2,7	+0,8	+0,6	−0,2	
	23	19	20	0,66					154,752		+4		+5		7	4,6	−1,8	−1,2	−1,2	5,8	3,8	−1,1	−0,7	−0,6	
				1,63											5,2	8,5		−0,1		4,7	7,6		+0,0		
⊙ 14	18	12	14	0,26	3,8	0,1	6,7	106,951	166,772		+8		+6	166,77	8	2,1	+3,6	+0,9	−0,4	7,6	2,0	+4,1	+1,1	0,0	166,782
	19	9	14	0,20	5,0	0,1	7,1	102,883	166,783		−3		−2		11	2,2	+0,6	+0,1	+1,4	12,4	2,5	−0,7	−0,1	0,0	
	22	19	14	0,69	1,4	0,1	8,8	12,029	166,785		−5		−2		13	9,0	−1,4	−1,0	−0,1	12,9	8,9	−1,2	−0,8	−0,2	
				1,15		0,3			166,780						11,6	13,3		0,0		11,7	13,4		+0,2		
⊙ 20	23	19	20	0,66	1,5	0,1	8,9	1,414	156,166		+6		+5	156,16	11	7,3	−0,5	−0,3	−1,2	9,8	6,5	−0,1	−0,1	−0,6	156,169
	24	17	20	0,29	3,4	0,1	7,2	63,735	156,177		−5		−4		13	3,8	−2,5	−0,7	+0,2	13,2	3,8	−3,5	−1,0	−0,2	
	25	20	23	0,17		0,2	5,0		156,172		0		−8		4	0,7	+6,5	+1,1	−0,2	3,8	0,6	+5,9	+1,0	−0,2	
				1,12											10,5	11,8		+0,1		9,7	10,9		−0,1		
56									58,121																58,121
	27	**56**	26						58,121		0		−1	58,11	10				−0,6					−0,6	
⊙ 26	27	**56**	26	0,29		0,3		1,038	59,159	5,7	−4 +2	−1,2	−1	59,15	8	2,3	−1,2	−0,3	−0,6	7,4	2,1	−1,2	−0,3	−0,6	59,156
	28	8	26	0,35	2,9	0,2	4,4	×5,538	59,148	1,6	+7 +2	+1,4	+6		4	1,4	+2,8	+1,0	−0,8	3,2	1,1	+3,0	+1,0	−0,4	
	29	26	23	0,29		0,5	2,0		59,155	7,3	+2	+0,2	+4		9	2,6	−2,2	−0,6	0,0	9,0	2,6	−2,8	−0,8	−0,2	
				0,93											6,8	6,3		+0,1		6,2	5,8		−0,1		
⊙ 23	25	20	23	0,17	5,9	0,1	10,9	×16,036	72,208	2,8	−15	−1,5	−8	72,18	20	3,4	−6,8	−1,2	−0,2	19,8	3,4	−6,3	−1,1	−0,2	72,194
	26	9	23	0,46	2,2	0,2	4,3	8,292	72,192	2,4	+ 1	+0,2	0		12	5,5	+1,2	+0,6	+0,7	12,7	5,8	+0,8	+0,4	+0,2	
	29	26	23	0,29	3,4	0,2	5,4	13,032	72,187	1,4	+ 6	+1,2	+4		11	3,2	+2,2	+0,6	0,0	11,0	3,2	+2,5	+0,7	−0,2	
				0,92		0,5			72,193	6,6		−0,1			13,2	12,1		0,0		13,5	12,4		0,0		

gebäude in Bonn. Es enthält 15 Knotenpunkte, die durch 29 Züge mit den gegebenen Punkten und untereinander verbunden sind.

Die Berechnung der ersten Näherungswerthe der Höhen $\mathfrak{h}_1$ und der ersten Verbesserungen $\mathfrak{v}_1$ ist im wesentlichen nach dem im § 21 behandelten Verfahren durchgeführt mit den Vereinfachungen, dafs die durch die Ausgleichung der Fehler in den einzelnen Netzteilen bedingte Erhöhung der Gewichte unberücksichtigt gelassen ist und dafs die Ausgleichung der Fehler nicht jedesmal auf die sämtlichen bereits berechneten Netzteile ausgedehnt, sondern auf die den betreffenden Knotenpunkten nächstgelegenen Netzteile beschränkt ist. Die Berechnungszüge und deren Nummern, denen die Berechnung der Höhen $\mathfrak{h}_1$ und der Verbesserungen $\mathfrak{v}_1$ gefolgt ist, sind in der auf Seite 163 beigegebenen Uebersichtskarte dargestellt.

Nachdem sich für die den Höhen $\mathfrak{h}_3 = \mathfrak{h}_0 + d\mathfrak{h}_3$ entsprechenden Orientirungshöhenunterschiede $\mathfrak{o}_3$ nur noch sehr kleine Zahlenwerthe ergeben hatten, ist das Verfahren abgebrochen.

Den Mittelwerthen $\mathfrak{h}_0 + \frac{[p\,d\mathfrak{h}_3]}{[p]}$ aus den Höhen $\mathfrak{h}_3$ ist jedoch noch eine im Kopfe berechnete Verbesserung $+\frac{[p\,\mathfrak{o}_3]}{[p]}$ hinzugefügt, deren Berechtigung aus den im § 33, Nr. 14 erhaltenen Formeln (**137**) folgt, wenn diese Formeln durch Einführung der Gewichte verallgemeinert werden und wenn beachtet wird, dafs dort die o in den der Entwicklung zu Grunde liegenden Formeln (**108**) mit anderm Vorzeichen vorkommen wie hier.

§ 36. Rückwärtseinschneiden.

Zur Bestimmung des ♁ 9 durch Rückwärtseinschneiden sind auf diesem Punkte die Richtungen nach den gegebenen Punkten ♁♁ 3, 7, 8, 6 in 4 vollen Richtungssätzen beobachtet worden. Die rechtwinkligen Koordinaten $x_n\ y_n$ der gegebenen Punkte und die arithmetischen Mittel r_n der vier für jede Richtung erhaltenen Beobachtungsergebnisse sind:

Nr. der Punkte.	Abscissen.	Ordinaten.	Richtungen.			
				°	′	″
♁ 3	$x_1 = 5\,432{,}42$	$y_1 = \times 8\,013{,}62$	r_1	23	38	45
♁ 7	$x_2 = 2\,125{,}96$	$y_2 = \times 6\,036{,}88$	r_2	154	45	05
♁ 8	$x_3 = 5\,086{,}94$	$y_3 = \times 4\,914{,}53$	r_3	241	52	52
♁ 6	$x_4 = 6\,122{,}25$	$y_4 = \times 5\,990{,}33$	r_4	294	17	05

Es sollen die wahrscheinlichsten Werthe $x\ y$ der rechtwinkligen Koordinaten des ♁ 9 und der mittlere Fehler $\mathfrak{m}_1$ einer einmaligen Beobachtung einer Richtung in einem Richtungssatze bestimmt werden.

1. Die beobachteten Richtungen r_n beziehen sich auf eine beliebige, nicht genau bekannte Anfangsrichtung. Um aus ihren wahren Werthen (r_n) zunächst die wahren Werthe (ν_n) der Neigungen der einzelnen Strahlen gegen die Abscissenachse zu erhalten, mufs ihnen der wahre Werth (o) eines aus den Beobachtungsergebnissen mit zu bestimmenden Orientirungswinkels hinzugefügt werden, so dafs also wird:

$$(\nu_n) = (r_n) + (o), \text{ oder}$$
$$(r_n) = (\nu_n) - (o).$$

Der wahre Werth (ν_n) der Neigungen steht nun zu den wahren Werthen der zu bestimmenden Koordinaten (x) (y) des § 9 und den gegebenen, als wahre Werthe anzunehmenden Koordinaten $x_n\, y_n$ in der Beziehung, dafs ist:

$$tg\,(\nu_n) = \frac{y_n - (y)}{x_n - (x)}, \text{ oder:}$$

$$(\nu_n) = arc\,tg\,\frac{y_n - (y)}{x_n - (x)}\,\varrho''.$$

Somit ergeben sich für die Beziehungen zwischen den wahren Werthen (r_n) der beobachteten Richtungen und den wahren Werthen der zu bestimmenden Gröfsen (x), (y), (o) für unser Beispiel die folgenden Gleichungen:

$$(108)\quad \begin{cases} (r_1) = (\nu_1) - (o), & (\nu_1) = arc\,tg\,\frac{y_1 - (y)}{x_1 - (x)}\,\varrho'', \\ (r_2) = (\nu_2) - (o), & (\nu_2) = arc\,tg\,\frac{y_2 - (y)}{x_2 - (x)}\,\varrho'', \\ (r_3) = (\nu_3) - (o), & (\nu_3) = arc\,tg\,\frac{y_3 - (y)}{x_3 - (x)}\,\varrho'', \\ (r_4) = (\nu_4) - (o), & (\nu_4) = arc\,tg\,\frac{y_4 - (y)}{x_4 - (x)}\,\varrho''. \end{cases}$$

2. Hiernach erhalten wir die wahrscheinlichsten Werthe R_1, R_2, R_3, R_4 der beobachteten Richtungen und die wahrscheinlichsten Werthe ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 der Neigungen aus den wahrscheinlichsten Werthen x, y, o nach:

$$(109)\quad \begin{cases} R_1 = \nu_1 - o, & \nu_1 = arc\,tg\,\frac{y_1 - y}{x_1 - x}\,\varrho'', \\ R_2 = \nu_2 - o, & \nu_2 = arc\,tg\,\frac{y_2 - y}{x_2 - x}\,\varrho'', \\ R_3 = \nu_3 - o, & \nu_3 = arc\,tg\,\frac{y_3 - y}{x_3 - x}\,\varrho'', \\ R_4 = \nu_4 - o, & \nu_4 = arc\,tg\,\frac{y_4 - y}{x_4 - x}\,\varrho'', \end{cases}$$

und die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler nach:

$$(110)\quad \begin{cases} v_1 = R_1 - r_1, \\ v_2 = R_2 - r_2, \\ v_3 = R_3 - r_3, \\ v_4 = R_4 - r_4. \end{cases}$$

3. Die wahrscheinlichsten Werthe x, y, o der zu bestimmenden Gröfsen zerlegen wir in die Näherungswerthe $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{o}$ und die den letzteren beizufügenden Aenderungen $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{o}$, setzen also:

$$(111)\quad \begin{cases} x = \mathfrak{x} + d\mathfrak{x}, \\ y = \mathfrak{y} + d\mathfrak{y}, \\ o = \mathfrak{o} + d\mathfrak{o}. \end{cases}$$

Den Näherungswerthen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{o}$ der zu bestimmenden Gröfsen entsprechen die Näherungswerthe $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, $\mathfrak{r}_4$ der beobachteten Richtungen für die sich nach den Gleichungen (**108**) ergiebt:

$$(112)\quad \begin{cases} \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{n}_1 - \mathfrak{o}, & \mathfrak{n}_1 = arc\,tg\,\frac{y_1 - \mathfrak{y}}{x_1 - \mathfrak{x}}\,\varrho'', \\ \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{n}_2 - \mathfrak{o}, & \mathfrak{n}_2 = arc\,tg\,\frac{y_2 - \mathfrak{y}}{x_2 - \mathfrak{x}}\,\varrho'', \\ \mathfrak{r}_3 = \mathfrak{n}_3 - \mathfrak{o}, & \mathfrak{n}_3 = arc\,tg\,\frac{y_3 - \mathfrak{y}}{x_3 - \mathfrak{x}}\,\varrho'', \\ \mathfrak{r}_4 = \mathfrak{n}_4 - \mathfrak{o}, & \mathfrak{n}_4 = arc\,tg\,\frac{y_4 - \mathfrak{y}}{x_4 - \mathfrak{x}}\,\varrho''. \end{cases}$$

Aus diesen Näherungswerthen werden die wahrscheinlichsten Werthe der beobachteten Richtungen durch Beifügung der den Aenderungen $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{o}$ entsprechenden Aenderungen $d\mathfrak{r}_1$, $d\mathfrak{r}_2$, $d\mathfrak{r}_3$, $d\mathfrak{r}_4$ erhalten nach:

$$(113)\quad \begin{cases} R_1 = \mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{r}_1, \\ R_2 = \mathfrak{r}_2 + d\mathfrak{r}_2, \\ R_3 = \mathfrak{r}_3 + d\mathfrak{r}_3, \\ R_4 = \mathfrak{r}_4 + d\mathfrak{r}_4. \end{cases}$$

4. Differenziren wir die in den Gleichungen (**112**) für die Näherungswerthe $\mathfrak{r}_n$ erhaltenen Ausdrücke nach $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{o}$, so ergeben sich die Differenzialquotienten zunächst in allgemeiner Form wie folgt:

$$a_n = \frac{\partial \mathfrak{r}_n}{\partial \mathfrak{x}} = + \frac{1}{1 + \left(\frac{y_n - \mathfrak{y}}{x_n - \mathfrak{x}}\right)^2} (y_n - \mathfrak{y})(-1)(x_n - x)^{-2}(-1)\varrho''$$

$$= + \frac{y_n - \mathfrak{y}}{(x_n - \mathfrak{y})^2 + (y_n - \mathfrak{y})^2} \varrho''.$$

Zur Vereinfachung dieses Ausdrucks führen wir die Näherungswerthe $\mathfrak{s}_n$ der Strahlenlänge und die Näherungswerthe $\mathfrak{n}_n$ der Neigungen ein nach:

$$y_n - \mathfrak{y} = \mathfrak{s}_n \sin \mathfrak{n}_n, \qquad x_n - \mathfrak{x} = \mathfrak{s}_n \cos \mathfrak{n}_n.$$

Dann wird:

$$a_n = \frac{\partial \mathfrak{r}_n}{\partial \mathfrak{x}} = + \frac{\sin \mathfrak{n}_n}{\mathfrak{s}_n} \varrho''.$$

Ebenso wird:

$$b_n = \frac{\partial \mathfrak{r}_n}{\partial \mathfrak{y}} = + \frac{1}{1 + \left(\frac{y_n - \mathfrak{y}}{x_n - \mathfrak{x}}\right)^2} \frac{1}{x_n - \mathfrak{x}} (-1)\varrho'' = - \frac{x_n - \mathfrak{x}}{(x_n - \mathfrak{x})^2 + (y_n - \mathfrak{y})^2} \varrho'',$$

oder mit Einführung von $\mathfrak{s}_n$ und $\mathfrak{n}_n$:

$$b_n = \frac{\partial \mathfrak{r}_n}{\partial \mathfrak{y}} = - \frac{\cos \mathfrak{n}_n}{\mathfrak{s}_n} \varrho''.$$

Endlich ist:

$$c_n = \frac{\partial \mathfrak{r}_n}{\partial \mathfrak{o}} = -1.$$

Damit ergeben sich für unser Beispiel die folgenden Ausdrücke für die Differenzialquotienten:

$$(114)\quad \begin{cases} a_1 = + \frac{\sin \mathfrak{n}_1}{\mathfrak{s}_1} \varrho'', & b_1 = - \frac{\cos \mathfrak{n}_1}{\mathfrak{s}_1} \varrho'', & c_1 = -1, \\ a_2 = + \frac{\sin \mathfrak{n}_2}{\mathfrak{s}_2} \varrho'', & b_2 = - \frac{\cos \mathfrak{n}_2}{\mathfrak{s}_2} \varrho'', & c_2 = -1, \\ a_3 = + \frac{\sin \mathfrak{n}_3}{\mathfrak{s}_3} \varrho'', & b_3 = - \frac{\cos \mathfrak{n}_3}{\mathfrak{s}_3} \varrho'', & c_3 = -1, \\ a_4 = + \frac{\sin \mathfrak{n}_4}{\mathfrak{s}_4} \varrho'', & b_4 = - \frac{\cos \mathfrak{n}_4}{\mathfrak{s}_4} \varrho'', & c_4 = -1. \end{cases}$$

Die Abweichungen zwischen den Näherungswerthen der beobachteten Gröſsen und den Beobachtungsergebnissen sind:

$$(115)\quad \begin{cases} f_1 = \mathfrak{r}_1 - r_1, \\ f_2 = \mathfrak{r}_2 - r_2, \\ f_3 = \mathfrak{r}_3 - r_3, \\ f_4 = \mathfrak{r}_4 - r_4. \end{cases}$$

5. Hiernach ergeben sich die umgeformten Fehlergleichungen wie folgt:

$$(116)\quad \begin{cases} d\mathfrak{r}_1 = a_1\, d\mathfrak{x} + b_1\, d\mathfrak{y} - d\mathfrak{o}, \\ d\mathfrak{r}_2 = a_2\, d\mathfrak{x} + b_2\, d\mathfrak{y} - d\mathfrak{o}, \\ d\mathfrak{r}_3 = a_3\, d\mathfrak{x} + b_3\, d\mathfrak{y} - d\mathfrak{o}, \\ d\mathfrak{r}_4 = a_4\, d\mathfrak{x} + b_4\, d\mathfrak{y} - d\mathfrak{o}. \end{cases} \qquad (117)\quad \begin{cases} v_1 = f_1 + d\mathfrak{r}_1, \\ v_2 = f_2 + d\mathfrak{r}_2, \\ v_3 = f_3 + d\mathfrak{r}_3, \\ v_4 = f_4 + d\mathfrak{r}_4. \end{cases}$$

Wenn wir das Gewicht der gleich genauen Beobachtungsergebnisse r gleich Eins nehmen, können diese umgeformten Fehlergleichungen, indem nach den Formeln (**135**)

$$(135)\quad \begin{cases} A_1 = a_1 - \frac{[a]}{4}, & B_1 = b_1 - \frac{[b]}{4}, & F_1 = f_1 - \frac{[f]}{4}, \\ A_2 = a_2 - \frac{[a]}{4}, & B_2 = b_2 - \frac{[b]}{4}, & F_2 = f_2 - \frac{[f]}{4}, \\ A_3 = a_3 - \frac{[a]}{4}, & B_3 = b_3 - \frac{[b]}{4}, & F_3 = f_3 - \frac{[f]}{4}, \\ A_4 = a_4 - \frac{[a]}{4}, & B_4 = b_4 - \frac{[b]}{4}, & F_4 = f_4 - \frac{[f]}{4} \end{cases}$$

gebildet wird, nach den Formeln (**136**) reduzirt werden auf:

$$(136)\quad \begin{cases} d\mathfrak{r}_1 = A_1\, d\mathfrak{x} + B_1\, d\mathfrak{y}, & v_1 = F_1 + d\mathfrak{r}_1, \\ d\mathfrak{r}_2 = A_2\, d\mathfrak{x} + B_2\, d\mathfrak{y}, & v_2 = F_2 + d\mathfrak{r}_2, \\ d\mathfrak{r}_3 = A_3\, d\mathfrak{x} + B_3\, d\mathfrak{y}, & v_3 = F_3 + d\mathfrak{r}_3, \\ d\mathfrak{r}_4 = A_4\, d\mathfrak{x} + B_4\, d\mathfrak{y}, & v_4 = F_4 + d\mathfrak{r}_4. \end{cases}$$

Aus diesen reduzirten Fehlergleichungen ergeben sich die Endgleichungen:

$$(118)\quad \begin{cases} [AA]\, d\mathfrak{x} + [AB]\, d\mathfrak{y} + [AF] = 0, \\ [AB]\, d\mathfrak{x} + [BB]\, d\mathfrak{y} + [BF] = 0. \end{cases}$$

Nachdem durch Auflösung dieser Endgleichungen die Zahlenwerthe von $d\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{y}$ erhalten sind, ergiebt sich $d\mathfrak{o}$ nach:

$$(137)\quad d\mathfrak{o} = + \frac{[a]}{4} d\mathfrak{x} + \frac{[b]}{4} d\mathfrak{y} + \frac{[f]}{4}.$$

6. Der mittlere Fehler $\mathfrak{m}$ der Gewichtseinheit oder des arithmetischen Mittels aus den vier für eine jede Richtung vorliegenden Beobachtungsergebnissen ergiebt sich zu:

$$(125)\quad \mathfrak{m} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-q}} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{4-3}},$$

und danach der mittlere Fehler $\mathfrak{m}_1$ einer einmaligen Beobachtung einer Richtung in einem Richtungssatze, deren Gewicht $\mathfrak{p}_1 = 0{,}25$ ist, nach:

$$\mathfrak{m}_1 = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{\mathfrak{p}_1}} = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{0{,}25}}.$$

7. Die Rechnung nach den entwickelten Formeln gestaltet sich mit Weglassung der Berechnung der Näherungswerthe $\mathfrak{x}\ \mathfrak{y}$ der zu bestimmenden Koordinaten, die aus den Richtungen nach §§ 3, 7, 8 nach den Formeln (40) bis (60), für die Berechnung von Koordinaten aus Rückwärtseinschneiden, Seite 27 der Formelsammlung von Veltmann und Koll rund $\mathfrak{x} = 4\,745{,}0$ $\mathfrak{y} = \times 6\,681{,}0$ ergiebt, wie folgt:

1. Berechnung der Näherungswerthe $\mathfrak{n}$ der Neigungen. — **2. Differenzialquotienten a, b.**

P_n.		x_n. $\mathfrak{x}$. $\Delta\mathfrak{x} = x_n - \mathfrak{x}$. $\Delta\mathfrak{x} + \Delta\mathfrak{y}$.		y_n. $\mathfrak{y}$. $\Delta\mathfrak{y} = y_n - \mathfrak{y}$. $\Delta\mathfrak{x} - \Delta\mathfrak{y}$.	$log(\Delta\mathfrak{x} + \Delta\mathfrak{y})$. $log(\Delta\mathfrak{x} - \Delta\mathfrak{y})$. $log\,tg(45° + \mathfrak{n})$. $45° + \mathfrak{n}$.	$log\,\Delta\mathfrak{y}$. $log\,\Delta\mathfrak{x}$. $log\,tg\,\mathfrak{n}$. $\mathfrak{n}$.	$log\,sin\,\mathfrak{n}$. $log\,cos\,\mathfrak{n}$. $cpl\,log\,\mathfrak{s}$. $log\,\varrho''$.	$log\,a$. $log\,b$. a. b.
♁3		5 432,42		×8 013,62	3.30 536	3.12 470	9.94 88	2.08 73
		4 745,00		×6 681,00	2.80 969$_n$	2.83 722	9.66 13	1.79 98$_n$
	+	687,42	+	1 332,62	0.49 567$_n$	0.28 748	6.82 41	+ 122,3
	+	2 020,04	—	645,20	107° 42′ 48″	62° 42′ 48″	5.31 44	— 63,1
♁7		2 125,96		×6 036,88	3.51 364$_n$	2.80 896$_n$	9.37 81$_n$	1.26 16$_n$
		4 745,00		×6 681,00	3.29 555$_n$	3.41 815$_n$	9.98 72$_n$	1.87 07
	—	2 619,04	—	644,12	0.21 809	9.39 081	6.56 91	— 18,3
	—	3 263,16	—	1 974,92	238° 49′ 02″	193° 48′ 59″	5.31 44	+ 74,2
♁8		5 086,94		×4 914,53	3.15 367$_n$	3.24 711$_n$	9.99 20$_n$	2.05 13$_n$
		4 745,00		×6 681,00	3.32 396	2.53 395	9.27 89	1.33 82$_n$
	+	341,94	—	1 766,47	9.82 971$_n$	0.71 316$_n$	6.74 49	— 112,5
	—	1 424,53	+	2 108,41	325° 57′ 20″	280° 57′ 19″	5.31 44	— 21,8
♁6		6 122,25		×5 990,38	2.83 669	2.83 927$_n$	9.65 15$_n$	1.77 81$_n$
		4 745,00		×6 681,00	3.31 553	3.13 901	9.95 13	2.07 79$_n$
	+	1 377,25	—	690,67	9.52 116	9.70 026$_n$	6.81 22	— 60,0
	+	686,58	+	2 067,92	18° 22′ 01″	333° 22′ 00″	5.31 44	— 119,6

3. Bildung der Faktoren A und B.

P_n.		a.		$A = a - \frac{[a]}{n}$.		b.		$B = b - \frac{[b]}{n}$.
♁3	+	122,3	+	139,4	—	63,1	—	30,5
♁7	—	18,5	—	1,2	+	74,2	+	106,8
♁8	—	112,5	—	95,4	—	21,8	+	10,8
♁6	—	60,0	—	42,9	—	119,6	—	87,0
	—	68,5	—	0,1	—	130,3	+	0,1
$\frac{[a]}{n}$	—	17,1		$\frac{[b]}{n}$	—	32,6		

4. Bildung der Abweichungen F.

	$\mathfrak{x} = \mathfrak{n} - \mathfrak{o}$.			r.				$f = \mathfrak{x} - r$.		$F = f - \frac{[f]}{n}$.
$\mathfrak{o} =$	39	04	00							
♁3	23	38	48	23	38	45	+	3	—	16,8
♁7	154	44	59	154	45	05	—	6	—	25,8
♁8	241	53	19	241	52	52	+	27	+	7,2
♁6	294	18	00	294	17	05	+	55	+	35,2
		35	06		33	47	+	79	—	0,2
						$\frac{[f]}{n}$	+	19,8		

5. Bildung der Faktoren u. s. w. der Endgleichungen.

P_n.	p.		A.		B.		F.		pAA.		pAB.		pAF.		pBB.		pBF.
♁3	1	+	139	—	31	—	16,8		19 321	—	4 309	—	2 335		961	+	521
♁7	1	—	1	+	107	—	25,8		1	—	107	+	26		11 449	—	2 761
♁8	1	—	95	+	11	+	7,2		9 025	—	1 045	—	684		121	+	79
♁6	1	—	43	—	87	+	35,2		1 849	+	3 741	—	1 514		7 569	—	3 062
			0		0	—	0,2	+	30 196	—	1 720	—	4 507	+	20 100	—	5 223

6. Auflösung der Endgleichungen und Bildung der wahrscheinlichsten Werthe x, y, o.

[pAA].		[pAB].		[pAF].		[pBB].		[pBF].		Probe.						
+	30 196	−	1 720	−	4 507	+	20 100	−	5 223					$+\frac{[a]}{n}d\mathfrak{x}$	−	2,8
		+	0,057	+	0,149	−	98	−	257	−	672	−	744	$+\frac{[b]}{n}d\mathfrak{y}$	−	8,9
				+	0,016	+	20 002	−	5 480	−	1 502	−	1 430	$+\frac{[f]}{n}$	+	19,8
			$d\mathfrak{x}$	+	0,165		$d\mathfrak{y}$	+	0,274	−	2 174	−	2 174	$d\mathfrak{o}$	+	8,1
			$\mathfrak{x}$		4 745,00		$\mathfrak{y}$		×6 681,00		$= \Sigma$.			$\mathfrak{o} = 39°\,04'\,00''$		
			x		4 745,16		y		×6 681,27					$o = 39°\,04'\,08''$		

7. Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe ν der Neigungen.

P_n.		x_n. x. $x_n - x$.		y_n. y. $y_n - y$.	$log(y_n - y)$. $log(x_n - x)$. $log\,tg\,\nu$.	ν.
♁3	 +	5 432,42 4 745,16 687,26	 +	×8 013,62 ×6 681,27 1 332,35	3.12 462 2.83 712 0.28 750	 62° 42′ 52″
♁7	 −	2 125,96 4 745,16 2 619,20	 −	×6 036,88 ×6 681,27 644,39	$2.80\,915_n$ $3.41\,817_n$ 9.39 098	 193° 49′ 18″
♁8	 +	5 086,94 4 745,16 341,78	 −	×4 914,53 ×6 681,27 1 766,74	$3.24\,718_n$ 2.53 374 $0.71\,344_n$	 280° 56′ 55″
♁6	 +	6 122,25 4 745,16 1 377,09	 −	×5 990,33 ×6 681,27 690,94	$2.83\,944_n$ 3.13 896 $9.70\,048_n$	 333° 21′ 19″

8. Wahrscheinlichste Beobachtungsfehler v. — 9. Quadratsumme.

P_n.	$R = \nu - o$.			$v = R - r$.		$A\,d\mathfrak{x}$		$+ B\,d\mathfrak{y}$		$= d\mathfrak{r}$.		$v = F + d\mathfrak{r}$.		pFF.	pvv.
$o =$	39	04	08												
♁3	23	38	44	−	1	+	22,9	−	8,5	+	14,4	−	2,4	282	6
♁7	154	45	10	+	5	−	0,2	+	29,3	+	29,1	+	3,3	666	11
♁8	241	52	47	−	5	−	15,7	+	3,0	−	12,7	−	5,5	52	30
♁6	294	17	11	+	6	−	7,1	−	23,8	−	30,9	+	4,3	1 239	18
		33	52	+	5	−	0,1		0,0	−	0,1	−	0,3	2 239	65

10. Schlufsprobe und mittlerer Fehler.

$$[pvv] = [pFF] + \Sigma = 2\,239 - 2\,174 = 65.$$

$$m = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-q}} = \pm\sqrt{\frac{65}{4-3}} = \pm 8{,}1''. \qquad m_1 = \pm m\sqrt{\frac{1}{p_1}} = \pm 8{,}1\sqrt{\frac{1}{0{,}25}} = \pm 16{,}2''.$$

§ 37. Vorwärtseinschneiden.

Zur Bestimmung des ♁ 9 durch Vorwärtseinschneiden sind auf den gegebenen Punkten ♁♁ 7, 8, 6 die Richtungen nach ♁ 9 und nach mehreren gegebenen Punkten je in 4 vollen Richtungssätzen beobachtet worden. Die Koordinaten x_n y_n der ♁♁ 7, 8, 6, die arithmetischen Mittel r_n der vier für jede Richtung erhaltenen Beobachtungsergebnisse und die aus den gegebenen rechtwinkligen Koordinaten abgeleiteten Neigungen ν_n der gegebenen Strahlen gegen die Abscissenlinie sind:

Zielpunkte.	Richtungen.				Neigungen.			
Standpunkt: ♁ 7. $x_7 = 2\,125{,}96$, $y_7 = \times 6\,036{,}88$.								
♁ 8	r_5	73	39	45	ν_5	339	14	28
♁ 9	r_6	108	14	33				
♁ 3	r_7	125	17	42	ν_7	30	52	23
♁ 5	r_8	36	37	40	ν_8	302	12	13
Standpunkt: ♁ 8. $x_8 = 5\,086{,}94$, $y_8 = \times 4\,914{,}53$.								
♁ 6	r_9	108	10	00	ν_9	46	05	55
♁ 3	r_{10}	145	42	30	ν_{10}	83	38	20
♁ 9	r_{11}	163	01	05				
♁ 7	r_{12}	221	18	30	ν_{12}	159	14	28
♁ 5	r_{13}	305	47	56	ν_{13}	243	43	45

Zielpunkte.	Richtungen.				Neigungen.			
Standpunkt: ♁ 6. $x_6 = 6\,122{,}25$, $y_6 = \times 5\,990{,}33$.								
♁ 3	r_{14}	124	58	55	ν_{14}	108	49	35
♁ 9	r_{15}	169	30	42				
♁ 7	r_{16}	195	29	10	ν_{16}	179	19	58
♁ 8	r_{17}	242	15	08	ν_{17}	226	05	55
♁ 5	r_{18}	252	50	38	ν_{18}	236	41	13

Es sollen die wahrscheinlichsten Werthe x y der rechtwinkligen Koordinaten des ♁ 9 und der mittlere Fehler $\mathfrak{m}_1$ einer einmaligen Beobachtung einer Richtung in einem Richtungssatze lediglich aus den auf den gegebenen Punkten erhaltenen Beobachtungsergebnissen bestimmt werden.

1. Wir führen die Entwicklung der Formeln zunächst nur für die auf ♁ 7 beobachteten Richtungen durch.

Diese Richtungen r_n beziehen sich auf eine nicht genau bekannte Anfangsrichtung. Um aus ihren wahren Werthen (r_n) die wahren Werthe (ν_n) der Neigungen der einzelnen Strahlen gegen die Abscissenachse zu erhalten, mufs ihnen daher, ebenso wie in dem im § 36 behandelten Beispiele, der wahre Werth (o_7) eines aus den Beobachtungsergebnissen mit zu bestimmenden Orientirungswinkels hinzugefügt werden, so dafs also ist:

$$(1^*) \qquad (\nu_n) = (r_n) + (o_7) \text{ oder:}$$

$$(2^*) \qquad (r_n) = (\nu_n) - (o_7).$$

Der wahre Werth (ν_6) der Neigung des Strahles ♁ 7 — ♁ 9 steht zu den wahren Werthen der Koordinaten (x) (y) des ♁ 9 und den gegebenen als wahre Werthe anzunehmenden Koordinaten x_7 y_7 des ♁ 7 in der Beziehung, dafs ist:

$$(3^*) \qquad tg\left((\nu_6) \pm 180^\circ\right) = \frac{y_7 - (y)}{x_7 - (x)} \text{ oder:}$$

$$(4^*) \qquad (\nu_6) \pm 180^\circ = arc\,tg\,\frac{y_7 - (y)}{x_7 - (x)}\,\varrho''.$$

Hiernach erhalten wir für die Beziehungen zwischen den wahren Werthen (r_n) der auf ♁ 7 beobachteten Richtungen und den wahren Werthen (x), (y), (o_7) der zu bestimmenden Gröfsen die folgenden Gleichungen:

(5*) $\begin{cases} (r_5)=(\nu_5)-(o_7), \\ (r_6)=(\nu_6)-(o_7), \\ (r_7)=(\nu_7)-(o_7), \\ (r_8)=(\nu_8)-(o_7); \end{cases}$ | (6*) $(\nu_6)\pm 180^\circ = arc\ tg\ \frac{y_7-(y)}{x_7-(x)}\varrho''.$

Für die wahren Werthe (ν_5), (ν_7), (ν_8) der Neigungen der Strahlen nach gegebenen Punkten haben wir die aus den gegebenen Koordinaten abgeleiteten Neigungen ν_5, ν_7, ν_8 anzunehmen.

2. Danach ergeben sich die wahrscheinlichsten Werthe R_5, R_6, R_7, R_8 der beobachteten Richtungen und der wahrscheinlichste Werth ν_6 der Neigung für den Strahl ♁7 — ♁9 aus den wahrscheinlichsten Werthen x, y, o_7 der zu bestimmenden Gröfsen nach:

(7*) $\begin{cases} R_5=\nu_5-o_7, \\ R_6=\nu_6-o_7, \\ R_7=\nu_7-o_7, \\ R_8=\nu_8-o_7; \end{cases}$ | (8*) $\nu_6\pm 180^\circ = arc\ tg\ \frac{y_7-y}{x_7-x}\varrho'',$

und die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler nach:

(9*) $\begin{cases} v_5=R_5-r_5, \\ v_6=R_6-r_6, \\ v_7=R_7-r_7, \\ v_8=R_8-r_8. \end{cases}$

3. Die wahrscheinlichsten Werthe x, y, o_7 der zu bestimmenden Gröfsen zerlegen wir in die Näherungswerthe $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{o}_7$ und die diesen beizufügenden Aenderungen $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{o}_7$, setzen also:

(10*) $\begin{cases} x=\mathfrak{x}+d\mathfrak{x}, \\ y=\mathfrak{y}+d\mathfrak{y}, \\ o_7=\mathfrak{o}_7+d\mathfrak{o}_7. \end{cases}$

Den Näherungswerthen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{o}_7$ der zu bestimmenden Gröfsen entsprechen die Näherungswerthe $\mathfrak{r}_5$, $\mathfrak{r}_6$, $\mathfrak{r}_7$, $\mathfrak{r}_8$ der beobachteten Richtungen, wofür sich ergiebt:

(11*) $\begin{cases} \mathfrak{r}_5=\nu_5-\mathfrak{o}_7, \\ \mathfrak{r}_6=\mathfrak{n}_6-\mathfrak{o}_7, \\ \mathfrak{r}_7=\nu_7-\mathfrak{o}_7, \\ \mathfrak{r}_8=\nu_8-\mathfrak{o}_7; \end{cases}$ | (12*) $\mathfrak{n}_6\pm 180^\circ = arc\ tg\ \frac{y_7-\mathfrak{y}}{x_7-\mathfrak{x}}\varrho''.$

Aus diesen Näherungswerthen werden die wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen durch Beifügung der den Aenderungen $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{o}_7$ entsprechenden Aenderungen $d\mathfrak{r}_5$, $d\mathfrak{r}_6$, $d\mathfrak{r}_7$, $d\mathfrak{r}_8$ erhalten nach:

(13*) $\begin{cases} R_5=\mathfrak{r}_5+d\mathfrak{r}_5, \\ R_6=\mathfrak{r}_6+d\mathfrak{r}_6, \\ R_7=\mathfrak{r}_7+d\mathfrak{r}_7, \\ R_8=\mathfrak{r}_8+d\mathfrak{r}_8. \end{cases}$

4. Differenziren wir die in den Gleichungen (11*) und (12*) für die Näherungswerthe $\mathfrak{r}_n$ erhaltenen Ausdrücke nach $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{o}_7$, so ergeben sich die folgenden Differenzialquotienten:*)

*) Vergl. die Entwicklung der Differenzialquotienten im § 36, Nr. 4.

$$(14^*)\quad \begin{cases} a_5 = 0, \\ a_6 = +\dfrac{\sin \mathfrak{n}_6}{\mathfrak{s}_6}\varrho'', \\ a_7 = 0, \\ a_8 = 0; \end{cases} \quad \begin{matrix} b_5 = 0, \\ b_6 = -\dfrac{\cos \mathfrak{n}_6}{\mathfrak{s}_6}\varrho'', \\ b_7 = 0, \\ b_8 = 0; \end{matrix} \quad \begin{matrix} c_5 = -1, \\ c_6 = -1, \\ c_7 = -1, \\ c_8 = -1. \end{matrix}$$

Die Abweichungen zwischen den Näherungswerthen der beobachteten Gröfsen und den Beobachtungsergebnissen sind:

$$(15^*)\quad \begin{cases} f_5 = \mathfrak{r}_5 - r_5, \\ f_6 = \mathfrak{r}_6 - r_6, \\ f_7 = \mathfrak{r}_7 - r_7, \\ f_8 = \mathfrak{r}_8 - r_8. \end{cases}$$

5. Hiernach ergeben sich die folgenden umgeformten Fehlergleichungen:

$$(16^*)\quad \begin{cases} d\mathfrak{r}_5 = \quad\quad\quad\quad\quad - d\mathfrak{o}_7, \\ d\mathfrak{r}_6 = a_6\, d\mathfrak{x} + b_6\, d\mathfrak{y} - d\mathfrak{o}_7, \\ d\mathfrak{r}_7 = \quad\quad\quad\quad\quad - d\mathfrak{o}_7, \\ d\mathfrak{r}_8 = \quad\quad\quad\quad\quad - d\mathfrak{o}_7, \end{cases} \qquad (17^*)\quad \begin{cases} v_5 = f_5 + d\mathfrak{r}_5, \\ v_6 = f_6 + d\mathfrak{r}_6, \\ v_7 = f_7 + d\mathfrak{r}_7, \\ v_8 = f_8 + d\mathfrak{r}_8. \end{cases}$$

Nehmen wir die Gewichte p_5, p_6, p_7, p_8 der gleich genauen Beobachtungsergebnisse gleich Eins, so können diese umgeformten Fehlergleichungen nach Formel (**145**) reduzirt werden auf:

$$(18^*)\quad d\mathfrak{n}_6 = a_6\, d\mathfrak{x} + b_6\, d\mathfrak{y}, \quad\Big|\quad (19^*)\quad \mathfrak{v}_6 = f_6 - \frac{[f] - f_6}{4-1} + d\mathfrak{n}_6, \quad\Big|\quad \text{Gewicht} = \frac{4-1}{4}.$$

Wenn wir nun als Näherungswerth $\mathfrak{o}_7$ des Orientirungswinkels für die auf $\mathfrak{P}\,7$ beobachteten Richtungen das arithmetische Mittel der Differenzen $\nu - r$, also

$$(20^*)\quad \mathfrak{o}_7 = \frac{[\nu - r]}{3}$$

nehmen, so wird $[f] - f_6 = 0$ und damit aus den Gleichungen (18*) und (19*):

$$(21^*)\quad d\mathfrak{n}_6 = a_6\, d\mathfrak{x} + b_6\, d\mathfrak{y}, \quad\Big|\quad (22^*)\quad \mathfrak{v}_6 = f_6 + d\mathfrak{n}_6 \quad\Big|\quad \text{Gewicht} = \frac{3}{4},$$

was sich wie folgt ergiebt:

Zunächst ist: $[f] - f_6 = f_5 + f_7 + f_8$. Für diese Summe erhalten wir, indem wir in die Formeln (15*) für $\mathfrak{r}_5$, $\mathfrak{r}_7$, $\mathfrak{r}_8$ die in den Formeln (11*) erhaltenen Werthe setzen:

$$\begin{aligned} f_5 &= \nu_5 - r_5 - \mathfrak{o}_7, \\ f_7 &= \nu_7 - r_7 - \mathfrak{o}_7, \\ f_8 &= \nu_8 - r_8 - \mathfrak{o}_7, \\ \hline [f] - f_6 &= [\nu - r] - 3\mathfrak{o}_7, \end{aligned}$$

und dies wird gleich Null für $\mathfrak{o}_7 = \dfrac{[\nu - r]}{3}$, wie behauptet ist.

6. Die Formeln, die wir hier für die auf $\mathfrak{P}\,7$ beobachteten Richtungen entwickelt haben, gelten allgemein, so dafs, wenn wir als Näherungswerth $\mathfrak{o}$ der Orientirungswinkel für die auf einem gegebenen Punkte beobachteten Richtungen allgemein:

$$(23^*)\quad \mathfrak{o}_n = \frac{[\nu - r]}{n-1}$$

nehmen, immer

$$(24^*)\quad \frac{[f] - f_n}{n-1} = 0,$$

und damit für diese Richtungen nur die eine reduzirte Fehlergleichung:

(25*) $d\mathfrak{n}_n = a_n\, d\mathfrak{x} + b_n\, d\mathfrak{y}$, | (26*) $\mathfrak{v}_n = f_n - d\mathfrak{n}_n$, | Gewicht $= \frac{n-1}{n}$

erhalten.

Wenden wir dies auf unser Beispiel an, so erhalten wir zuerst die Näherungswerthe $\mathfrak{o}_7$, $\mathfrak{o}_8$, $\mathfrak{o}_6$ für die auf ⚭ 7, 8, 6 beobachteten Richtungen nach:

(27*) $\mathfrak{o}_7 = \frac{[\nu - r]}{3}$, | (28*) $\mathfrak{o}_8 = \frac{[\nu - r]}{4}$, | (29*) $\mathfrak{o}_6 = \frac{[\nu - r]}{4}$,

und dann die reduzirten Fehlergleichungen:

(30*) $\begin{cases} d\mathfrak{n}_6 = a_6\, d\mathfrak{x} + b_6\, d\mathfrak{y}, \\ d\mathfrak{n}_{11} = a_{11}\, d\mathfrak{x} + b_{11}\, d\mathfrak{y}, \\ d\mathfrak{n}_{15} = a_{15}\, d\mathfrak{x} + b_{15}\, d\mathfrak{y}, \end{cases}$ | (31*) $\begin{cases} \mathfrak{v}_6 = f_6 + d\mathfrak{n}_6, \\ \mathfrak{v}_{11} = f_{11} + d\mathfrak{n}_{11}, \\ \mathfrak{v}_{15} = f_{15} + d\mathfrak{n}_{15}, \end{cases}$ | Gewicht $= \frac{3}{4}$, „ $= \frac{4}{5}$, „ $= \frac{4}{5}$.

Hieraus ergeben sich die reduzirten Endgleichungen:

(32*)
$$[paa]\, d\mathfrak{x} + [pab]\, d\mathfrak{y} + [paf] = 0,$$
$$[pab]\, d\mathfrak{x} + [pbb]\, d\mathfrak{y} + [pbf] = 0,$$

woraus die Zahlenwerthe von $d\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{y}$ durch Auflösung erhalten werden, während sich allgemein für $d\mathfrak{o}_n$, wenn beachtet wird, dafs $[f] = f_n$ ist, nach Formel (**146**) ergiebt:

(33*)
$$d\mathfrak{o}_n = \frac{a_n}{n}\, d\mathfrak{x} + \frac{b_n}{n}\, d\mathfrak{y} + \frac{f_n}{n} = \frac{\mathfrak{v}_n}{n}.$$

Demnach ist in unserm Beispiele:

(34*) $d\mathfrak{o}_7 = \frac{\mathfrak{v}_6}{4}$, | (35*) $d\mathfrak{o}_8 = \frac{\mathfrak{v}_{11}}{5}$, | (36*) $d\mathfrak{o}_6 = \frac{\mathfrak{v}_{15}}{5}$.

Nach den Bemerkungen zu den Formeln (**143**) bis (**146**) im § 30, Nr. 10 ist dem Betrage Σ_1, der sich bei Auflösung der reduzirten Endgleichungen nach Formel (**127**) ergiebt, noch der Betrag

(37*)
$$\Sigma_2 = -\frac{f_6}{4} f_6 - \frac{f_{11}}{5} f_{11} - \frac{f_{15}}{5} f_{15}$$

hinzuzusetzen, um nach Formel (**129**) den richtigen Werth von $[pvv]$ zu erhalten.

7. Der mittlere Fehler $\mathfrak{m}$ der Gewichtseinheit oder des arithmetischen Mittels aus den vier für eine jede Richtung vorliegenden Beobachtungsergebnissen ergiebt sich nach Formel (**125**) zu:

(38*)
$$\mathfrak{m} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-q}} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{14-5}},$$

und danach der mittlere Fehler $\mathfrak{m}_1$ einer einmaligen Beobachtung einer Richtung in einem Richtungssatze, deren Gewicht $\mathfrak{p}_1 = 0{,}25$ ist, nach:

(39*)
$$\mathfrak{m}_1 = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{\mathfrak{p}_1}} = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{0{,}25}}.$$

8. Die Rechnung nach den entwickelten Formeln gestaltet sich mit Weglassung der Berechnung der Näherungswerthe $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{y}$ der zu bestimmenden Koordinaten, der Näherungswerthe $\mathfrak{n}$ der Neigungen und der Differenzialquotienten a, b, wofür die im § 36, Nr. 7 erhaltenen Zahlenwerthe benutzt werden, wie folgt:

1. Berechnung der Näherungswerthe $\mathfrak{o}$ der Orientirungswinkel. — 2. Abweichungen f.

Zielpunkte.	Neigungen ν.			Richtungen r.			$\nu - r$.			$\mathfrak{r} = \nu - \mathfrak{o}$.			$f = \mathfrak{r} - r$.
				Standpunkt: ♁ 7.									
♁ 8	339	14	28	73	39	45	265	34	43	73	39	49,0	+4,0
♁ 3	30	52	23	125	17	42	265	34	41	125	17	44,0	+2,0
♁ 5	302	12	13	36	37	40	265	34	33	36	37	34,0	−6,0
		19	04		35	07		43	57		35	07,0	0,0
	$\mathfrak{o}_7 = \frac{[\nu - r]}{3} =$						265	34	39,0				
				Standpunkt: ♁ 8.									
♁ 6	46	05	55	108	10	00	297	55	55	108	10	02,0	+2,0
♁ 3	83	38	20	145	42	30	297	55	50	145	42	27,0	−3,0
♁ 7	159	14	28	221	18	30	297	55	58	221	18	35,0	+5,0
♁ 5	243	43	45	305	47	56	297	55	49	305	47	52,0	−4,0
		42	28		58	56		43	32		58	56,0	0,0
	$\mathfrak{o}_8 = \frac{[\nu - r]}{4} =$						297	55	53,0				
				Standpunkt: ♁ 6.									
♁ 3	108	49	35	124	58	55	343	50	40	124	58	52,5	−2,5
♁ 7	179	19	58	195	29	10	343	50	48	195	29	15,5	+5,5
♁ 8	226	05	55	242	15	08	343	50	47	242	15	12,5	+4,5
♁ 5	236	41	13	252	50	38	343	50	35	252	50	30,5	−7,5
		56	41		33	51		22	50		33	51,0	0,0
	$\mathfrak{o}_6 = \frac{[\nu - r]}{4} =$						343	50	42,5				

3. Näherungswerthe $\mathfrak{x}\ \mathfrak{y}$ der Koordinaten.

Die Berechnung erfolgt, wenn nicht bereits brauchbare Näherungswerthe bekannt sind, nach den Formeln (20) bis (39), Seite 26, der Formelsammlung von Veltmann u. Koll. Wir nehmen wie im § 36:

$\mathfrak{x} =\ 4\,745{,}00,$

$\mathfrak{y} = \times 6\,681{,}00.$

4. Näherungswerthe $\mathfrak{n}$ der Neigungen.

Aus Abtheilung 1 der Rechnung im § 36 folgt:

$\mathfrak{n}_7 = \ \ 13°\,48'\,59''$

$\mathfrak{n}_8 = 100°\,57'\,19''$

$\mathfrak{n}_6 = 153°\,22'\,00''$

5. Differenzialquotienten a, b.

Nach Abtheilung 2 derselben Rechnung ist:

$a_7 = -\ 18{,}3$	$b_7 = +\ 74{,}2$
$a_8 = -112{,}3$	$b_8 = -\ 21{,}8$
$a_6 = -\ 60{,}0$	$b_6 = -119{,}6$

6. Abweichungen f für die reduzirten Fehlergleichungen.

P_n	Neigungen $\mathfrak{n}$.			$\mathfrak{r} = \mathfrak{n} - \mathfrak{o}$.			Richtungen r.			$f = \mathfrak{r} - r$.	
♁ 7	13	48	59	108	14	20,0	108	14	33	—	13,0
♁ 8	100	57	19	163	01	26,0	163	01	05	+	21,0
♁ 6	153	22	00	169	31	17,5	169	30	42	+	35,5
					47	03,5		46	20	+	43,5

7. Bildung der Faktoren u. s. w. der Endgleichungen.

P_n	p.	a.		b.		f.		paa.		pab.		paf.		pbb.		pbf.	
♁ 7	0,75	—	18	+	74	—	13,0		243	—	999	+	176		4 107	—	722
♁ 8	0,80	—	112	—	22	+	21,0		10 035	+	1 971	—	1 882		387	—	370
♁ 6	0,80	—	60	—	120	+	35,5		2 880	+	5 760	—	1 704		11 520	—	3 408
		—	190	—	68	+	43,5	+	13 158	+	6 732	—	3 410	+	16 014	—	4 500

8. Auflösung der Endgleichungen und Bildung der wahrscheinlichsten Werthe $x\ y$.

$[paa]$.		$[pab]$.		$[paf]$.		$[pbb]$.		$[pbf]$.		Probe.			
+	13 158	+	6 732	—	3 410	+	16 014	—	4 500				
		—	0,512	+	0,259	—	3 444	+	1 745	—	884	—	501
				—	0,112	+	12 570	—	2 755	—	604	—	986
			$d\mathfrak{x}$	+	0,147		$d\mathfrak{y}$	+	0,219	—	1 488	—	1 487
				$\mathfrak{x} =$	4 745,00		$\mathfrak{y} =$		×6 681,00		$= \Sigma_1$.		
				$x =$	4 745,15		$y =$		×6 681,22				

9. Bildung der wahrscheinlichsten Werthe o der Orientirungswinkel. — 13. Zusatz Σ_2.

P_n.	$a d\mathfrak{x}$		$+\ b d\mathfrak{y}$		$=\ d\mathfrak{n}$.		f.		$\mathfrak{v} = f + d\mathfrak{n}$.		$d\mathfrak{o} = \frac{\mathfrak{v}}{n}$.		$o = \mathfrak{o} + d\mathfrak{o}$.			ff.	$-\frac{ff}{n}$.	
△7	—	2,6	+	16,2	+	13,6	—	13,0	+	0,6	+	0,2	265	34	39,2	169	—	42
△8	—	16,5	—	4,8	—	21,3	+	21,0	—	0,3	—	0,1	297	55	52,9	441	—	88
△6	—	8,8	—	26,3	—	35,1	+	35,5	+	0,4	+	0,1	343	50	42,6	1 260	—	252
	—	27,9	—	14,9	—	42,8	+	43,5	+	0,7						$\Sigma_2 =$	—	382

10. Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe ν der Neigungen.

P_n.		x_n. / x. / $x_n - x$.		y_n. / y. / $y_n - y$.	$\log(y_n - y)$. / $\log(x_n - x)$. / $\log tg(\nu \pm 180°)$.	$\nu \pm 180°$.
△7		2 125,96		×6 036,88	2.80 912$_n$	
		4 745,15		×6 681,22	3.41 817$_n$	
	—	2 619,19	—	644,34	9.39 095	193° 49′ 14″
△8		5 086,94		×4 914,53	3.24 716$_n$	
		4 745,15		×6 681,22	2.53 376	
	+	341,79	—	1 766,69	0.71 340$_n$	280° 56′ 58″
△6		6 122,25		×5 990,33	2.83 941$_n$	
		4 745,15		×6 681,22	3.13 896	
	+	1 377,10	—	690,89	9.70 045$_n$	333° 21′ 24″

14. Schlufsprobe und mittlere Fehler.

$[vv] = [ff] + \Sigma_1 + \Sigma_2 =$
$2\,092 - 1\,488 - 382 = 222.$

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-q}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{222}{14-5}} = \pm\, 5{,}0''$$

$$m_1 = \pm\, m\sqrt{\frac{1}{p_1}}$$

$$= \pm\, 5{,}0\sqrt{\frac{1}{0{,}25}} = \pm\, 10{,}0''.$$

11. Wahrscheinlichste Beobachtungsfehler v. — 12. Quadratsummen.

Zielpunkte.	Neigungen ν.			$R = \nu - o$.			Richtungen r.			$v = R - r$.		$d\mathfrak{r} = d\mathfrak{n} - d\mathfrak{o}$.		f.		$v = f + d\mathfrak{r}$.		ff.	vv.
	Standpunkt: △7.																		
△8	339	14	28	73	39	48,8	73	39	45	+	3,8	—	0,2	+	4,0	+	3,8	16	14
△9	13	49	14	108	14	34,8	108	14	33	+	1,8	+	13,4	—	13,0	+	0,4	169	0
△3	30	52	23	125	17	43,8	125	17	42	+	1,8	—	0,2	+	2,0	+	1,8	4	3
△5	302	12	13	36	37	33,8	36	37	40	—	6,2	—	0,2	—	6,0	—	6,2	36	38
		08	18		49	41,2		49	40	+	1,2	+	12,8	—	13,0	—	0,2		
	Standpunkt: △8.																		
△6	46	05	55	108	10	02,1	108	10	00	+	2,1	+	0,1	+	2,0	+	2,1	4	4
△3	83	38	20	145	42	27,1	145	42	30	—	2,9	+	0,1	—	3,0	—	2,9	9	8
△9	100	56	58	163	01	05,1	163	01	05	+	0,1	—	21,2	+	21.0	—	0,2	441	0
△7	159	14	28	221	18	35,1	221	18	30	+	5,1	+	0,1	+	5,0	+	5,1	25	26
△5	243	43	45	305	47	52,1	305	47	56	—	3,9	+	0,1	—	4,0	—	3,9	16	15
		39	26		00	01,5		00	01	+	0,5	—	20,8	+	21,0	+	0,2		
	Standpunkt: △6.																		
△3	108	49	35	124	58	52,4	124	58	55	—	2,6	—	0,1	—	2,5	—	2,6	6	7
△9	153	21	24	169	30	41,4	169	30	42	—	0,6	—	35,2	+	35.5	+	0,3	1 260	0
△7	179	19	58	195	29	15,4	195	29	10	+	5,4	—	0,1	+	5,5	+	5,4	30	29
△8	226	05	55	242	15	12,4	242	15	08	+	4,4	—	0,1	+	4,5	+	4,4	20	19
△5	236	41	13	252	50	30,4	252	50	38	—	7,6	—	0,1	—	7,5	—	7,6	56	58
		18	05		04	32,0		04	33	—	1,0	—	35,6	+	35,5	—	0,1	2 092	221

§ 38. Kombinirtes Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden.

Nachdem die Koordinaten des ♁9 im § 36 lediglich aus den auf dem zu bestimmenden Punkte beobachteten Richtungen und im § 37 lediglich aus den auf den gegebenen Punkten beobachteten Richtungen abgeleitet worden sind, sollen jetzt die Koordinaten des ♁9 nochmals aus allen für die Bestimmung dieses Punktes durch kombinirtes Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden vorliegenden Beobachtungsergebnissen bestimmt werden. Hierbei sollen einige Vereinfachungen des im § 37 und einige Aenderungen des im § 36 eingeschlagenen Verfahrens durchgeführt werden, die zweckmäfsig sind, wenn es sich darum handelt, die wahrscheinlichsten Werthe der Koordinaten eines trigonometrischen Punktes möglichst einfach zu erhalten und darauf verzichtet werden kann, die Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe der Beobachtungsfehler und der mittleren Fehler in vollem Umfange durchzuführen.

1. Aus den Richtungen r, die auf den gegebenen Punkten beobachtet sind, können zuerst durch Hinzufügung des Orientirungswinkels $\mathfrak{o}_n = \frac{[\nu - r]}{n-1}$ orientirte Richtungen

(1*) $$\varphi = r + \mathfrak{o}_n$$

abgeleitet werden und zwar in unserm Beispiele wie folgt:

Zielpunkte.	Endgültige Neigungen ν.			Beobachtete Richtungen r.			$\nu - r$ und $\mathfrak{o} = \frac{[\nu - r]}{n-1}$.			Orientirte Richtungen $\varphi = r + \mathfrak{o}$.			$v = \nu - \varphi$.
						Standpunkt: ♁7.							
♁8	339	14	28	73	39	45	265	34	43	339	14	24,0	+ 4,0
♁9				108	14	33				13	49	12,0	
♁3	30	52	23	125	17	42	265	34	41	30	52	21,0	+ 2,0
♁5	302	12	13	36	37	40	265	34	33	302	12	19,0	— 6,0
			$[r]$		49	40			117		08	16,0	0,0
			$+ n\mathfrak{o}_7$		18	36,0	265	34	39,0	$= \mathfrak{o}_7$			
			$= [\varphi]$		08	16,0							
						Standpunkt: ♁8.							
♁6	46	05	55	108	10	00	297	55	55	46	05	53,0	+ 2,0
♁3	83	38	20	145	42	30	297	55	50	83	38	23,0	— 3,0
♁9				163	01	05				100	56	58,0	
♁7	159	14	28	221	18	30	297	55	58	159	14	23,0	+ 5,0
♁5	243	43	45	305	47	56	297	55	49	243	43	49,0	— 4,0
			$[r]$		00	01			212		39	26,0	0,0
			$+ n\mathfrak{o}_8$		39	25,0	297	55	53,0	$= \mathfrak{o}_8$			
			$= [\varphi]$		39	26,0							
						Standpunkt: ♁6.							
♁3	108	49	35	124	58	55	343	50	40	108	49	37,5	— 2,5
♁9				169	30	42				153	21	24,5	
♁7	179	19	58	195	29	10	343	50	48	179	19	52,5	+ 5,5
♁8	226	05	55	242	15	08	343	50	47	226	05	50,5	+ 4,5
♁5	236	41	13	252	50	38	343	50	35	236	41	20,5	— 7,5
			$[r]$		04	33			170		18	05,5	0,0
			$+ n\mathfrak{o}_6$		13	32,5	343	50	42,5	$= \mathfrak{o}_6$			
			$= [\varphi]$		18	05,5							

Hierbei ergeben sich die beiden Proben, dafs $[r] + n\mathfrak{o} = [\varphi]$ und $[\mathfrak{v}] = [\nu - \varphi] = 0$ sein mufs.

2. Sodann können allein die orientirten Richtungen φ für die Strahlen von den gegebenen Punkten nach dem neu zu bestimmenden Punkte als Beobachtungsergebnisse mit dem Gewichte $\frac{n-1}{n}$ in die weitere Rechnung eingeführt werden, während alle übrigen orientirten Richtungen in der weitern Rechnung unberücksichtigt bleiben.

Demnach können in unserm Beispiele allein die orientirten Richtungen

$$(2^*)\quad \begin{cases} \text{für den Strahl } \triangle 7 - \triangle 9\colon\ \varphi_2 = \ \ 13^\circ 49' 12{,}0'', & \text{Gewicht } p_2 = \frac{3}{4}, \\ \text{„ „ „ } \triangle 8 - \triangle 9\colon\ \varphi_3 = 100\ \ 56\ \ 58{,}0\ , & \text{„ } p_3 = \frac{4}{5}, \\ \text{„ „ „ } \triangle 6 - \triangle 9\colon\ \varphi_4 = 153\ \ 21\ \ 24{,}5\ , & \text{„ } p_4 = \frac{4}{5}, \end{cases}$$

als Beobachtungsergebnisse in die weitere Rechnung eingeführt werden.

3. Die Richtungen φ können als endgültig orientirte Richtungen angesehen werden, weil damit ohne weitere Aenderung der Orientirung die wahrscheinlichsten Werthe der gesuchten Koordinaten $x\,y$ des $\triangle 9$ erhalten werden, was später bewiesen werden wird.

Danach ergeben sich für die Beziehungen zwischen den wahren Werthen (φ) der vorliegenden Beobachtungsergebnisse und den wahren Werthen (x) (y) der gesuchten Koordinaten die Gleichungen:

$$(3^*)\quad \begin{cases} (\varphi_2) = (\nu_2), \\ (\varphi_3) = (\nu_3), \\ (\varphi_4) = (\nu_4), \end{cases} \qquad (4^*)\quad \begin{cases} (\nu_2) \pm 180^\circ = arc\ tg\ \dfrac{y_7 - (y)}{x_7 - (x)}\,\varrho'', \\ (\nu_3) \pm 180^\circ = arc\ tg\ \dfrac{y_8 - (y)}{x_8 - (x)}\,\varrho'', \\ (\nu_4) \pm 180^\circ = arc\ tg\ \dfrac{y_6 - (y)}{x_6 - (x)}\,\varrho''. \end{cases}$$

4. Weiter ergeben sich die wahrscheinlichsten Werthe Φ_2, Φ_3, Φ_4 der orientirten Richtungen aus den wahrscheinlichsten Werthen $x\,y$ der zu bestimmenden Koordinaten wie folgt:

$$(5^*)\quad \begin{cases} \Phi_2 = \nu_2, \\ \Phi_3 = \nu_3, \\ \Phi_4 = \nu_4, \end{cases} \qquad (6^*)\quad \begin{cases} \nu_2 \pm 180^\circ = arc\ tg\ \dfrac{y_7 - y}{x_7 - x}\,\varrho'', \\ \nu_3 \pm 180^\circ = arc\ tg\ \dfrac{y_8 - y}{x_8 - x}\,\varrho'', \\ \nu_4 \pm 180^\circ = arc\ tg\ \dfrac{y_6 - y}{x_6 - x}\,\varrho'', \end{cases}$$

und die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler nach den Formeln (**110**):

$$(7^*)\quad \begin{cases} v_2 = \Phi_2 - \varphi_2 = \nu_2 - \varphi_2, \\ v_3 = \Phi_3 - \varphi_3 = \nu_3 - \varphi_3, \\ v_4 = \Phi_4 - \varphi_4 = \nu_4 - \varphi_4. \end{cases}$$

5. Wir zerlegen nun die wahrscheinlichsten Werthe $x\,y$ der zu bestimmenden Koordinaten in die Näherungswerthe $\mathfrak{x}\ \mathfrak{y}$ und die diesen beizufügenden Aenderungen $d\mathfrak{x}\ d\mathfrak{y}$, setzen also:

$$(8^*)\quad \begin{cases} x = \mathfrak{x} + d\mathfrak{x}, \\ y = \mathfrak{y} + d\mathfrak{y}. \end{cases}$$

Dann ergeben sich die den Näherungswerthen $\mathfrak{x}\ \mathfrak{y}$ der Koordinaten entsprechenden Näherungswerthe $\mathfrak{r} = \mathfrak{n}$ der orientirten Richtungen nach:

$$(9^*)\quad \begin{cases} \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{n}_2, \\ \mathfrak{r}_3 = \mathfrak{n}_3, \\ \mathfrak{r}_4 = \mathfrak{n}_4; \end{cases} \qquad (10^*)\quad \begin{cases} \mathfrak{n}_2 \pm 180^\circ = arc\ tg\ \dfrac{y_7 - \mathfrak{y}}{x_7 - \mathfrak{x}}\,\varrho'', \\ \mathfrak{n}_3 \pm 180^\circ = arc\ tg\ \dfrac{y_8 - \mathfrak{y}}{x_8 - \mathfrak{x}}\,\varrho'', \\ \mathfrak{n}_4 \pm 180^\circ = arc\ tg\ \dfrac{y_6 - \mathfrak{y}}{x_6 - \mathfrak{x}}\,\varrho''. \end{cases}$$

1. Näherungswerthe $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{y}$ der Koordinaten.

Die Berechnung erfolgt, wenn nicht bereits brauchbare Näherungswerthe bekannt sind, wie im § 36 oder 37 angegeben ist. Wir nehmen wie im § 36:

$$\mathfrak{x} = 4\,745{,}00, \quad \mathfrak{y} = \times 6\,681{,}00.$$

2. Näherungswerthe $\mathfrak{n}$ der Neigungen.		**3. Differenzialquotienten a, b.**		
Nach Abtheil. 1 der Rechnung im § 36 ist:	$\mathfrak{n}_3 = 62°\ 42'\ 48''$ $\mathfrak{n}_7 = 193\ \ 48\ \ 59$ $\mathfrak{n}_8 = 280\ \ 57\ \ 19$ $\mathfrak{n}_6 = 333\ \ 22\ \ 00$	Nach Abtheil. 2 der Rechnung im § 36 ist:	$a_3 = +122{,}3$ $a_7 = -18{,}3$ $a_8 = -112{,}3$ $a_6 = -60{,}0$	$b_3 = -63{,}1$ $b_7 = +74{,}2$ $b_8 = -21{,}8$ $b_6 = -119{,}6$

4. Bildung der Faktoren A, B. — **5. Bildung der Abweichungen F.**

a) für die auf den gegebenen Punkten beobachteten Richtungen.

P_n.	a.	$A = a$.	b.	$B = b$.		φ.			$\mathfrak{n}$.		$f = \mathfrak{n} - \varphi$.	$F = f$.
♁ 7	− 18,3		+ 74,2			13	49	12,0	48	59	− 13,0	
♁ 8	− 112,3		− 21,8			100	56	58,0	57	19	+ 21,0	
♁ 6	− 60,0		− 119,6			153	21	24,5	22	00	+ 35,5	
	− 190,6		− 67,2				07	34,5	08	18	+ 43,5	

b) für die auf dem neu zu bestimmenden Punkte beobachteten Richtungen.

P_n.	a.	$A = a - \frac{[a]}{n}$.	b.	$B = b - \frac{[b]}{n}$.	r.			$\varphi = r + \mathfrak{o}$.			$\mathfrak{n}$.		$f = \mathfrak{n} - \varphi$.	$F = f - \frac{[f]}{n}$.
							$\mathfrak{o}$	39	04	00				
♁ 3	+ 122,3	+ 139,4	− 63,1	− 30,5	23	38	45	62	42	45	42	48	+ 3	− 16,8
♁ 7	− 18,3	− 1,2	+ 74,2	+ 106,8	154	45	05	193	49	05	48	59	− 6	− 25,8
♁ 8	− 112,3	− 95,2	− 21,8	+ 10,8	241	52	52	280	56	52	57	19	+ 27	+ 7,2
♁ 6	− 60,0	− 42,9	− 119,6	− 87,0	294	17	05	333	21	05	22	00	+ 55	+ 35,2
	− 68,3	+ 0,1	− 130,3	+ 0,1		33	47		49	47	51	06	+ 79	− 0,2
$\frac{[a]}{n}$	− 17,1	$\frac{[b]}{n}$	− 32,6				$-4\,\mathfrak{o}$		16	00		$\frac{[f]}{n}$	+ 19,8	
							$= [r]$		33	47				

6. Bildung der Faktoren u. s. w. der Endgleichungen.

P_n.	p.	A.	B.	F.	pAA.	pAB.	pAF.	pBB.	pBF.
♁ 7	0,75	− 18	+ 74	− 13,0	243	− 999	+ 176	4 107	− 722
♁ 8	0,8	− 112	− 22	+ 21,0	10 035	+ 1 971	− 1 882	387	− 370
♁ 6	0,8	− 60	− 120	+ 35,5	2 880	+ 5 760	− 1 704	11 520	− 3 408
♁ 3	1,0	+ 139	− 31	− 16,8	19 321	− 4 309	− 2 335	961	+ 521
♁ 7	1,0	− 1	+ 107	− 25,8	1	− 107	+ 26	11 449	− 2 761
♁ 8	1,0	− 95	+ 11	+ 7,2	9 025	− 1 045	− 684	121	+ 79
♁ 6	1,0	− 43	− 87	+ 35,2	1 849	+ 3 741	− 1 514	7 569	− 3 062
					+ 48 354	+ 5 012	− 7 917	+ 36 114	− 9 723

6. Auflösung der Endgleichungen und Bildung der wahrscheinlichsten Werthe x, y, o.

$[pAA]$.	$[pAB]$.	$[pAF]$.	$[pBB]$.	$[pBF]$.	Probe.			
+ 43 354	+ 5 012	− 7 917	+ 36 114	− 9 723			$+\frac{[a]}{n} d\mathfrak{x}$	− 2,6
	− 0,116	+ 0,183	− 581	+ 918	− 1 449	− 1 219	$+\frac{[b]}{n} d\mathfrak{y}$	− 8,1
		− 0,029	+ 35 533	− 8 805	− 2 184	− 2 411	$+\frac{[f]}{n}$	+ 19,8
	$d\mathfrak{x} =$	+ 0,154	$d\mathfrak{y} =$	+ 0,248	− 3 633	− 3 630	$d\mathfrak{o} =$	+ 9,1
	$\mathfrak{x} =$	4 745,00	$\mathfrak{y} =$	×6 681,00	$= \Sigma$.		$\mathfrak{o} =$	39° 04′ 00″
	$x =$	4 745,15	$y =$	×6 681,25			$o =$	39 04 09

7. Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe ν der Neigungen.

P_n.		x_n. x. $x_n - x$.		y_n. y. $y_n - y$.	$log(y_n - y)$. $log(x_n - x)$. $log\,tg\,\nu$.	ν.
♁ 3	 +	5 432,42 4 745,15 687,27	 +	×8 013,62 ×6 681,25 1 332,37	3.12 462 2.83 713 0.28 749	 62° 42′ 50″
♁ 7	 −	2 125,96 4 745,15 2 619,19	 −	×6 036,88 ×6 681,25 644,37	2.80 914$_n$ 3.41 817$_n$ 9.39 097	 193 49 17
♁ 8	 +	5 086,94 4 745,15 341,79	 −	×4 914,53 ×6 681,25 1 766,72	3.24 717$_n$ 2.53 376 0,71 341$_n$	 280 56 57
♁ 6	 +	6 122,25 4 745,15 1 377,10	 −	×5 990,33 ×6 681,25 690,92	2.83 943$_n$ 3.13 896 9.70 047$_n$	 333 21 21

11. Schlufsprobe und mittlere Fehler.

$$[pvv] = [pFF] + \Sigma$$
$$= 3\,727 - 3\,632 = 95.$$

$$\mathfrak{m} = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-q}} = \pm\sqrt{\frac{95}{7-3}}$$
$$= \pm 4{,}9''.$$

$$\mathfrak{m}_1 = \pm\,\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{\mathfrak{p}_1}}$$
$$= \pm 4{,}9\sqrt{\frac{1}{0{,}25}} = \pm 9{,}8''.$$

8. Wahrscheinlichste Beobachtungsfehler v. — 9. Quadratsummen.

a) für die auf den gegebenen Punkten beobachteten Richtungen.

P_n.	φ.			ν.		$v = \nu - \varphi$.		$A d\mathfrak{x}$		+ $B d\mathfrak{y}$		= dn.		$v = F + dn$.		pFF.	pvv.
♁ 7	13	49	12	49	17	+	5	−	2,8	+	18,4	+	15,6	+	2,6	127	5
♁ 8	100	56	58	56	57	−	1	−	17,3	−	5,4	−	22,7	−	1,7	353	2
♁ 6	153	21	24	21	21	−	3	−	9,2	−	29,7	−	38,9	−	3,4	1 008	9
		07	34	07	35	+	1	−	29,3	−	16,7	−	46,0	−	2,5		

b) für die auf dem neu zu bestimmenden Punkte beobachteten Richtungen.

	$\Phi = r + o$.			ν.		$v = \nu - \Phi$.		$A d\mathfrak{x}$		+ $B d\mathfrak{y}$		= dn.		$v = F + dn$.		pFF.	pvv.
o	39	04	09														
♁ 3	62	42	54	42	50	−	4	+	21,5	−	7,6	+	13,9	−	2,9	282	8
♁ 7	193	49	14	49	17	+	3	−	0,2	+	26,5	+	26,3	+	0,5	666	0
♁ 8	280	57	01	56	57	−	4	−	14,7	+	2,7	−	12,0	−	4,8	52	23
♁ 6	333	21	14	21	21	+	7	−	6,6	−	21,6	−	28,2	+	7,0	1 239	49
$[\Phi]$		50	23	50	25	+	2		0,0		0,0		0,0	−	0,2	3 727	96
$-4\,o$		16	36														
$=[r]$		33	47														

Aus diesen Näherungswerthen werden die wahrscheinlichsten Werthe der orientirten Richtungen durch Beifügung der den Aenderungen $d\mathfrak{x}\ d\mathfrak{y}$ entsprechenden Aenderungen $d\mathfrak{n}$ erhalten nach:

$$(11^*)\quad \begin{cases} \Phi_2 = \nu_2 = \mathfrak{n}_2 + d\mathfrak{n}_2, \\ \Phi_3 = \nu_3 = \mathfrak{n}_3 + d\mathfrak{n}_3, \\ \Phi_4 = \nu_4 = \mathfrak{n}_4 + d\mathfrak{n}_4. \end{cases}$$

Durch Differenzirung der für die Näherungswerthe $\mathfrak{r} = \mathfrak{n}$ erhaltenen Ausdrücke nach $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ergeben sich wie im § 36, Nr. 4 die Differenzialquotienten:

$$(12^*)\quad \begin{cases} a_2 = + \dfrac{\sin \mathfrak{n}_2}{\mathfrak{s}_2}\varrho'', \\ a_3 = + \dfrac{\sin \mathfrak{n}_3}{\mathfrak{s}_3}\varrho'', \\ a_4 = + \dfrac{\sin \mathfrak{n}_4}{\mathfrak{s}_4}\varrho'', \end{cases} \qquad (13^*)\quad \begin{cases} b_2 = - \dfrac{\cos \mathfrak{n}_2}{\mathfrak{s}_2}\varrho'', \\ b_3 = - \dfrac{\cos \mathfrak{n}_3}{\mathfrak{s}_3}\varrho'', \\ b_4 = - \dfrac{\cos \mathfrak{n}_4}{\mathfrak{s}_4}\varrho''. \end{cases}$$

Die Abweichungen zwischen den Näherungswerthen der orientirten Richtungen und den Beobachtungsergebnissen sind:

$$(14^*)\quad \begin{cases} f_2 = \mathfrak{r}_2 - \varphi_2 = \mathfrak{n}_2 - \varphi_2, \\ f_3 = \mathfrak{r}_3 - \varphi_3 = \mathfrak{n}_3 - \varphi_3, \\ f_4 = \mathfrak{r}_4 - \varphi_4 = \mathfrak{n}_4 - \varphi_4. \end{cases}$$

6. Hiernach ergeben sich die umgeformten Fehlergleichungen (**116**) und (**117**) wie folgt:

$$(15^*)\quad \begin{cases} d\mathfrak{n}_2 = a_2\, d\mathfrak{x} + b_2\, d\mathfrak{y}, \\ d\mathfrak{n}_3 = a_3\, d\mathfrak{x} + b_3\, d\mathfrak{y}, \\ d\mathfrak{n}_4 = a_4\, d\mathfrak{x} + b_4\, d\mathfrak{y}, \end{cases} \qquad (16^*)\quad \begin{cases} v_2 = f_2 + d\mathfrak{n}_2, \\ v_3 = f_3 + d\mathfrak{n}_3, \\ v_4 = f_4 + d\mathfrak{n}_4, \end{cases} \qquad \begin{matrix} \text{Gewicht } p_2 = {}^3/_4, \\ \text{„} \quad p_3 = {}^4/_5, \\ \text{„} \quad p_4 = {}^4/_5. \end{matrix}$$

Diese Fehlergleichungen stimmen überein mit den reduzirten Fehlergleichungen (30*) und (31*) im § 37, Nr. 6, liefern also auch, da die Gewichte gleich angenommen sind, dieselben Beiträge zu den Endgleichungen wie die Gleichungen (30*) und (31*) a. a. O.; denn die Differenzialquotienten a, b in den Gleichungen (15*) sind dieselben wie die in (30*) im § 37 und nach (1*) und (14*) stimmen die Werthe

$$f = \mathfrak{n} - \varphi = \mathfrak{n} - r - \mathfrak{o}_\mathfrak{n}$$

überein mit den Werthen von f nach (11*) und (15*) im § 37, denn diese sind:

$$f = \mathfrak{r} - r = \mathfrak{n} - \mathfrak{o}_\mathfrak{n} - r.$$

7. Das im § 36 dargelegte Rechnungsverfahren für die auf dem neu zu bestimmenden Punkte beobachteten Richtungen wird nur soweit formell geändert, als die wünschenswerthe Uebereinstimmung mit dem vorstehend dargelegten Verfahren für die auf den gegebenen Punkten beobachteten Richtungen dies bedingt.

Demnach werden die Abweichungen f gebildet nach:

$$(17^*)\quad \begin{cases} \varphi_1 = r_1 + \mathfrak{o}, \\ \varphi_2 = r_2 + \mathfrak{o}, \\ \varphi_3 = r_3 + \mathfrak{o}, \\ \varphi_4 = r_4 + \mathfrak{o}, \end{cases} \qquad (18^*)\quad \begin{cases} f_1 = \mathfrak{n}_1 - \varphi_1, \\ f_2 = \mathfrak{n}_2 - \varphi_2, \\ f_3 = \mathfrak{n}_3 - \varphi_3, \\ f_4 = \mathfrak{n}_4 - \varphi_4, \end{cases}$$

und die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler v nach:

$$(19^*)\quad \begin{cases} \Phi_1 = r_1 + o, \\ \Phi_2 = r_2 + o, \\ \Phi_3 = r_3 + o, \\ \Phi_4 = r_4 + o, \end{cases} \qquad (20^*)\quad \begin{cases} v_1 = \nu_1 - \Phi_1, \\ v_2 = \nu_2 - \Phi_2, \\ v_3 = \nu_3 - \Phi_3, \\ v_4 = \nu_4 - \Phi_4, \end{cases}$$

was, wie ohne weiteres zu übersehen ist, zu denselben Ergebnissen führt, wie die Rechnung nach den Formeln (**112**) und (**115**), (**109**) und (**110**) im § 36.

8. Der mittlere Fehler $\mathfrak{m}$ der Gewichtseinheit oder des arithmetischen Mittels aus den vier für eine jede Richtung vorliegenden Beobachtungsergebnissen kann dann berechnet werden nach:

$$\mathfrak{m} = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-q}} = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{7-3}} \tag{21*}$$

und der mittlere Fehler $\mathfrak{m}_1$ einer einmaligen Beobachtung einer Richtung in einem Richtungssatze, deren Gewicht $\mathfrak{p}_1 = 0{,}25$ ist, nach:

$$\mathfrak{m}_1 = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{\mathfrak{p}_1}} = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{0{,}25}}. \tag{22*}$$

9. Die Rechnung nach dem entwickelten Verfahren gestaltet sich wie folgt: (Siehe die Tabellen auf Seite 180 und 181.)

§ 39. Bestimmung einer geraden Grenzstrecke.

In einem Walde sind an einer verdunkelten geraden Grenzstrecke 5 Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 aufgefunden worden, die Punkte der Grenzlinie sein sollen. Die Interessenten haben sich dahin geeinigt, dafs die gerade Linie, die sich möglichst gut an die aufgefundenen Punkte anschliefst, als Besitzgrenze festgesetzt werden soll.

Zur Lösung der sich hieraus ergebenden Aufgabe ist an der Grenze im Anschlufs an bereits bestimmte Polygonpunkte ein Polygonzug gelegt worden und die Punkte P_1 bis P_5 sind von diesem Polygonzuge aus eingemessen worden, wonach die Koordinaten für sämtliche Punkte im allgemeinen Koordinatensystem berechnet worden sind. Diese Koordinaten sind dann auf eine Abscissenachse transformirt worden, die ungefähr parallel der zu bestimmenden Grenzlinie liegt, wodurch die folgenden Koordinaten erhalten sind:

P_n.	Abscisse.	Ordinate.
P_1	$a_1 = 0{,}00$	$o_1 = -1{,}10$
P_2	$a_2 = 712{,}53$	$o_2 = -0{,}24$
P_3	$a_3 = 1\,318{,}42$	$o_3 = +2{,}95$
P_4	$a_4 = 1\,731{,}04$	$o_4 = +2{,}18$
P_5	$a_5 = 2\,026{,}50$	$o_5 = +4{,}63$
	$[a] = 5\,788{,}49$	$[o] = +8{,}42$

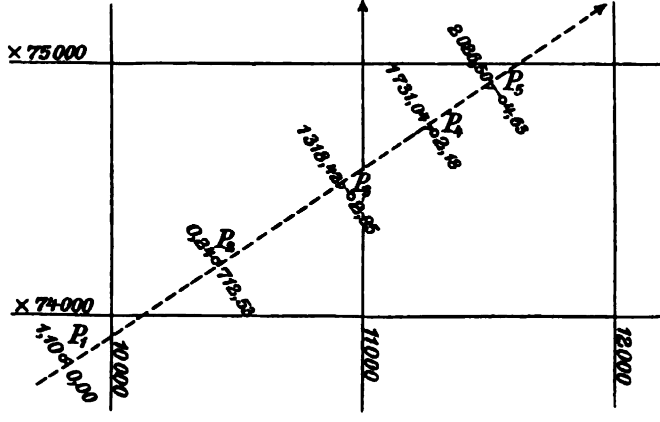


Fig. 15.

1. Die zu suchende gerade Linie ist bestimmt, sobald aus diesen Mafsen der wahrscheinlichste Werth x der Richtungstangente der Linie und der wahrscheinlichste Werth y der Ordinate im Anfangspunkte der Linie ermittelt ist. Bei Ermittlung dieser Werthe können die gegebenen Abscissen a als fehlerfreie wahre Werthe angesehen werden, da bei der gewählten Lage der Abscissenachse ein in den zulässigen Grenzen liegender Fehler der Abscissen die Lage der zu bestimmenden Geraden nicht wesentlich beeinflussen kann. Demnach können die Zahlenwerthe der Ordinaten o als die einzigen vorliegenden Beobachtungsergebnisse angesehen werden.

2. Für die Beziehungen zwischen den wahren Werthen (o_n) der beobachteten Gröfsen und den wahren Werthen (x), (y) der zu bestimmenden Gröfsen ergeben sich nach Figur 16 die Gleichungen:

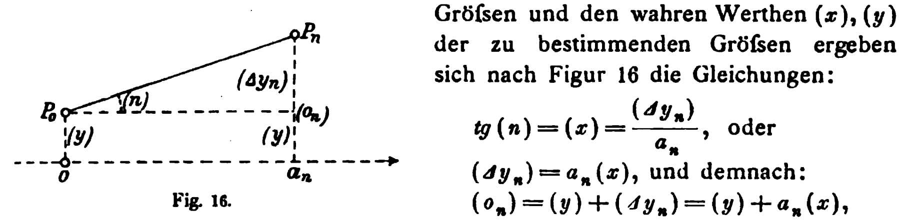


Fig. 16.

$$tg\,(n) = (x) = \frac{(\Delta y_n)}{a_n}, \text{ oder}$$

$(\Delta y_n) = a_n (x)$, und demnach:

$$(o_n) = (y) + (\Delta y_n) = (y) + a_n (x),$$

oder auf das vorliegende Beispiel angewendet:

$$(108) \quad \begin{cases} (o_1) = a_1 (x) + (y), \\ (o_2) = a_2 (x) + (y), \\ \dots\dots\dots\dots, \\ (o_5) = a_5 (x) + (y). \end{cases}$$

3. Hiernach ergeben sich die wahrscheinlichsten Werthe O der beobachteten Ordinaten aus den wahrscheinlichsten Werthen x, y der zu bestimmenden Gröfsen und die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler v nach:

$$(109) \quad \begin{cases} O_1 = a_1 x + y, \\ O_2 = a_2 x + y, \\ \dots\dots\dots; \\ O_5 = a_5 x + y; \end{cases} \qquad (110) \quad \begin{cases} v_1 = O_1 - o_1, \\ v_2 = O_2 - o_2, \\ \dots\dots\dots, \\ v_5 = O_5 - o_5. \end{cases}$$

4. Die zu bestimmenden Gröfsen x, y werden zerlegt in die Näherungswerthe $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und in die diesen beizufügenden kleinen Aenderungen $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, so dafs ist:

$$(111) \quad \begin{cases} x = \mathfrak{x} + d\mathfrak{x}, \\ y = \mathfrak{y} + d\mathfrak{y}. \end{cases}$$

Die den Näherungswerthen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ der zu bestimmenden Gröfsen entsprechenden Näherungswerthe $\mathfrak{o}$ der beobachteten Ordinaten ergeben sich nach:

$$(112) \quad \begin{cases} \mathfrak{o}_1 = a_1 \mathfrak{x} + \mathfrak{y}, \\ \mathfrak{o}_2 = a_2 \mathfrak{x} + \mathfrak{y}, \\ \dots\dots\dots, \\ \mathfrak{o}_5 = a_5 \mathfrak{x} + \mathfrak{y}, \end{cases}$$

womit die wahrscheinlichsten Werthe O der Ordinaten durch Beifügung der den Aenderungen $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$ entsprechenden Aenderungen $d\mathfrak{o}$ erhalten werden nach:

$$(113) \quad \begin{cases} O_1 = \mathfrak{o}_1 + d\mathfrak{o}_1, \\ O_2 = \mathfrak{o}_2 + d\mathfrak{o}_2, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ O_5 = \mathfrak{o}_5 + d\mathfrak{o}_5. \end{cases}$$

Die Näherungswerthe $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ werden hier am einfachsten gefunden, indem für $\mathfrak{y}$ ein abgerundeter Werth von o_1 genommen und $\mathfrak{x}$ nach einer der Gleichungen (**112**), beispielsweise der letzten dieser Gleichungen gerechnet wird aus:

$$\mathfrak{x} = \frac{o_5 - \mathfrak{y}}{a_5}.$$

5. Differenziren wir die in den Gleichungen (**112**) für die Näherungswerthe $\mathfrak{o}$ erhaltenen Ausdrücke nach $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, so ergiebt sich für die Differenzialquotienten $a = \frac{\partial \mathfrak{o}}{\partial \mathfrak{x}}$, $b = \frac{\partial \mathfrak{o}}{\partial \mathfrak{y}}$:

(**114**)
$$\begin{cases} \alpha_1 = a_1, & b_1 = +1, \\ \alpha_2 = a_2, & b_2 = +1, \\ \dots\dots, & \dots\dots, \\ \alpha_5 = a_5; & b_5 = +1. \end{cases}$$

Die Abweichungen f zwischen den Näherungswerthen $\mathfrak{o}$ der beobachteten Gröfsen und den Beobachtungsergebnissen o sind:

(**115**)
$$\begin{cases} f_1 = \mathfrak{o}_1 - o_1, \\ f_2 = \mathfrak{o}_2 - o_2, \\ \dots\dots\dots, \\ f_5 = \mathfrak{o}_5 - o_5. \end{cases}$$

6. Hiernach ergeben sich die umgeformten Fehlergleichungen:

(**116**)
$$\begin{cases} d\mathfrak{o}_1 = a_1\,d\mathfrak{x} + d\mathfrak{y}, \\ d\mathfrak{o}_2 = a_2\,d\mathfrak{x} + d\mathfrak{y}, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ d\mathfrak{o}_5 = a_5\,d\mathfrak{x} + d\mathfrak{y}, \end{cases}$$

(**117**)
$$\begin{cases} v_1 = f_1 + d\mathfrak{o}_1, \\ v_2 = f_2 + d\mathfrak{o}_2, \\ \dots\dots\dots, \\ v_5 = f_5 + d\mathfrak{o}_5. \end{cases}$$

Diese umgeformten Fehlergleichungen können, indem

(**135**)
$$\begin{cases} A_1 = a_1 - \frac{[a]}{5}, & F_1 = f_1 - \frac{[f]}{5}, \\ A_2 = a_2 - \frac{[a]}{5}, & F_2 = f_2 - \frac{[f]}{5}, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ A_5 = a_5 - \frac{[a]}{5}, & F_5 = f_5 - \frac{[f]}{5} \end{cases}$$

gebildet wird, reduzirt werden auf:

(**136**)
$$\begin{cases} d\mathfrak{o}_1 = A_1\,d\mathfrak{x}, & v_1 = F_1 + d\mathfrak{o}_1, \\ d\mathfrak{o}_2 = A_2\,d\mathfrak{x}, & v_2 = F_2 + d\mathfrak{o}_2, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ d\mathfrak{o}_5 = A_5\,d\mathfrak{x}, & v_5 = F_5 + d\mathfrak{o}_5. \end{cases}$$

7. Aus diesen reduzirten Fehlergleichungen ergiebt sich die Endgleichung:

$$[AA]\,d\mathfrak{x} + [AF] = 0,$$

wonach

$$d\mathfrak{x} = -\frac{[AF]}{[AA]}$$

und weiter:

(**137**)
$$d\mathfrak{y} = -\frac{[a]}{5}\,d\mathfrak{x} - \frac{[f]}{5}$$

ist.

8. Der mittlere Fehler $\mathfrak{m} = m$ der als gleichgewichtig angenommenen Beobachtungsergebnisse wird erhalten nach:

(**125**)
$$\mathfrak{m} = m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-q}} = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{5-2}}.$$

9. Die Zahlenwerthe der Abscissen a, die in den Formeln (**109**), (**112**), (**116**) als Faktoren von x, $\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{x}$ auftreten, sind für die auszuführenden Rechnungen unbequem. Es empfiehlt sich daher, dafür in die Rechnung die Werthe $\alpha = \frac{a}{1000}$ einzuführen, wonach statt x, $\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{x}$ in den angeführten Formeln $1000x$, $1000\mathfrak{x}$, $1000d\mathfrak{x}$ zu setzen und auch in den Formeln (**135**) bis (**137**) α und $1000d\mathfrak{x}$ statt a und $d\mathfrak{x}$ zu nehmen ist. Hiernach gestaltet sich die Rechnung wie folgt:

1. Näherungswerthe $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ der zu bestimmenden Gröfsen.

$$\mathfrak{y} = -1{,}0. \qquad 1000\,\mathfrak{x} = \frac{o_5 - \mathfrak{y}}{\alpha_5} = \frac{+4{,}6 - (-1{,}0)}{2{,}03} = +2{,}8.$$

2. Näherungswerthe $\mathfrak{o}$ der beobachteten Ordinaten. — 3. Abweichungen f. — 4. Bildung der Faktoren u. s. w. der Endgleichungen.

P_n.	$\alpha = \frac{a}{1000}$.	$\alpha \cdot 1000\,\mathfrak{x}$	$+\ \mathfrak{y}$	$= \mathfrak{o}$.	o.	$f = \mathfrak{o} - o$.	$A = \alpha - \frac{[\alpha]}{n}$.	$F = f - \frac{[f]}{n}$.	AA.	AF.
P_1	0,000	0,000	− 1,0	− 1,000	− 1,100	+ 0,100	− 1,158	− 0,457	1,341	+ 0,529
P_2	+ 0,713	+ 1,996	− 1,0	+ 0,996	− 0,240	+ 1,236	− 0,445	+ 0,679	0,198	− 0,302
P_3	+ 1,318	+ 3,690	− 1,0	+ 2,690	+ 2,950	− 0,260	+ 0,160	− 0,817	0,026	− 0,131
P_4	+ 1,731	+ 4,847	− 1,0	+ 3,847	+ 2,180	+ 1,667	+ 0,573	+ 1,110	0,328	+ 0,636
P_5	+ 2,026	+ 5,673	− 1,0	+ 4,673	+ 4,630	+ 0,043	+ 0,868	− 0,514	0,753	− 0,446
$[\alpha]$	+ 5,788	+ 16,206	− 5,0	+ 11,206	+ 8,420	+ 2,786	− 0,002	+ 0,001	+ 2,646	+ 0,286
$\frac{[\alpha]}{n}$	+ 1,158				$\frac{[f]}{n}$	+ 0,557				

5. Wahrscheinlichste Werthe x, y der zu bestimmenden Gröfsen.

$$1000\,d\mathfrak{x} = -\frac{[AF]}{[AA]} = -\frac{+0{,}286}{+2{,}646} = -0{,}108 \qquad d\mathfrak{y} = -\frac{[\alpha]}{n}\,1000\,d\mathfrak{x} - \frac{[f]}{n} = +0{,}125 - 0{,}557 = -0{,}432$$

$$1000\,\mathfrak{x} = +2{,}800 \qquad \mathfrak{y} = -1{,}000$$

$$1000\,x = +2{,}692. \qquad y = -1{,}432.$$

Gleichung der geraden Linie: $O = -1{,}432 + \frac{a}{1000}\,2{,}692.$

6. Wahrscheinlichste Beobachtungsfehler v. — 7. Quadratsummen.

P_n.	$\alpha \cdot 1000\,x$	$+\ y$	$= O$.	$v = O - o$.	$d\mathfrak{o} = A \cdot 1000\,d\mathfrak{x}$.	$v = F + d\mathfrak{o}$.	FF.	vv.
P_1	0,000	− 1,432	− 1,432	− 0,332	+ 0,125	− 0,332	0,209	0,110
P_2	+ 1,919	− 1,432	+ 0,487	+ 0,727	+ 0,048	+ 0,727	0,461	0,529
P_3	+ 3,548	− 1,432	+ 2,116	− 0,834	− 0,017	− 0,834	0,667	0,696
P_4	+ 4,660	− 1,432	+ 3,228	+ 1,048	− 0,062	+ 1,048	1,232	1,098
P_5	+ 5,454	− 1,432	+ 4,022	− 0,608	− 0,094	− 0,608	0,264	0,370
	+ 15,581	− 7,160	+ 8,421	+ 0,001	0,000	+ 0,001	2,833	2,803

8. Schlufsprobe und mittlerer Fehler $\mathfrak{m}$.

$$\Sigma = -\frac{[AF]}{[AA]}\,[AF] = -\frac{0{,}286}{2{,}646}\,0{,}286 = -0{,}031.$$

$$[vv] = [FF] + \Sigma = 2{,}833 - 0{,}031 = 2{,}802.$$

$$\mathfrak{m} = m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-q}} = \pm\sqrt{\frac{2{,}802}{5-2}} = \pm 0{,}97^{\mathrm{m}}.$$

§ 40. Bestimmung der Multiplikationskonstanten eines Distanzmessers.

Behufs Bestimmung der Multiplikationskonstanten k eines Reichenbach'schen Distanzmessers, dessen Additionskonstante $a = 0{,}408^m$ ist, sind in einer nahezu horizontalen Linie 16 Punkte in Entfernungen von ungefähr 15^m bis 100^m vom Instrument scharf bezeichnet worden. Sodann ist die Entfernung D der Punkte von der Vertikalachse des Instruments durch zwei sorgfältige in verschiedener Richtung ausgeführte direkte Messungen bestimmt worden. Ferner sind die Lattenstücke λ, die die distanzmessenden Fäden auf einer in Centimeter eingeteilten auf den einzelnen Punkten lothrecht aufgestellten Nivellirlatte abschneiden, durch zwei unabhängige Beobachtungen bestimmt worden. Die durch Abzug der Additionskonstanten erhaltenen Entfernungen $D-a$, sowie die arithmetischen Mittel λ der Lattenablesungen sind:

Nr.	$D-a$.	λ.	Nr.	$D-a$.	λ.	Nr.	$D-a$.	λ.	Nr.	$D-a$.	λ.
1	14,847	0,1490	5	37,332	0,3750	9	60,057	0,6025	13	83,562	0,8395
2	20,742	0,2080	6	43,262	0,4335	10	66,312	0,6665	14	88,977	0,8940
3	26,292	0,2640	7	49,452	0,4960	11	71,012	0,7140	15	94,152	0,9480
4	31,422	0,3160	8	54,372	0,5465	12	76,872	0,7720	16	99,412	0,9995

1. Die Entfernung D ergiebt sich mit den Konstanten a und k aus den Lattenablesungen λ nach der Formel

$$D = a + k\lambda.$$

Demnach sind die Gleichungen für die Beziehungen zwischen den wahren Werthen (λ) der beobachteten Gröfsen und dem wahren Werthe (k) der zu bestimmenden Multiplikationskonstanten unter der Voraussetzung, dafs die ermittelten Werthe von D und a als die fehlerfreien wahren Werthe dieser Gröfsen angesehen werden können,:

$$(108)\quad \begin{cases} (\lambda_1) = (D_1 - a)\dfrac{1}{(k)}, \\ (\lambda_2) = (D_2 - a)\dfrac{1}{(k)}, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ (\lambda_n) = (D_n - a)\dfrac{1}{(k)}. \end{cases}$$

2. Hiernach ergeben sich die wahrscheinlichsten Werthe L der beobachteten Gröfsen und die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler v mit dem wahrscheinlichsten Werthe k der Multiplikationskonstanten nach:

$$(109)\quad \begin{cases} L_1 = (D_1 - a)\dfrac{1}{k}, \\ L_2 = (D_2 - a)\dfrac{1}{k}, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ L_n = (D_n - a)\dfrac{1}{k}; \end{cases} \qquad (110)\quad \begin{cases} v_1 = L_1 - \lambda_1 = (D_1 - a)\dfrac{1}{k} - \lambda_1, \\ v_2 = L_2 - \lambda_2 = (D_2 - a)\dfrac{1}{k} - \lambda_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ v_n = L_n - \lambda_n = (D_n - a)\dfrac{1}{k} - \lambda_n. \end{cases}$$

3. Die mittleren Fehler der Beobachtungsergebnisse λ können proportional den Entfernungen $D-a$, also zu $m = (D-a)\,\mathfrak{m}$ angenommen werden.

Wird dann als Gewichtseinheit das Gewicht eines Werthes λ für $D-a=1{,}000^m$ genommen, so sind nach Formel (**34**) die Gewichte $p=\frac{1}{(D-a)^2}$.*)

Mit diesen Gewichten folgt weiter:

$$v_1\sqrt{p_1}=\frac{1}{k}-\frac{\lambda_1}{D_1-a},$$
$$v_2\sqrt{p_2}=\frac{1}{k}-\frac{\lambda_2}{D_2-a},$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$
$$v_n\sqrt{p_n}=\frac{1}{k}-\frac{\lambda_n}{D_n-a},$$

und:

$$p_1 v_1 v_1=\frac{1}{k^2}-2\frac{1}{k}\frac{\lambda_1}{D_1-a}+\left(\frac{\lambda_1}{D_1-a}\right)^2,$$
$$p_2 v_2 v_2=\frac{1}{k^2}-2\frac{1}{k}\frac{\lambda_2}{D_2-a}+\left(\frac{\lambda_2}{D_2-a}\right)^2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$p_n v_n v_n=\frac{1}{k^2}-2\frac{1}{k}\frac{\lambda_n}{D_n-a}+\left(\frac{\lambda_n}{D_n-a}\right)^2,$$

$$[pvv]=n\frac{1}{k^2}-2\frac{1}{k}\left[\frac{\lambda}{D-a}\right]+\left[\left(\frac{\lambda}{D-a}\right)^2\right],$$

woraus sich durch Differentiation nach k ergiebt:

$$\frac{\partial[pvv]}{\partial k}=-2n\frac{1}{k^3}+2\frac{1}{k^2}\left[\frac{\lambda}{D-a}\right].$$

Wird dieser Ausdruck gleich Null gesetzt, so folgt daraus für den Werth von k, wofür die Quadratsumme der auf die Gewichtseinheit reduzirten Beobachtungsfehler ein Minimum wird, also für den wahrscheinlichsten Werth von k:

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{n}\left[\frac{\lambda}{D-a}\right].$$

Indem dieser Ausdruck für $\frac{1}{k}$ in die obigen Formeln für $v\sqrt{p}$ eingesetzt und alles addirt wird, folgt, dafs:

$$[v\sqrt{p}]=0$$

sein mufs, womit eine Probe für die richtige Berechnung von $\frac{1}{k}$ gewonnen wird.

Der mittlere Fehler $\mathfrak{m}$ der Gewichtseinheit wird erhalten nach:

$$\mathfrak{m}=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}.$$

4. Die Rechnung wird zweckmäfsig logarithmisch in der Weise durchgeführt, dafs gerechnet wird nach:

$$\log\frac{1}{k}=\frac{1}{n}\left[\log\frac{\lambda}{D-a}\right]$$

und:

$$v_1\sqrt{p_1}=\log\frac{1}{k}-\log\frac{\lambda_1}{D_1-a},$$
$$v_2\sqrt{p_2}=\log\frac{1}{k}-\log\frac{\lambda_2}{D_2-a},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$v_n\sqrt{p_n}=\log\frac{1}{k}-\log\frac{\lambda_n}{D_n-a}$$

*) Dafs die in die Rechnung eingeführten Zahlenwerthe von λ als arithmetisches Mittel aus zwei Ablesungen erhalten worden sind ist hier und im folgenden nicht weiter berücksichtigt, weil beide Ablesungen fast immer genau übereinstimmen und die zweite Ablesung kaum anders als Kontrolablesung anzusehen ist.

Werden die Zahlenwerthe von $v\sqrt{p}$ dann in Einheiten der letzten Stelle der Logarithmen von $\frac{\lambda}{D-a}$ oder $\frac{1}{k}$ angesetzt und damit die Zahlenwerthe von pvv gebildet, so wird auch der mittlere Fehler $\mathfrak{m}$ der Gewichtseinheit in Einheiten der letzten Stelle dieser Logarithmen erhalten, woraus sich $\mathfrak{m}$ in Metern nach den Tafeldifferenzen der Logarithmen oder durch Division mit $0.434\,k$ ergiebt, wo 0.434 der Modul der gemeinen Logarithmen ist. Aus dem Werthe von $\mathfrak{m}$ in Metern ergiebt sich dann weiter der Werth von $\mathfrak{m}$ in Sekunden durch Multiplikation mit $\varrho'' = 206\,000$.

Die mittleren Fehler m der Beobachtungsergebnisse λ ergeben sich nach $m = \pm\,\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p}}$ mit den Gewichten $p = \frac{1}{(D-a)^2}$ zu:

$$
\begin{aligned}
m_1 &= \pm\,(D_1 - a)\,\mathfrak{m}, \\
m_2 &= \pm\,(D_2 - a)\,\mathfrak{m}, \\
&\dots\dots\dots\dots, \\
m_n &= \pm\,(D_n - a)\,\mathfrak{m}.
\end{aligned}
$$

5. Nach den für $v\sqrt{p}$ und $\frac{1}{k}$ erhaltenen Formeln können die Werthe $\frac{\lambda}{D-a}$ als direkte gleich genaue Beobachtungsergebnisse mit dem Gewichte Eins angesehen werden, woraus der wahrscheinlichste Werth von $\frac{1}{k}$ als einfaches arithmethisches Mittel erhalten wird. Demnach kann noch gleich der mittlere Fehler $M_{\frac{1}{k}}$ von $\frac{1}{k}$ nach Formel (**55**) und (**56**) berechnet werden nach:

$$M_{\frac{1}{k}} = \pm\,\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{n}},$$

womit sich der mittlere Fehler M_k der Multiplikationskonstanten $k = k^2\left(\frac{1}{k}\right)$ nach Formel (**28**) ergiebt zu:

$$M_k = \pm\,k^2 M_{\frac{1}{k}} = \pm\,k^2\,\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{n}}.$$

Weiter ergiebt sich dann für den mittleren Fehler M_D einer mit dem benutzten Distanzmesser bestimmten Distanz $D = a + kl$ nach Formel (**33**):

$$M_D = \pm\sqrt{(lM_k)^2 + (km)^2},$$

oder da $lM_k = \pm\,lk^2\,\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{n}}$ und $m = \pm\,(D-a)\,\mathfrak{m} = \pm\,kl\mathfrak{m}$, demnach $lM_k = \pm\,km\sqrt{\frac{1}{n}}$ ist:

$$
\begin{aligned}
M_D &= \pm\sqrt{\left(km\sqrt{\frac{1}{n}}\right)^2 + (km)^2} \\
&= \pm\,mk\sqrt{1 + \frac{1}{n}}.
\end{aligned}
$$

6. Hiernach gestaltet sich die Berechnung des wahrscheinlichsten Werthes k der Multiplikationskonstanten und der mittleren Fehler wie folgt:

Nr.	Entfernungen $D-a$. m	Lattenablesungen λ. m	$log(D-a)$.	$log\ \lambda$.	$log\ \frac{\lambda}{D-a}$.	$v\sqrt{p} = log\frac{1}{k} - log\frac{1}{D-a}$.		pvv.	$m = \pm (D-a)m$. mm
1	14,847	0,1490	1.17 164	9.17 319	8.00 155	+	36	12 96	± 0,19
2	20,742	0,2080	1.31 685	9.31 806	8.00 121	+	70	49 00	± 0,26
3	26,292	0,2640	1.41 982	9.42 160	8.00 178	+	13	1 69	± 0,33
4	31,422	0,3160	1.49 724	9.49 969	8.00 245	—	54	29 16	± 0,39
5	37,332	0,3750	1.57 208	9.57 403	8.00 195	—	4	16	± 0,47
6	43,262	0,4335	1.63 611	9.63 699	8.00 088	+	103	1 06 09	± 0,54
7	49,452	0,4960	1.69 419	9.69 548	8.00 129	+	62	38 44	± 0,62
8	54,372	0,5465	1.73 538	9.73 759	8.00 221	—	30	9 00	± 0,68
9	60,057	0,6025	1.77 857	9.77 996	8.00 139	+	52	27 04	± 0,75
10	66,312	0,6665	1.82 159	9.82 380	8.00 221	—	30	9 00	± 0,83
11	71,012	0,7140	1.85 133	9.85 370	8.00 237	—	46	21 16	± 0,89
12	76,872	0,7720	1.88 577	9.88 762	8.00 185	+	6	36	± 0,96
13	83,562	0,8395	1.92 201	9.92 402	8.00 201	—	10	1 00	± 1,05
14	88,977	0,8940	1.94 928	9.95 134	8.00 206	—	15	2 25	± 1,11
15	94,152	0,9480	1.97 383	9.97 681	8.00 298	—	107	1 14 49	± 1,18
16	99,412	0,9995	1.99 744	9.99 978	8.00 234	—	43	18 49	± 1,24
	918,077	9,2240	2 313	5 866	3 053	+	3	4 40 29	

$log\frac{1}{k} = \frac{1}{n}\left[log\frac{\lambda}{D-a}\right] = 8.00\ 191.$ $\quad m = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{15}} = \pm 54,2$

$log\ k = 1.99\ 809.$ $\quad = \pm 0,000\ 012\ 5^m$

$k = 99,56.$ $\quad = \pm 2,6''.$

$$M_k = \pm l^2 m\sqrt{\frac{1}{n}} = \pm 99,62^2 . 0,000\ 012\ 5 . \sqrt{\frac{1}{16}} = \pm 0,031.$$

$$M_D = \pm m\, k\sqrt{1+\frac{1}{n}} = \pm m . 99,6 . \sqrt{1+\frac{1}{16}} = \pm 103\, m,$$

oder rund $= \pm 100\, m$.

§ 41. Bestimmung einer Distanzteilung für den Okularauszug eines Fernrohrs.

1. Bekanntlich ergiebt sich in einem Fernrohr nur dann ein völlig scharfes und bei Bewegung des Auges vor dem Okular gegen das Fadenkreuz feststehendes Bild von einem in der Entfernung D von der Objektivlinse befindlichen Objekte, wenn die Fadenkreuzebene einen Abstand d von der Objektivlinse hat, der mit der Entfernung D des Objektes von der Objektivlinse und der Brennweite f der Objektivlinse in der Beziehung steht, dafs $\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f}$ ist. Da die Brennweite f der Objektivlinse nun für jedes Fernrohr eine feststehende konstante Gröfse ist, so kann aus dem Abstande d der Fadenkreuzebene von der Objektivlinse die Entfernung D des Objektes von der Objektivlinse bestimmt werden, das Fernrohr also durch Anbringung einer entsprechenden Teilung an dem Okularkopfe zu einem Distanzmesser eingerichtet werden oder es kann umgekehrt eine solche Teilung benutzt werden, um den Okularkopf für ein in bekannter Entfernung befindliches Objekt ohne weiteres richtig einzustellen. Die Bestimmung der Teilung erfolgt in der Weise, dafs der Okularkopf zunächst mit

einer empirischen Teilung, beispielsweise einer Millimeterteilung versehen wird, dafs dann für eine Reihe verschiedener bekannter Entfernungen der Okularkopf auf ein Objekt scharf eingestellt und die Stellung des Okularkopfes durch Ablesung an der empirischen Teilung bestimmt wird, hiernach aus den so gewonnenen Beobachtungsergebnissen die wahrscheinlichsten Einstellungen für verschiedene Entfernungen berechnet und endlich nach den erhaltenen wahrscheinlichsten Werthen die Distanzteilung ausgeführt wird.

2. Bei den Ablesungen zur Bestimmung des Abstandes d der Bild- und Fadenkreuzebene BB von der Objektivlinse OO wird am einfachsten der Rand RR des Hauptrohrs als Marke genommen, so dafs durch die Ablesungen an dieser Marke ein Mafs λ für den Abstand der Bildebene BB von dem Rande RR gewonnen wird, das mit dem zu berechnenden Mafse x für den Abstand des Randes RR von der Objektivlinse OO zusammen dem Abstande d der Bildebene BB von der Objektivlinse OO gleichkommt. Führen wir demgemäfs in die Formel $\frac{1}{D}+\frac{1}{d}=\frac{1}{f}$ für d den wahren Werth (x) des zu bestimmenden Abstandes OR sowie den wahren Werth (λ) der beobachteten Gröfsen ein und bezeichnen wir den wahren Werth der Brennweite f, deren wahrscheinlichster Werth ebenfalls zu berechnen ist, mit (y), so wird:

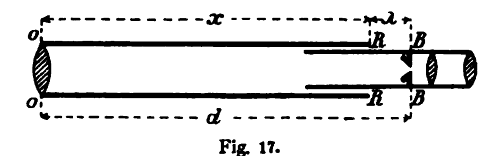


Fig. 17.

$$\frac{1}{D}+\frac{1}{(x)+(\lambda)}=\frac{1}{(y)},\text{*)}$$

woraus sich nach einigen einfachen Umformungen die folgenden Gleichungen für die Beziehungen zwischen den wahren Werthen der beobachteten Gröfsen und der zu bestimmenden Gröfsen ergeben:

$$(108)\quad \begin{cases} (\lambda_1) = -(x) + \dfrac{D_1(y)}{D_1-(y)}, \\ (\lambda_2) = -(x) + \dfrac{D_2(y)}{D_2-(y)}, \\ (\lambda_3) = -(x) + \dfrac{D_3(y)}{D_3-(y)}, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ (\lambda_n) = -(x) + \dfrac{D_n(y)}{D_n-(y)}. \end{cases}$$

3. Hieraus folgt für die Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe L_1, L_2, $L_3, \dots, L_n$ der beobachteten Gröfsen aus den wahrscheinlichsten Werthen x, y der zu bestimmenden Gröfsen, sowie für die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$:

$$(109)\quad \begin{cases} L_1 = -x + \dfrac{D_1 y}{D_1 - y}, \\ L_2 = -x + \dfrac{D_2 y}{D_2 - y}, \\ L_3 = -x + \dfrac{D_3 y}{D_3 - y}, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ L_n = -x + \dfrac{D_n y}{D_n - y}; \end{cases} \qquad (110)\quad \begin{cases} v_1 = L_1 - \lambda_1, \\ v_2 = L_2 - \lambda_2, \\ v_3 = L_3 - \lambda_3, \\ \dots\dots\dots, \\ v_n = L_n - \lambda_n. \end{cases}$$

*) Wir beschränken uns auf die Behandlung eines Fernrohrs mit Ramsden'schem Okular und bemerken, dafs für ein Fernrohr mit Huyghens'schem Okular nur die Formelentwicklung etwas weniger einfach ist, die Ausgleichungsrechnung aber dieselbe ist.

4. Die zu bestimmenden Gröfsen x, y werden zerlegt in die Näherungswerthe $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und in die diesen beizufügenden kleinen Aenderungen $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, so dafs ist:

$$
\textbf{(111)} \qquad \begin{cases} x = \mathfrak{x} + d\mathfrak{x}, \\ y = \mathfrak{y} + d\mathfrak{y}. \end{cases}
$$

Aus der Formel $\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f}$ wird für ein sehr weit entferntes Objekt, wofür $D = \infty$, also $\frac{1}{D} = 0$ gesetzt werden kann,: $\frac{1}{d} = \frac{1}{f}$ oder $d = f$. Wenn wir daher den Okularkopf für ein sehr weit entferntes Objekt richtig einstellen, so erhalten wir durch Abmessung der Entfernung der Objektivlinse von der Fadenkreuzebene ein Mafs für die Brennweite f, das ein genügender Näherungswerth $\mathfrak{y}$ ist. Da nun weiter $x + \lambda = y$ ist, so erhalten wir auch einen genügenden Näherungswerth $\mathfrak{x}$, indem wir für die bezeichnete Einstellung des Okularkopfes den entsprechenden Werth von λ an der Teilung des Okularkopfes ablesen und von $\mathfrak{y}$ subtrahiren.

5. Werden die nach (**111**) für x, y gesetzten Werthe in die Gleichungen (**109**) eingesetzt und die dadurch entstehenden Ausdrücke für die wahrscheinlichsten Werthe L zerlegt nach $F(\mathfrak{x} + d\mathfrak{x}, \mathfrak{y} + d\mathfrak{y}) = F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{x}} d\mathfrak{x} + \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{y}} d\mathfrak{y}$, so ergeben sich zunächst die Differenzialquotienten $a = \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{x}}$, $b = \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{y}}$ zu:

$$
\textbf{(114)} \qquad \begin{cases}
a_1 = -1, & b_1 = \dfrac{(D_1 - \mathfrak{y}) D_1 + D_1 \mathfrak{y}}{(D_1 - \mathfrak{y})^2} = \left(\dfrac{D_1}{D_1 - \mathfrak{y}}\right)^2, \\
a_2 = -1, & b_2 = \left(\dfrac{D_2}{D_2 - \mathfrak{y}}\right)^2, \\
a_3 = -1, & b_3 = \left(\dfrac{D_3}{D_3 - \mathfrak{y}}\right)^2, \\
\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\
a_n = -1, & b_n = \left(\dfrac{D_n}{D_n - \mathfrak{y}}\right)^2,
\end{cases}
$$

während sich für die Näherungswerthe $\mathfrak{l} = F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der beobachteten Gröfsen ergiebt:

$$
\textbf{(112)} \qquad \begin{cases}
\mathfrak{l}_1 = -\mathfrak{x} + \dfrac{D_1 \mathfrak{y}}{D_1 - \mathfrak{y}}, \\
\mathfrak{l}_2 = -\mathfrak{x} + \dfrac{D_2 \mathfrak{y}}{D_2 - \mathfrak{y}}, \\
\mathfrak{l}_3 = -\mathfrak{x} + \dfrac{D_3 \mathfrak{y}}{D_3 - \mathfrak{y}}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\mathfrak{l}_n = -\mathfrak{x} + \dfrac{D_n \mathfrak{y}}{D_n - \mathfrak{y}},
\end{cases}
$$

woraus die wahrscheinlichsten Werthe L der beobachteten Gröfsen durch Beifügung der den Aenderungen $d\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{y}$ entsprechenden Aenderungen $d\mathfrak{l}$ erhalten werden nach:

$$
\textbf{(113)} \qquad \begin{cases}
L_1 = \mathfrak{l}_1 + d\mathfrak{l}_1, \\
L_2 = \mathfrak{l}_2 + d\mathfrak{l}_2, \\
L_3 = \mathfrak{l}_3 + d\mathfrak{l}_3, \\
\dots\dots\dots\dots, \\
L_n = \mathfrak{l}_n + d\mathfrak{l}_n.
\end{cases}
$$

Die Abweichungen f zwischen den Näherungswerthen $\mathfrak{l}$ der beobachteten Gröfsen und den Beobachtungsergebnissen λ werden erhalten nach:

$$(115) \quad \begin{cases} f_1 = \mathfrak{l}_1 - \lambda_1, \\ f_2 = \mathfrak{l}_2 - \lambda_2, \\ f_3 = \mathfrak{l}_3 - \lambda_3, \\ \dots\dots\dots, \\ f_n = \mathfrak{l}_n - \lambda_n. \end{cases}$$

Hiermit ergeben sich die folgenden umgeformten Fehlergleichungen:

$$(116) \quad \begin{cases} d\mathfrak{l}_1 = -d\mathfrak{x} + b_1\, d\mathfrak{y}, \\ d\mathfrak{l}_2 = -d\mathfrak{x} + b_2\, d\mathfrak{y}, \\ d\mathfrak{l}_3 = -d\mathfrak{x} + b_3\, d\mathfrak{y}, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ d\mathfrak{l}_n = -d\mathfrak{x} + b_n\, d\mathfrak{y}. \end{cases} \qquad (117) \quad \begin{cases} v_1 = f_1 + d\mathfrak{l}_1, \\ v_2 = f_2 + d\mathfrak{l}_2, \\ v_3 = f_3 + d\mathfrak{l}_3, \\ \dots\dots\dots, \\ v_n = f_n + d\mathfrak{l}_n. \end{cases}$$

6. Die Gewichte der Beobachtungsergebnisse nehmen wir sämtlich gleich Eins, wonach die umgeformten Fehlergleichungen reduzirt werden können auf:

$$(134) \quad \begin{cases} \mathfrak{v}_1 = f_1 + b_1\, d\mathfrak{y}, & \text{Gewicht} = 1, \\ \mathfrak{v}_2 = f_2 + b_2\, d\mathfrak{y}, & \quad " \quad = 1, \\ \mathfrak{v}_3 = f_3 + b_3\, d\mathfrak{y}, & \quad " \quad = 1; \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ \mathfrak{v}_n = f_n + b_n\, d\mathfrak{y}, & \quad " \quad = 1, \\ \mathfrak{v}_{n+1} = [f] + [b]\, d\mathfrak{y}, & \quad " \quad = -\frac{1}{n}. \end{cases}$$

Aus diesen reduzirten Fehlergleichungen ergiebt sich, indem

$$\mathfrak{B}_2 = [bb] - \frac{[b]}{n}[b], \qquad \mathfrak{F}_2 = [bf] - \frac{[b]}{n}[f],$$

gesetzt wird, die reduzirte Endgleichung:

$$\mathfrak{B}_2\, d\mathfrak{y} + \mathfrak{F}_2 = 0,$$

wonach

$$d\mathfrak{y} = -\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2},$$

und weiter nach Formel (**137**)

$$d\mathfrak{x} = +\frac{[b]}{n}\, d\mathfrak{y} + \frac{[f]}{n}$$

ist.

Die Rechenproben ergeben sich hier dadurch, dafs nach den Formeln (**127**) und (**129**)

$$[vv] = \left([ff] - \frac{[f]}{n}[f]\right) - \frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 = [ff] - [f]\, d\mathfrak{x} + [bf]\, d\mathfrak{y}$$

und dafs nach den Formeln (**140**)

$$[v] = 0 \text{ und } [bv] = 0$$

sein mufs.

7. Der mittlere Fehler m der Gewichtseinheit wird erhalten nach

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-q}} = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-2}}.$$

Wenn, wie im vorliegenden Falle, das Gewicht der in die Rechnung eingeführten Beobachtungsergebnisse λ als Gewichtseinheit genommen worden ist, und diese Beobachtungsergebnisse λ als einfaches arithmetisches Mittel aus r

Lattenablesungen gewonnen sind, so ist das Gewicht einer Lattenablesung $\mathfrak{p}_1 = \frac{1}{r}$ und demnach der mittlere Fehler einer Lattenablesung

$$\mathfrak{m}_1 = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{\mathfrak{p}_1}} = \pm \mathfrak{m} \sqrt{r}.$$

8. Die Zahlenrechnung wird wesentlich vereinfacht, wenn an Stelle der oben entwickelten Formeln andere Formeln benutzt werden, die sich wie folgt ergeben:

An Stelle der Differenzialquotienten $b = \left(\frac{D}{D - \mathfrak{y}}\right)^2$, deren Zahlenwerthe wenig von Eins verschieden sind, wird gerechnet mit:

$$(b-1) = \left(\frac{D}{D-\mathfrak{y}}\right)^2 - 1 = \left(1 + \frac{\mathfrak{y}}{D-\mathfrak{y}}\right)^2 - 1 = 2\frac{\mathfrak{y}}{D-\mathfrak{y}} + \left(\frac{\mathfrak{y}}{D-\mathfrak{y}}\right)^2.$$

Mit den Zahlenwerthen von $b - 1$ werden ohne weiteres in gewöhnlicher Weise der Faktor $\mathfrak{B}_2 = [bb] - \frac{[b]}{n}[b]$ und das Absolutglied $\mathfrak{F}_2 = [bf] - \frac{[b]}{n}[f]$ der reduzirten Endgleichungen erhalten, denn es ist:

$$\begin{aligned}
[p(b-1)(b-1)] &= [(b-1)(b-1)] - \frac{[b-1]}{n}[b-1] \\
&= [1 - 2b + bb] - \frac{[b]-n}{n}([b]-n) \\
&= n - 2[b] + [bb] - \left(\frac{[b]}{n} - 1\right)([b]-n) \\
&= n - 2[b] + [bb] - \frac{[b]}{n}[b] + [b] + [b] - n \\
&= [bb] - \frac{[b]}{n}[b] = \mathfrak{B}_2,
\end{aligned}$$

und ferner:

$$\begin{aligned}
[p(b-1)f] &= [(b-1)f] - \frac{[b-1]}{n}[f] \\
&= [bf] - [f] - \frac{[b]-n}{n}[f] \\
&= [bf] - \frac{[b]}{n}[f] = \mathfrak{F}_2.
\end{aligned}$$

Weiter ergiebt sich für die Näherungswerthe $\mathfrak{l}$ der beobachteten Gröfsen:

$$\mathfrak{l} = -\mathfrak{x} + \frac{D\mathfrak{y}}{D-\mathfrak{y}} = -\mathfrak{x} + \left(\mathfrak{y} + \frac{\mathfrak{y}^2}{D-\mathfrak{y}}\right) = (\mathfrak{y} - \mathfrak{x}) + \frac{\mathfrak{y}^2}{D-\mathfrak{y}}.$$

und ebenso für die wahrscheinlichsten Werthe L der beobachteten Gröfsen:

$$L = -x + \frac{Dy}{D-y} = (y-x) + \frac{y^2}{D-y}.$$

Endlich ergeben sich mit den Zahlenwerthen von $b - 1$ die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler v nach:

$$\begin{aligned}
v = f - dl &= f - d\mathfrak{x} + b\,d\mathfrak{y} \\
&= f - d\mathfrak{x} + d\mathfrak{y} + (b-1)\,d\mathfrak{y} \\
&= f + (d\mathfrak{y} - d\mathfrak{x}) + (b-1)\,d\mathfrak{y}.
\end{aligned}$$

9. Hiernach gestaltet sich die Rechnung in einem Falle, wo die in Abtheilung 1 der folgenden Tabelle mitgetheilten Beobachtungsergebnisse erlangt sind, wie folgt:

1. Beobachtungsergebnisse.

Nr.	Entfernung D.	Ablesungen I.	II.	III.	IV.	Mittel λ.	Abweichungen v vom Mittel λ—I.	λ—II.	λ—III.	λ—IV.	$[v]$.	$[vv]$.
	m	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	
1	5	26,2	25,6	26,2	25,9	25,98	— 0,22	+ 0,38	— 0,22	+ 0,08	+ 0,02	0,248
2	10	17,9	18,1	17,5	17,5	17,75	— 0,15	— 0,35	+ 0,25	+ 0,25	0,00	0,270
3	15	14,6	15,0	14,9	14,9	14,85	+ 0,25	— 0,15	— 0,05	— 0,05	0,00	0,090
4	20	13,5	14,0	13,3	13,9	13,68	+ 0,18	— 0,32	+ 0,38	— 0,22	+ 0,02	0,328
5	30	12,2	12,1	12,1	12,2	12,15	— 0,05	+ 0,05	+ 0,05	— 0,05	0,00	0,010
6	40	11,9	11,8	11,9	11,5	11,78	— 0,12	— 0,02	— 0,12	+ 0,28	+ 0,02	0,108
7	50	11,6	11,3	11,5	11,2	11,40	— 0,20	+ 0,10	— 0,10	+ 0,20	0,00	0,100
8	60	11,4	11,2	11,1	11,2	11,22	— 0,18	+ 0,02	+ 0,12	+ 0,02	— 0,02	0,048
9	80	11,1	11,0	10,9	10,9	10,98	— 0,12	— 0,02	+ 0,08	+ 0,08	+ 0,02	0,028
10	100	10,9	10,9	10,7	10,7	10,80	— 0,10	— 0,10	+ 0,10	+ 0,10	0,00	0,040
11	120	10,8	10,7	10,6	10,6	10,68	— 0,12	— 0,02	+ 0,08	+ 0,08	+ 0,02	0,028
						151,27						1,298

$$m_1 = \pm\sqrt{\frac{1,298}{33}} = \pm\, 0,20^{\text{mm}}.$$

2. Näherungswerthe $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$.

Die Brennweite ist durch Abmessung am Fernrohr genähert bestimmt zu 267^{mm} und das zugehörige λ ist $= 11^{\text{mm}}$, so dafs genommen werden kann:

$$\mathfrak{y} = 270^{\text{mm}}, \qquad \mathfrak{x} = 270 - 10 = 260^{\text{mm}}.$$

3. Berechnung der Differenzialquotienten b. — 4. Abweichungen f.

Nr.	D.	$D-\mathfrak{y}$.	$\frac{\mathfrak{y}}{D-\mathfrak{y}}$.	$\left(\frac{\mathfrak{y}}{D-\mathfrak{y}}\right)^2$.	$b-1 = 2\frac{\mathfrak{y}}{D-\mathfrak{y}} + \left(\frac{\mathfrak{y}}{D-\mathfrak{y}}\right)^2$.	$\mathfrak{l} = 10 + \frac{\mathfrak{y}^2}{D-\mathfrak{y}}$.	λ.	$f = \mathfrak{l} - \lambda$.
	mm	mm				mm	mm	mm
1	5 000	4 730	0,057 08	0,003 26	0,117 42	25,41	25,98	— 0,57
2	10 000	9 730	0,027 75	0,000 77	0,056 27	17,49	17,75	— 0,26
3	15 000	14 730	0,018 33	0,000 34	0,037 00	14,95	14,85	+ 0,10
4	20 000	19 730	0,013 68	0,000 19	0,027 55	13,69	13,68	+ 0,01
5	30 000	29 730	0,009 08	0,000 08	0,018 24	12,45	12,15	+ 0,30
6	40 000	39 730	0,006 80	0,000 05	0,013 65	11,84	11,78	+ 0,06
7	50 000	49 730	0,005 43	0,000 03	0,010 89	11,47	11,40	+ 0,07
8	60 000	59 730	0,004 52	0,000 02	0,009 06	11,22	11,22	0,00
9	80 000	79 730	0,003 39	0,000 01	0,006 79	10,92	10,98	— 0,06
10	100 000	99 730	0,002 71	0,000 01	0,005 43	10,73	10,80	— 0,07
11	120 000	119 730	0,002 26	0,000 01	0,004 53	10,61	10,68	— 0,07
			0,151 03	0,004 77	0,306 83	0,78	1,27	— 0,49
				0,302 06				
				0,306 83				

5. Bildung der Faktoren u. s. w. der Endgleichungen.

Nr.	p.	$b-1$.	f.	$p(b-1)^2$.	$p(b-1)f$.	pff.
1	1	+0,117 42	−0,57	+0,013 79	−0,066 93	+0,325
2	1	0,056 27	−0,26	+0,003 17	−0,014 63	+0,068
3	1	0,037 00	+0,10	+0,001 37	+0,003 70	+0,010
4	1	0,027 55	+0,01	+0,000 76	+0,000 28	+0,000
5	1	0,018 24	+0,30	+0,000 33	+0,005 47	+0,090
6	1	0,013 65	+0,06	+0,000 19	+0,000 82	+0,004
7	1	0,010 89	+0,07	+0,000 12	+0,000 76	+0,005
8	1	0,009 06	0,00	+0,000 08	0,000 00	+0,000
9	1	0,006 79	−0,06	+0,000 05	−0,000 41	+0,004
10	1	0,005 43	−0,07	+0,000 03	−0,000 38	+0,005
11	1	0,004 53	−0,07	+0,000 02	−0,000 32	+0,005
12	$-\frac{1}{11}$	0,306 83	−0,49	−0,008 56	+0,013 67	−0,022
				+0,011 35 $=\mathfrak{B}_2$	−0,057 97 $=\mathfrak{F}_2$	+0,494 $=[ff]-\frac{[f]}{n}[f]$

6. Wahrscheinlichste Werthe x, y.

$d\mathfrak{y} = -\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$	+5,11
$\mathfrak{y}$	270,00
$y = \mathfrak{y} + d\mathfrak{y}$	275,11
$+\frac{[b]}{n}d\mathfrak{y}$	+5,25
$+\frac{[f]}{n}$	−0,04
$d\mathfrak{x}$	+5,21
$\mathfrak{x}$	260,00
$x = \mathfrak{x} + d\mathfrak{x}$	265,21

7. Proben.

$[ff]-\frac{[f]}{n}[f]$	+0,494
$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	−0,296
$[vv]$	0,198
$[ff]$	+0,516
$-[f]d\mathfrak{x}$	+2,553
$+[(b-1)f]d\mathfrak{y}$	−0,366
$+[f]d\mathfrak{y}$	−2,504
$[vv]$	0,199

8. Wahrscheinlichste Beobachtungsfehler v.

Nr.	$D-y$.	$L=9{,}90+\frac{y^2}{D-y}$.	$v=L-\lambda$.	$f-0{,}10+(b-1)d\mathfrak{y}=v$.			vv.
1	4 725	25,92	−0,06	−0,67	+0,60	−0,07	0,005
2	9 725	17,68	−0,07	−0,36	+0,29	−0,07	0,005
3	14 725	15,04	+0,19	+0,00	+0,19	+0,19	0,036
4	19 725	13,74	+0,06	−0,09	+0,14	+0,05	0,002
5	29 725	12,45	+0,30	+0,20	+0,09	+0,29	0,084
6	39 725	11,81	+0,03	−0,04	+0,07	+0,03	0,001
7	49 725	11,42	+0,02	−0,03	+0,06	+0,03	0,001
8	59 725	11,17	−0,05	−0,10	+0,05	−0,05	0,002
9	79 725	10,85	−0,13	−0,16	+0,03	−0,13	0,017
10	99 725	10,66	−0,14	−0,17	+0,03	−0,14	0,020
11	119 725	10,53	−0,15	−0,17	+0,02	−0,15	0,022
		1,27	0,00	−1,59	+1,57	−0,02	0,195

9. Mittlere Fehler.

$$\mathfrak{m} = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-q}} = \pm\sqrt{\frac{0{,}195}{11-2}} = \pm 0{,}15\,\text{mm},$$

$$\mathfrak{m}_1 = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{\mathfrak{p}_1}} = \pm 0{,}15\sqrt{\frac{1}{0{,}25}} = \pm 0{,}30\,\text{mm}.$$

V. Abschnitt.

Bedingte Beobachtungen.

1. Kapitel. Allgemeine Entwicklung des Verfahrens.

§ 42. Einleitung.

Im III. Abschnitte haben wir uns bereits mit bedingten Beobachtungen beschäftigt. Die dort gewonnenen Formeln sind anwendbar in dem einfachen Falle, wo nur die eine Bedingung vorliegt, dafs die Summe der direkt beobachteten Gröfsen einen bestimmten Sollbetrag erfüllen mufs. Es kommen nun aber vielfach Fälle vor, wo die direkt beobachteten Gröfsen mehr als eine Bedingung erfüllen müssen und wo die Bedingungen auch nicht so einfach sind, wie in dem besonders behandelten Falle. Nach unserm im § 13 aufgestellten ersten Grundsatze, die gesuchten Gröfsen als einheitliches Endergebnis aus sämtlichen vorliegenden Bestimmungen zu gewinnen, müssen wir daher für diese Fälle ein weiteres Rechnungsverfahren aufstellen, wonach wir solche Werthe der beobachteten Gröfsen finden können, die gleichzeitig allen Bedingungen genügen und zwar auch dann, wenn die Bedingungen nicht mehr ganz einfacher Art sind. Diese Werthe der beobachteten Gröfsen müssen dann weiter auch unserm im § 13 aufgestellten zweiten Grundsatze entsprechen, dafs zugleich die Quadratsumme der sich ergebenden, auf die Gewichtseinheit zurückgeführten wahrscheinlichsten Werthe der Beobachtungsfehler ein Minimum wird.

Beispiel 1: Auf den Punkten P_a, P_b, P_c, P_d sind sämtliche Winkel direkt und unabhängig von einander mit gleicher Genauigkeit beobachtet worden. Das Ergebnis dieser Beobachtungen ist:

Standpunkt P_a.	Standpunkt P_b.
$\angle P_b P_c$: 39° 48′ 55″,	$\angle P_c P_d$: 52° 04′ 30″,
$\angle P_c P_d$: 33 37 34 ,	$\angle P_d P_a$: 58 52 04 ,
$\angle P_d P_b$: 286 33 15 .	$\angle P_a P_c$: 249 03 13 ,
Standpunkt P_c.	**Standpunkt P_d.**
$\angle P_d P_a$: 34° 04′ 07″,	$\angle P_a P_b$: 47° 41′ 12″,
$\angle P_a P_b$: 29 14 02 ,	$\angle P_b P_c$: 64 37 15 ,
$\angle P_b P_d$: 296 42 15 .	$\angle P_c P_a$: 247 41 14 .

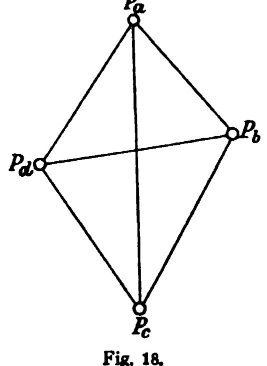


Fig. 18.

Die beobachteten Winkel sollen die Bedingungen erfüllen,

1. dafs auf jedem der 4 Punkte P_a, P_b, P_c, P_d die Summe der Winkel gleich 360° ist,
2. dafs in jedem Dreieck oder Viereck die Summe der Winkel gleich 180° oder 360° ist,
3. dafs die Dreiecksseitenberechnung ohne Fehler abschliefst, wenn dabei von einer der Seiten ausgegangen und auf dieselbe Seite abgeschlossen wird.

Demgemäfs haben wir nun die wahrscheinlichsten Werthe der beobachteten Winkel so zu bestimmen, dafs allen diesen Bedingungen genügt und dafs zugleich die Quadratsumme der wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler ein Minimum wird.

§ 43. Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen.

Bei Anwendung des Rechnungsverfahrens für die Ausgleichung bedingter Beobachtungen werden uns in der Regel die zu erfüllenden Bedingungen nicht von vornherein bekannt sein. Auch wird meistens nicht ohne weiteres angegeben werden können, wie viele und welche Bedingungen zu erfüllen sind. Wir müssen dies aber bei Beginn unserer Arbeit in erster Linie feststellen, da wir sonst sogleich Fehler begehen können, indem wir zu wenig oder zu viel, oder indem wir überflüssige Bedingungen aufstellen, dagegen aber nothwendig zu erfüllende Bedingungen aufser Acht lassen.

Für die Feststellung der Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen gelangen wir zu einer allgemeinen Regel wie folgt: Die Beobachtungsergebnisse, die wir als bedingte Beobachtungen behandeln, liefern in erster Linie direkte Bestimmungen der beobachteten Gröfsen, in zweiter Linie Bestimmungen für andere gesuchte Gröfsen, die aus den beobachteten Gröfsen abzuleiten sind. Die beobachteten Gröfsen sind entweder unabhängig von einander, oder sie sind abhängig von einander, so dafs sie in einem bestimmten mathematischen Zusammenhange stehen. Wenn die Anzahl der von einander unabhängigen Gröfsen, wofür Beobachtungsergebnisse vorliegen, gleich der Anzahl der gesuchten Gröfsen ist, so wird nur eine einfache nicht versicherte Bestimmung der gesuchten Gröfsen erreicht und demnach sind dann auch keine Bedingungen zu erfüllen. Erst wenn noch Beobachtungsergebnisse für weitere Gröfsen hinzutreten, die überschüssige Bestimmungen liefern, ergeben sich aus dem Zusammenhange der beobachteten Gröfsen unter sich und aus dem Zusammenhange der andern gesuchten und der beobachteten Gröfsen Zwangsbedingungen für die beobachteten Gröfsen, und zwar ergiebt sich aus jeder überschüssigen Bestimmung eine zu erfüllende Bedingung. Hiernach gelangen wir zu der allgemeinen Regel:

(147). Die Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen ist gleich der Anzahl der vorliegenden überschüssigen Bestimmungen der beobachteten und der andern gesuchten Gröfsen.

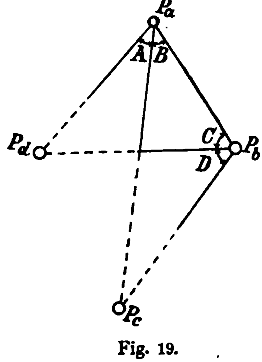


Fig. 19.

Beispiel 1: Die mitgeteilten 12 Winkel sind beobachtet zur Bestimmung der gegenseitigen Lage der 4 Punkte P_a, P_b, P_c, P_d. Zur einfachen nicht versicherten Bestimmung der Punkte genügen 4 von einander unabhängige Winkel, beispielsweise die in Figur 19 mit A, B, C und D bezeichneten Winkel. Jeder der übrigen 8 Winkel liefert eine weitere überschüssige Bestimmung für die Lage der Punkte und damit auch eine zu erfüllende Bedingung.

§ 44. Aufsuchung der zu erfüllenden Bedingungen.

1. Nach Bestimmung der Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen sind die Bedingungen selbst festzustellen. Meistens können mehr Bedingungen aufgestellt werden, als nothwendig sind. Dann kommt es darauf an, unter den überhaupt möglichen Bedingungen die richtigen und die besten auszuwählen.

Für die Auswahl der richtigen Bedingungen ist als Richtschnur der Grundsatz festzuhalten:

(148). Die zu erfüllenden Bedingungen müssen von einander

unabhängig sein, so dafs ein und dieselbe Bedingung nicht mehrfach in verschiedener Form vorkommen kann.

(149). Die diesem Grundsatze entsprechenden Bedingungen können wir in jedem Falle feststellen, indem wir zuerst die beobachteten Gröfsen auswählen, die zur einfachen nicht versicherten Bestimmung der gesuchten Gröfsen nothwendig sind, und indem wir dann für jede der übrigen beobachteten Gröfsen nacheinander feststellen, welche unabhängige Bedingung durch Hinzutritt derselben zu den bereits betrachteten beobachteten Gröfsen entsteht.

2. Bei diesem Verfahren werden sich in manchen Fällen verschiedene Bedingungen ergeben, je nach der Auswahl der beobachteten Gröfsen, die die einfache nicht versicherte Bestimmung der gesuchten Gröfsen liefern sollen. Diese verschiedenen Bedingungen können in Bezug auf das zu erreichende Endergebnis mehr oder minder gut sein, indem sie die zu stellenden Forderungen mehr oder minder zuverlässig zum Ausdruck bringen. Die besten Bedingungen werden dann gefunden, wenn die Bedingungen aufgestellt werden für die beobachteten Gröfsen, die die günstigsten Bestimmungen der gesuchten Gröfsen liefern; denn die Elemente, die die zuverlässigsten Werthe der gesuchten Gröfsen liefern werden auch den zuverlässigsten Ausdruck für die zu erfüllenden Bedingungen liefern.*)

Beispiel 1: Nehmen wir wieder die Winkel A, B, C, D als die Winkel, die uns die einfache nicht versicherte Bestimmung der gegenseitigen Lage der Punkte P_a, P_b, P_c, P_d liefern, so erhalten wir durch Hinzutritt

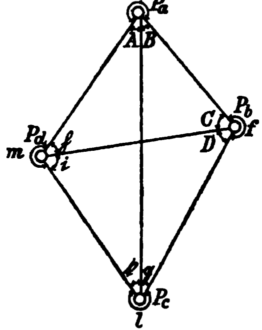


Fig. 20.

1. des Winkels e die Bedingung, dafs die Summe der Winkel auf P_a gleich 360° sein mufs,
2. des Winkels f dieselbe Bedingung für Punkt P_b,
3. des Winkels $\mathfrak{g}$ die Bedingung, dafs die Summe der Winkel im Dreieck $P_a P_b P_c$ gleich 180° sein mufs,
4. des Winkels $\mathfrak{h}$ dieselbe Bedingung für Dreieck $P_a P_b P_d$;

   ferner erhalten wir durch Hinzutritt der beiden Winkel $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{k}$
5. dieselbe Bedingung wie zu 3 für Dreieck $P_a P_c P_d$ und
6. die Bedingung, dafs im Dreieck $P_a P_c P_d$ die aus der Seite $P_a P_b$ berechneten Seiten $P_a P_c$ und $P_a P_d$ sich verhalten müssen wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel,
7. des Winkels l dieselbe Bedingung wie zu 1 für Punkt P_c,
8. des Winkels m dieselbe Bedingung wie zu 1 für Punkt P_d.

3. Zu diesen 8 Bedingungen können wir auch ohne Benutzung der aufgestellten allgemeinen Regeln in folgender, aber weniger einfacher und sicherer Weise gelangen:

Für die beobachteten Winkel können im Ganzen 16 verschiedene Bedingungen aufgestellt werden, nämlich:

a) die 4 Bedingungen, dafs die Summe der Winkel in jedem der 4 Dreiecke $P_a P_b P_c$, $P_a P_c P_d$, $P_a P_b P_d$, $P_b P_c P_d$ gleich 180° sein mufs,

b) die 4 Bedingungen, dafs die Summe der Winkel auf jedem der 4 Punkte P_a, P_b, P_c, P_d gleich 360° sein mufs,

*) Vergleiche § 56, Nr. 4.

c) die 2 Bedingungen, dafs die Summe der Innenwinkel und die Summe der Aufsenwinkel des Vierecks $P_a P_b P_c P_d$ gleich 360° bezw. 1080° sein mufs,

d) die 6 Bedingungen, dafs wenn wir von einer der 6 Seiten oder Diagonalen ausgehend dieselbe Seite oder Diagonale aus den anschliefsenden Dreiecken berechnen, die Berechnung ohne Fehler abschliefsen mufs.

Diese 16 Bedingungen sind aber nicht unabhängig von einander und ein Teil derselben ist überflüssig, was sich wie folgt ergiebt:

Durch Erfüllung zweier der unter *a* angeführten 4 Bedingungen, dafs die Summe der Winkel in den vorhandenen Dreiecken 180° sein mufs, für 2 an einer Diagonale liegende Dreiecke, z. B. für die Dreiecke $P_a P_b P_c$ und $P_a P_c P_d$, wird auch die eine der unter c angeführten 2 Bedingungen erfüllt, dafs die Summe der Innenwinkel des Vierecks $P_a P_b P_c P_d$ gleich 360° sein mufs, da die Winkel der beiden Dreiecke die Innenwinkel des Vierecks bilden.

Sodann wird durch Erfüllung einer weitern der unter a angeführten 4 Bedingungen auch die letzte erfüllt; denn wenn in einem dritten Dreieck, z. B. im Dreieck $P_a P_b P_d$, die Summe der Winkel 180° wird, mufs, nachdem die Erfüllung der Bedingung sichergestellt ist, dafs die Summe der Winkel in dem Viereck $P_a P_b P_c P_d$ gleich 360° wird, auch die Summe der Winkel in dem vierten Dreieck $P_b P_c P_d$ gleich 180° werden.

Ferner wird durch die Erfüllung der unter b angeführten 4 Bedingungen, dafs die Summe der auf einem jedem Punkte beobachteten Winkel gleich 360° sein mufs auch die zweite der unter c aufgestellten Bedingungen erfüllt, dafs die Summe der Aufsenwinkel des Vierecks gleich 1080° sein mufs; denn wenn es sichergestellt ist, dafs die Summe der Innenwinkel des Vierecks gleich 360° wird, und die Summe der Winkel auf jedem Punkte ebenfalls 360° wird, mufs auch die Summe der Aufsenwinkel $4 \cdot 360° - 360° = 1080°$ werden.

Endlich werden durch Erfüllung einer der unter d angeführten 6 Bedingungen auch die übrigen 5 Bedingungen erfüllt; denn durch Erfüllung der einen Bedingung werden die Dreiecksseiten in dreien von den vorhandenen 4 Dreiecken einheitlich festgestellt und in den betreffenden 3 Dreiecken sind die sämtlichen überhaupt vorhandenen Dreiecksseiten enthalten, so dafs diese also sämtlich nach der einen Bedingung einheitlich erhalten werden.

Von den 16 überhaupt möglichen Bedingungen fallen also als überflüssig und in den übrigen Bedingungen mit enthalten aus:

eine von den unter a angeführten, die
zwei unter c angeführten und
fünf von den unter d angeführten, im

ganzen also 8, so dafs 8 nothwendig zu erfüllende Bedingungen übrig bleiben, die mit den vorher von uns unter 1 bis 8 bezeichneten übereinstimmen.

§ 45. Aufstellung der Bedingungsgleichungen.

1. Nachdem festgestellt ist, wie viele und welche Bedingungen zu erfüllen sind, müssen diese Bedingungen durch Gleichungen ausgedrückt werden. Da wir es nun aber im folgenden in der Regel mit einer gröfsern Anzahl beobachteter Gröfsen zu thun haben werden, so führen wir für die in diesen Gleichungen und in den weitern Entwicklungen häufig vorkommenden Gröfsen statt der bisher angewendeten Bezeichnungen einfachere ein, die uns den Ueberblick erleichtern. Wir bezeichnen mit:

I, II, III, IV, ... die wahrscheinlichsten Werthe der beobachteten Gröfsen,
1, 2, 3, 4, ... die vorliegenden Beobachtungsergebnisse,
(1), (2), (3), (4), ... die Verbesserungen, die wir den Beobachtungsergebnissen 1, 2, 3, 4, ... beilegen müssen, um ihre wahrscheinlichsten Werthe I, II, III, IV, ... zu erhalten.

2. Die Gleichungen, durch die die zu erfüllenden Bedingungen ausgedrückt werden müssen, werden zweckmäfsig in der Form angesetzt, dafs bestimmte aus den Bedingungen sich ergebende Funktionen der wahrscheinlichsten Werthe der beobachteten Gröfsen gleich den Sollbeträgen S_a, S_b, S_c, ... gesetzt werden, die sie erfüllen müssen, wonach wir allgemein erhalten:

$$\textbf{(150)} \quad \begin{cases} F_a\,(\mathrm{I, II, III, IV}, \ldots) = S_a, \\ F_b\,(\mathrm{I, II, III, IV}, \ldots) = S_b, \\ F_c\,(\mathrm{I, II, III, IV}, \ldots) = S_c, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Wir bezeichnen diese Gleichungen als Bedingungsgleichungen.

Die Anzahl der Bedingungsgleichungen ist immer gleich der Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen und somit nach § 43 auch immer gleich der Anzahl der vorliegenden überschüssigen Bestimmungen der gesuchten Gröfsen oder der vorliegenden überschüssigen Beobachtungsergebnisse. Demnach ist die Anzahl q der zuerst zu suchenden wahrscheinlichsten Werthe I, II, III, IV, ... der beobachteten Gröfsen immer gröfser als die Anzahl r der Bedingungsgleichungen.

Beispiel 1: Wir nummeriren die vorliegenden Beobachtungsergebnisse nach der unter Nr. 1 eingeführten Bezeichnung fortlaufend mit 1, 2, 3, ... 12 und schreiben diese Nummern als Bezeichnung der betreffenden Winkel in unsere Figur ein zum Anhalt für die Aufstellung der Bedingungsgleichungen.

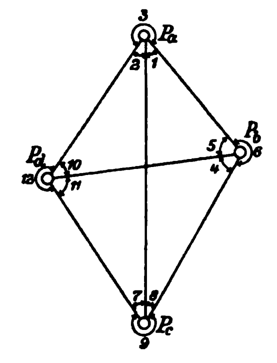


Fig. 21.

Dann erhalten wir nach den im § 44 unter 1 bis 8 aufgestellten Bedingungen, für die wahrscheinlichsten Werthe I, II, III, ... XII der beobachteten Winkel die folgenden Bedingungsgleichungen:

a) nach den Bedingungen unter Nr. 1, 2, 7, 8, dafs die Summe der Winkel auf den Punkten P_a, P_b, P_c, P_d die Sollbeträge $S_a = S_b = S_c = S_d = 360°$ erfüllen mufs:

$$\begin{aligned} \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} &= 360°, \\ \mathrm{IV} + \mathrm{V} + \mathrm{VI} &= 360°, \\ \mathrm{VII} + \mathrm{VIII} + \mathrm{IX} &= 360°, \\ \mathrm{X} + \mathrm{XI} + \mathrm{XII} &= 360°, \end{aligned}$$

b) nach den Bedingungen unter 3, 4, 5, dafs die Summe der Winkel in den Dreiecken $P_a P_b P_c$, $P_a P_c P_d$, $P_a P_b P_d$ die Sollbeträge $S_e = S_g = S_h = 180°$ erfüllen mufs:

$$\begin{aligned} \mathrm{I} + \mathrm{IV} + \mathrm{V} + \mathrm{VIII} &= 180°, \\ \mathrm{II} + \mathrm{VII} + \mathrm{X} + \mathrm{XI} &= 180°, \\ \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{V} + \mathrm{X} &= 180°, \end{aligned}$$

c) nach der Bedingung unter 6, dafs im Dreieck $P_a P_c P_d$ die aus der Seite $P_a P_b$ berechneten Seiten $P_a P_c$ und $P_a P_d$ sich verhalten müssen wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel:

$$\frac{P_a\,P_c}{P_a\,P_d} = \frac{\frac{\sin(\mathrm{IV}+\mathrm{V})}{\sin \mathrm{VIII}}\,P_a\,P_b}{\frac{\sin \mathrm{V}}{\sin \mathrm{X}}\,P_a\,P_b} = \frac{\sin(\mathrm{X}+\mathrm{XI})}{\sin \mathrm{VII}} \text{ oder:}$$

$$\frac{\sin(\mathrm{IV}+\mathrm{V})}{\sin \mathrm{VIII}}\,\frac{\sin \mathrm{VII}}{\sin(\mathrm{X}+\mathrm{XI})}\,\frac{\sin \mathrm{X}}{\sin \mathrm{V}} = 1,$$

oder in der für die folgenden Entwicklungen und Rechnungen bequemeren logarithmischen Form:

$$\log\sin(\mathrm{IV}+\mathrm{V}) - \log\sin \mathrm{VIII} + \log\sin \mathrm{VII} - \log\sin(\mathrm{X}+\mathrm{XI}) + \log\sin \mathrm{X} - \log\sin \mathrm{V} = 0,$$

wonach der Sollbetrag für die letzte Bedingungsgleichung $S_i = 0$ ist.

Stellen wir sämtliche Gleichungen zusammen, so haben wir:

$$(150)\quad \begin{cases} \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} = 360^\circ, & \mathrm{I} + \mathrm{IV} + \mathrm{V} + \mathrm{VIII} = 180^\circ, \\ \mathrm{IV} + \mathrm{V} + \mathrm{VI} = 360^\circ, & \mathrm{II} + \mathrm{VII} + \mathrm{X} + \mathrm{XI} = 180^\circ, \\ \mathrm{VII} + \mathrm{VIII} + \mathrm{IX} = 360^\circ, & \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{V} + \mathrm{X} = 180^\circ, \\ \mathrm{X} + \mathrm{XI} + \mathrm{XII} = 360^\circ, & \\ \log\sin(\mathrm{IV}+\mathrm{V}) - \log\sin \mathrm{VIII} + \log\sin \mathrm{VII} - \log\sin(\mathrm{X}+\mathrm{XI}) & \\ \quad + \log\sin \mathrm{X} - \log\sin \mathrm{V} = 0. & \end{cases}$$

Die Anzahl $q = 12$ der beobachteten Gröfsen ist gröfser als die Anzahl $r = 8$ der Bedingungsgleichungen, wie es sein mufs.

§ 46. Widersprüche zwischen den Sollbeträgen und den Beobachtungsergebnissen.

Die Bedingungsgleichungen **(150)** werden in der Regel durch die vorliegenden Beobachtungsergebnisse nicht streng erfüllt werden, und wenn wir in die Bedingungsgleichungen statt der wahrscheinlichsten Werthe der beobachteten Gröfsen I, II, III, IV, ... die wirklich vorliegenden Beobachtungsergebnisse 1, 2, 3, 4, ... einführen, so werden wir auf der rechten Seite der Geichungen statt der Sollbeträge S_a, S_b, S_c .... andere Beträge Σ_a, Σ_b, Σ_c, ... erhalten, so dafs sein wird:

$$(151)\quad \begin{cases} F_a(1, 2, 3, 4, \ldots) = \Sigma_a, \\ F_b(1, 2, 3, 4, \ldots) = \Sigma_b, \\ F_c(1, 2, 3, 4, \ldots) = \Sigma_c, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die Beträge Σ_a, Σ_b, Σ_c, ... bezeichnen wir als die Beobachtungsergebnisse für die Sollbeträge. Zwischen diesen Beobachtungsergebnissen der Sollbeträge und den Sollbeträgen bestehen Widersprüche f_a, f_b, f_c, ... die wir berechnen nach:

$$(152)\quad \begin{cases} f_a = S_a - \Sigma_a, \\ f_b = S_b - \Sigma_b, \\ f_c = S_c - \Sigma_c, \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Beispiel 1: Nach unsern Bedingungsgleichungen **(150)** erhalten wir folgende Formeln zur Berechnung der Beobachtungsergebnisse Σ_a, Σ_b, Σ_c, ... Σ_i für die Sollbeträge:

(151)
$$\left\{\begin{array}{ll} 1+\ 2+\ 3=\Sigma_a, & 1+4+\ 5+\ 8=\Sigma_e, \\ 4+\ 5+\ 6=\Sigma_b, & 2+7+10+11=\Sigma_g, \\ 7+\ 8+\ 9=\Sigma_c, & 1+2+\ 5+10=\Sigma_h, \\ 10+11+12+\Sigma_d, & \\ \multicolumn{2}{l}{\log\sin(4+5)-\log\sin 8+\log\sin 7-\log\sin(10+11)+\log\sin 10} \\ \multicolumn{2}{r}{-\log\sin 5=\Sigma_i.} \end{array}\right.$$

Hiernach ergeben sich die Zahlenwerthe von Σ_a, Σ_b, Σ_c, ... Σ_i wie folgt:

1	39	48	55	4	52	04	30	7	34	04	07	10	47	41	12
2	33	37	34	5	58	52	04	8	29	14	02	11	64	37	15
3	286	33	15	6	249	03	13	9	296	42	15	12	247	41	14
Σ_a	359	59	44	Σ_b	359	59	47	Σ_c	360	00	24	Σ_d	359	59	41

1	39	48	55		
4 + 5	110	56	34	*log sin* (4 + 5)	9.97 032
8	29	14	02	*cpl log sin* 8	0.31 124
Σ_e	179	59	31		
2	33	37	34		
7	34	04	07	*log sin* 7	9.74 833
10 + 11	112	18	27	*cpl log sin* (10 + 11)	0.03 378
Σ_g	180	00	08		
1 + 2	73	26	29		
10	47	41	12	*log sin* 10	9.86 892
5	58	52	04	*cpl log sin* 5	0.06 754
Σ_h	179	59	45	Σ_i	0.00 013

Weiter ergeben sich die Zahlenwerthe der Widersprüche f_a, f_b, f_c, ... f_i zu:

(152)
$$\left\{\begin{array}{l} f_a=S_a-\Sigma_a=360^\circ\,00'\,00''-359^\circ\,59'\,44''=+16'', \\ f_b=S_b-\Sigma_b=360\ 00\ 00\ -359\ 59\ 47\ =+13\ , \\ f_c=S_c-\Sigma_c=360\ 00\ 00\ -360\ 00\ 24\ =-24\ , \\ f_d=S_d-\Sigma_d=360\ 00\ 00\ -359\ 59\ 41\ =+19\ , \\ f_e=S_e-\Sigma_e=180\ 00\ 00\ -179\ 59\ 31\ =+29\ , \\ f_g=S_g-\Sigma_g=180\ 00\ 00\ -180\ 00\ 08\ =-\ 8\ , \\ f_h=S_h-\Sigma_h=180\ 00\ 00\ -179\ 59\ 45\ =+15\ , \\ f_i=S_i-\Sigma_i=0.00\,000-0.00\,013=-0.00\,013. \end{array}\right.$$

§ 47. Umformung der Bedingungsgleichungen.

Die wahrscheinlichsten Werthe der Beobachtungsergebnisse I, II, III, IV, ... erhalten wir aus den Beobachtungsergebnissen 1, 2, 3, 4, ... durch Hinzulegung der Verbesserungen (1), (2), (3), (4), ... Demnach ist:

(153)
$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{I}=1+(1), \\ \mathrm{II}=2+(2), \\ \mathrm{III}=3+(3), \\ \mathrm{IV}=4+(4), \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Führen wir diese Ausdrücke für die wahrscheinlichsten Werthe der Beobachtungsergebnisse in die Bedingungsgleichungen (**150**) ein, so gehen diese über in:

$$F_a\big(1+(1),\ 2+(2),\ 3+(3),\ 4+(4),\ \ldots\big)=S_a,$$
$$F_b\big(1+(1),\ 2+(2),\ 3+(3),\ 4+(4),\ \ldots\big)=S_b,$$
$$F_c\big(1+(1),\ 2+(2),\ 3+(3),\ 4+(4),\ \ldots\big)=S_c,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Verbesserungen (1), (2), (3), (4), ... sind immer verhältnismäfsig kleine Gröfsen, so dafs allgemein

$$F\big(1+(1),\ 2+(2),\ 3+(3),\ 4+(4),\ \ldots\big)=F(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots)+\frac{\partial F}{\partial 1}(1)$$
$$+\frac{\partial F}{\partial 2}(2)+\frac{\partial F}{\partial 3}(3)+\frac{\partial F}{\partial 4}(4)+\cdots$$

ist, womit obige Gleichungen übergehen in:

$$F_a(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots)+\frac{\partial F_a}{\partial 1}(1)+\frac{\partial F_a}{\partial 2}(2)+\frac{\partial F_a}{\partial 3}(3)+\frac{\partial F_a}{\partial 4}(4)+\cdots=S_a,$$
$$F_b(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots)+\frac{\partial F_b}{\partial 1}(1)+\frac{\partial F_b}{\partial 2}(2)+\frac{\partial F_b}{\partial 3}(3)+\frac{\partial F_b}{\partial 4}(4)+\cdots=S_b,$$
$$F_c(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots)+\frac{\partial F_c}{\partial 1}(1)+\frac{\partial F_c}{\partial 2}(2)+\frac{\partial F_c}{\partial 3}(3)+\frac{\partial F_c}{\partial 4}(4)+\cdots=S_c,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Für die partiellen Differenzialquotienten führen wir die folgenden einfacheren Bezeichnungen ein:

$$(\mathbf{154})\quad \left\{\begin{array}{c|c|c|c|c}
a_1=\dfrac{\partial F_a}{\partial 1}, & a_2=\dfrac{\partial F_a}{\partial 2}, & a_3=\dfrac{\partial F_a}{\partial 3}, & a_4=\dfrac{\partial F_a}{\partial 4}, & \ldots, \\
b_1=\dfrac{\partial F_b}{\partial 1}, & b_2=\dfrac{\partial F_b}{\partial 2}, & b_3=\dfrac{\partial F_b}{\partial 3}, & b_4=\dfrac{\partial F_b}{\partial 4}, & \ldots, \\
c_1=\dfrac{\partial F_c}{\partial 1}, & c_2=\dfrac{\partial F_c}{\partial 2}, & c_3=\dfrac{\partial F_c}{\partial 3}, & c_4=\dfrac{\partial F_c}{\partial 4}, & \ldots, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots
\end{array}\right.$$

Beachten wir nun, dafs allgemein nach den Formeln (**151**): $F(1, 2, 3, 4, \ldots) = \Sigma$ und nach den Formeln (**152**): $f = S - \Sigma$ ist, so gehen damit unsere obigen Gleichungen über in:

$$(\mathbf{155})\quad \left\{\begin{array}{l}
a_1(1)+a_2(2)+a_3(3)+a_4(4)+\cdots=f_a, \\
b_1(1)+b_2(2)+b_3(3)+b_4(4)+\cdots=f_b, \\
c_1(1)+c_2(2)+c_3(3)+c_4(4)+\cdots=f_c, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Diese Gleichungen bezeichnen wir als umgeformte Bedingungsgleichungen.

Beispiel 1: Zur Aufstellung der umgeformten Bedingungsgleichungen haben wir nur noch die partiellen Differenzialquotienten $a, b, c, \ldots i$ zu bilden. Wir erhalten:

$$(\mathbf{154})\quad \left\{\begin{array}{l}
a_1=+1,\ a_2=+1,\ a_3=+1,\ a_4=a_5=a_6=a_7=a_8=a_9=a_{10}=a_{11}=a_{12}=0, \\
b_1=b_2=b_3=0,\ b_4=+1,\ b_5=+1,\ b_6=+1,\ b_7=b_8=b_9=b_{10}=b_{11}=b_{12}=0, \\
c_1=c_2=c_3=c_4=c_5=c_6=0,\ c_7=+1,\ c_8=+1,\ c_9=+1,\ c_{10}=c_{11}=c_{12}=0, \\
d_1=d_2=d_3=d_4=d_5=d_6=d_7=d_8=d_9=0,\ d_{10}=+1,\ d_{11}=+1,\ d_{12}=+1, \\
e_1=+1,\ e_2=e_3=0,\ e_4=+1,\ e_5=+1,\ e_6=e_7=0,\ e_8=+1,\ e_9=e_{10}=e_{11}=e_{12}=0, \\
g_1=0,\ g_2=+1,\ g_3=g_4=g_5=g_6=0,\ g_7=+1,\ g_8=g_9=0,\ g_{10}=+1,\ g_{11}=+1,\ g_{12}=0, \\
h_1=+1,\ h_2=+1,\ h_3=h_4=0,\ h_5=+1,\ h_6=h_7=h_8=h_9=0,\ h_{10}=+1,\ h_{11}=h_{12}=0, \\
i_1=i_2=i_3=0,\ i_4=+M\,cotg\,(4+5),\ i_5=+M\,cotg\,(4+5)-M\,cotg\,5,\ i_6=0, \\
i_7=+M\,cotg\,7,\ i_8=-M\,cotg\,8,\ i_9=0,\ i_{10}=-M\,cotg\,(10+11)+M\,cotg\,10, \\
i_{11}=-M\,coty\,(10+11),\ i_{12}=0.
\end{array}\right.$$

Unter Heranziehung der im § 46 berechneten Zahlenwerthe für die Widersprüche $f_a, f_b, f_c, \ldots f_i$ ergeben sich hiernach die folgenden umgeformten Bedingungsgleichungen:

$$
\begin{array}{l|l}
(1)+(2)+(3)=+16'', & (1)+(4)+(5)+(8)=+29'', \\
(4)+(5)+(6)=+13'', & (2)+(7)+(10)+(11)=-8'', \\
(7)+(8)+(9)=-24'', & (1)+(2)+(5)+(10)=+15'', \\
(10)+(11)+(12)=+19'', &
\end{array}
$$

$$
+M\,cotg\,(4+5)\frac{1}{\varrho}(4)+(+M\,cotg\,(4+5)-M\,cotg\,5)\frac{1}{\varrho}(5)+M\,cotg\,7\frac{1}{\varrho}(7)-M\,cotg\,8\frac{1}{\varrho}(8)
$$
$$
+(-M\,cotg\,(10+11)+M\,cotg\,10)\frac{1}{\varrho}(10)-M\,cotg\,(10+11)\frac{1}{\varrho}(11)=-0{,}00\,013.
$$

In die letzte Bedingungsgleichung müssen wir noch die Zahlenwerthe für M, für die Cotangenten und für $\frac{1}{\varrho}$*) einführen. Die Zahlenwerthe sind:

$$
\begin{array}{ll|ll}
M=0.434\,294, & & M\frac{1}{\varrho''}=0{,}000\,002\,105 & \\
\frac{1}{\varrho''}=\frac{1}{206\,265}, & & & \\
cotg\,(4+5) & =-0{,}383, & M\frac{1}{\varrho''}cotg\,(4+5) & =-0{,}000\,000\,806, \\
cotg\,5 & =+0{,}604, & M\frac{1}{\varrho''}cotg\,5 & =+0{,}000\,001\,271, \\
cotg\,7 & =+1{,}479, & M\frac{1}{\varrho''}cotg\,7 & =+0{,}000\,003\,113, \\
cotg\,8 & =+1{,}787, & M\frac{1}{\varrho''}cotg\,8 & =+0{,}000\,003\,762, \\
cotg\,(10+11) & =-0{,}410, & M\frac{1}{\varrho''}cotg\,(10+11) & =-0{,}000\,000\,863, \\
cotg\,10 & =+0{,}910, & M\frac{1}{\varrho''}cotg\,10 & =+0{,}000\,001\,916.
\end{array}
$$

Da die Zahlenwerthe der Differenzialquotienten für die weitern Rechnungen unbequem sind, multipliziren wir die ganze letzte Gleichung mit 100 000, wonach wir alle darin vorkommenden Gröfsen in Einheiten der fünften Stelle der Logarithmen erhalten. Hiernach sind unsere umgeformten Bedingungsgleichungen:

$$
(155)\quad \left\{
\begin{array}{l|l}
(1)+(2)+(3)=+16'', & (1)+(4)+(5)+(8)=+29'', \\
(4)+(5)+(6)=+13'', & (2)+(7)+(10)+(11)=-8'', \\
(7)+(8)+(9)=-24'', & (1)+(2)+(5)+(10)=+15'', \\
(10)+(11)+(12)=+19'', &
\end{array}
\right.
$$

$$
-0{,}081\,(4)-0{,}208\,(5)+0{,}311\,(7)-0{,}376\,(8)+0{,}278\,(10)+0{,}086\,(11)=-13.
$$

§ 48. Korrelatengleichungen und Endgleichungen.

1. Nach den umgeformten Bedingungsgleichungen

$$
(155)\quad \left\{
\begin{array}{l}
a_1(1)+a_2(2)+a_3(3)+a_4(4)+\cdots=f_a, \\
b_1(1)+b_2(2)+b_3(3)+b_4(4)+\cdots=f_b, \\
c_1(1)+c_2(2)+c_3(3)+c_4(4)+\cdots=f_c, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
\right.
$$

*) Die Differenzialquotienten $M\,cotg\,n$ stellen die Aenderungen dar, die die $log\,sin\,n$ für eine Einheit des Bogens n erleiden und $M\,cotg\,n\cdot(n)$ die Aenderungen, die die $log\,sin\,n$ erleiden, wenn dem Bogen n die Verbesserung (n) in Bogenmafs hinzugefügt wird. Da wir nun unsere Rechnung im übrigen nicht in Bogenmafs, sondern in Winkelmafs durchführen, so mufs der Faktor $\frac{1}{\rho}$ zur Umwandlung der Verbesserungen (n) von Winkelmafs in Bogenmafs hinzugefügt werden.

müssen wir nun die Verbesserungen (1), (2), (3), (4), ..., die zugleich die wahrscheinlichsten Werthe der Beobachtungsfehler darstellen, derart bestimmen, dafs erstens diesen Bedingungsgleichungen genügt wird und dafs zweitens die Quadratsumme der auf die Gewichtseinheit reduzirten wahrscheinlichsten Werthe der Beobachtungsfehler $(1)\sqrt{p_1}$, $(2)\sqrt{p_2}$, $(3)\sqrt{p_3}$, $(4)\sqrt{p_4}$, ..., also

$$[p(\mathrm{n})(\mathrm{n})] = p_1(1)(1) + p_2(2)(2) + p_3(3)(3) + p_4(4)(4) + \cdots$$

ein Minimum wird.

2. Um diese Werthe der Verbesserungen (1), (2), (3), (4), ... zu finden, nehmen wir $f_a, f_b, f_c, \ldots$ auf die linke Seite der Gleichungen (**155**) und multipliziren die Gleichungen dann mit den vorläufig noch unbestimmten Koeffizienten $-2k_a$, $-2k_b$, $-2k_c$, ..., womit wir erhalten:

$$-2a_1k_a(1) - 2a_2k_a(2) - 2a_3k_a(3) - 2a_4k_a(4) - \cdots + 2k_af_a = 0,$$
$$-2b_1k_b(1) - 2b_2k_b(2) - 2b_3k_b(3) - 2b_4k_b(4) - \cdots + 2k_bf_b = 0,$$
$$-2c_1k_c(1) - 2c_2k_c(2) - 2c_3k_c(3) - 2c_4k_c(4) - \cdots + 2k_cf_c = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Addiren wir diese Gleichungen zu

$$[p(\mathrm{n})(\mathrm{n})] = p_1(1)(1) + p_2(2)(2) + p_3(3)(3) + p_4(4)(4) + \cdots,$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned}[p(\mathrm{n})(\mathrm{n})] = p_1(1)(1) &- 2a_1k_a(1) - 2b_1k_b(1) - 2c_1k_c(1) - \cdots \\ + p_2(2)(2) &- 2a_2k_a(2) - 2b_2k_b(2) - 2c_2k_c(2) - \cdots \\ + p_3(3)(3) &- 2a_3k_a(3) - 2b_3k_b(3) - 2c_3k_c(3) - \cdots \\ + p_4(4)(4) &- 2a_4k_a(4) - 2b_4k_b(4) - 2c_4k_c(4) - \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ 2k_af_a + 2k_bf_b + 2k_cf_c + \cdots\end{aligned}$$

3. Differenziren wir diesen Ausdruck nach (1), (2), (3), (4), ... so ergeben sich die folgenden partiellen Differenzialquotienten:

$$\frac{\partial[p(\mathrm{n})(\mathrm{n})]}{\partial(1)} = 2p_1(1) - 2a_1k_a - 2b_1k_b - 2c_1k_c - \cdots,$$
$$\frac{\partial[p(\mathrm{n})(\mathrm{n})]}{\partial(2)} = 2p_2(2) - 2a_2k_a - 2b_2k_b - 2c_2k_c - \cdots,$$
$$\frac{\partial[p(\mathrm{n})(\mathrm{n})]}{\partial(3)} = 2p_3(3) - 2a_3k_a - 2b_3k_b - 2c_3k_c - \cdots,$$
$$\frac{\partial[p(\mathrm{n})(\mathrm{n})]}{\partial(4)} = 2p_4(4) - 2a_4k_a - 2b_4k_b - 2c_4k_c - \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Nr.	*a*.	*b*.	*c*.	*d*.	*e*.	*g*.	*h*.	*i*.	$\frac{ua}{p}$.	$\frac{ab}{p}$.	$\frac{ac}{p}$.	$\frac{ad}{p}$.	$\frac{ae}{p}$.	$\frac{ug}{p}$.	$\frac{ah}{p}$.	$\frac{ai}{p}$.	$\frac{bb}{p}$.	$\frac{bc}{p}$.	$\frac{bd}{p}$.	$\frac{be}{p}$.	$\frac{bg}{p}$.	$\frac{bh}{p}$.	$\frac{bi}{p}$.
1	+1				+1		+1		+1				+1		+1								
2	+1					+1	+1		+1					+1	+1								
3	+1								+1														
4		+1			+1			−0,081									+1			+1			−0,081
5		+1			+1		+1	−0,208									+1			+1		+1	−0,208
6		+1															+1						
7			+1			+1		+0,311															
8			+1		+1			−0,376															
9			+1																				
10				+1		+1	+1	+0,278															
11				+1		+1		+0,086															
12				+1																			
									+3				+1	+1	+2		+3			+2		+1	−0,289

Setzen wir diese partiellen Differenzialquotienten gleich Null, so erhalten wir n Ausdrücke für die n Verbesserungen (1), (2), (3), (4), ..., die der Minimumsbedingung genügen:

$$
(156)\quad \begin{cases}
(1) = \dfrac{a_1}{p_1} k_a + \dfrac{b_1}{p_1} k_b + \dfrac{c_1}{p_1} k_c + \cdots, \\
(2) = \dfrac{a_2}{p_2} k_a + \dfrac{b_2}{p_2} k_b + \dfrac{c_2}{p_2} k_c + \cdots, \\
(3) = \dfrac{a_3}{p_3} k_a + \dfrac{b_3}{p_3} k_b + \dfrac{c_3}{p_3} k_c + \cdots, \\
(4) = \dfrac{a_4}{p_4} k_a + \dfrac{b_4}{p_4} k_b + \dfrac{c_4}{p_4} k_c + \cdots, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

Die Koeffizienten k_a, k_b, k_c, ..., wodurch in diesen Gleichungen die Verbesserungen (1), (2), (3), (4), ... ausgedrückt sind, bezeichnen wir als Korrelaten und die Gleichungen (**156**) als Korrelatengleichungen.

4. Setzen wir die in den Korrelatengleichungen (**156**) erhaltenen Werthe von (1), (2), (3), (4), ... in die umgeformten Bedingungsgleichungen (**155**) ein, so erhalten wir:

$$
(157)\quad \begin{cases}
\left[\dfrac{aa}{p}\right] k_a + \left[\dfrac{ab}{p}\right] k_b + \left[\dfrac{ac}{p}\right] k_c + \cdots = f_a, \\
\left[\dfrac{ab}{p}\right] k_a + \left[\dfrac{bb}{p}\right] k_b + \left[\dfrac{bc}{p}\right] k_c + \cdots = f_b, \\
\left[\dfrac{ac}{p}\right] k_a + \left[\dfrac{bc}{p}\right] k_b + \left[\dfrac{cc}{p}\right] k_c + \cdots = f_c, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

Die Anzahl dieser Gleichungen, die wir als Endgleichungen bezeichnen, ist gleich der Anzahl r der Bedingungsgleichungen und gleich der Anzahl der Korrelaten k_a, k_b, k_c..... Durch Auflösung der Endgleichungen erhalten wir demnach bestimmte Werthe der Korrelaten k_a, k_b, k_c, und zwar solche, die den Bedingungsgleichungen (**155**) entsprechen.

Berechnen wir dann mit diesen den Bedingungsgleichungen entsprechenden Werthen der Korrelaten k_a, k_b, k_c, ... nach den in den Korrelatengleichungen (**156**) erhaltenen, der Minimumsbedingung genügenden Ausdrücken der Verbesserungen (1), (2), (3), (4), ... die Zahlenwerthe dieser Verbesserungen, so erhalten wir solche Zahlenwerthe, die sowohl den umgeformten Bedingungsgleichungen (**155**) als auch der Minimumsbedingung genügen.

$\frac{cc}{p}$.	$\frac{cd}{p}$.	$\frac{ce}{p}$.	$\frac{cg}{p}$.	$\frac{ch}{p}$.	$\frac{ci}{p}$.	$\frac{dd}{p}$.	$\frac{de}{p}$.	$\frac{dg}{p}$.	$\frac{dh}{p}$.	$\frac{di}{p}$.	$\frac{ee}{p}$.	$\frac{eg}{p}$.	$\frac{eh}{p}$.	$\frac{ei}{p}$.	$\frac{gg}{p}$.	$\frac{gh}{p}$.	$\frac{gi}{p}$.	$\frac{hh}{p}$.	$\frac{hi}{p}$.	$\frac{ii}{p}$.
											+1		+1					+1		
															+1	+1		+1		
											+1			−0,081						+0,0066
											+1		+1	−0,208				+1	−0,208	+0,0433
+1			+1		+0,311										+1		+0,311			+0,0967
+1		+1			− 0,376						+1			−0,376						+0,1414
+1																				
						+1		+1	+1	+0,278					+1	+1	+0,278	+1	+0,278	+0,0773
						+1		+1		+0,086					+1		+0,086			+0,0074
						+1														
+3		+1	+1		−0,065	+3		+2	+1	+0,364	+4		+2	−0,665	+4	+2	+0,675	+4	+0,070	+0,3727

Die Faktoren der Endgleichungen (**157**) werden ganz in gleicher Weise gebildet wie die Faktoren der Endgleichungen (**118**) für vermittelnde Beobachtungen.

Beispiel 1: Wie im § 42 angegeben ist, sind sämtliche Winkel mit gleicher Genauigkeit beobachtet worden. Wir setzen daher für die folgende Rechnung die Gewichte sämtlicher Winkel $= 1$. Hiermit und mit den im § 47 erhaltenen Faktoren $a_n, b_n, c_n, \ldots . i_n$ der umgeformten Bedingungsgleichungen, ergeben sich die folgenden Korrelatengleichungen:

$$(156)\quad \left\{\begin{array}{ll} (1) = +k_a + k_e + k_h, & (7) = +k_c + k_g + 0{,}311\,k_i, \\ (2) = +k_a + k_g + k_h, & (8) = +k_c + k_e - 0{,}376\,k_i, \\ (3) = +k_a, & (9) = +k_c, \\ (4) = +k_b + k_e - 0{,}081\,k_i, & (10) = +k_d + k_g + k_h + 0{,}278\,k_i, \\ (5) = +k_b + k_e + k_h - 0{,}208\,k_i, & (11) = +k_d + k_g + 0{,}086\,k_i, \\ (6) = +k_b, & (12) = +k_d. \end{array}\right.$$

Die Faktoren der Endgleichungen ergeben sich wie folgt: (Siehe die Tabellen auf Seite 206 und 207.)

Damit erhalten wir die Endgleichungen:

$$(157)\quad \left\{\begin{array}{l} +3k_a \quad . \quad . \quad . \quad + k_e + k_g + 2k_h \quad . \quad = +16, \\ . \quad +3k_b \quad . \quad . \quad +2k_e \quad . \quad + k_h - 0{,}289\,k_i = +13, \\ . \quad . \quad +3k_c \quad . \quad + k_e + k_g \quad . \quad -0{,}065\,k_i = -24, \\ . \quad . \quad . \quad +3k_d \quad . \quad +2k_g + k_h + 0{,}364\,k_i = +19, \\ + k_a + 2k_b + k_c \quad . \quad +4k_e \quad . \quad +2k_h - 0{,}665\,k_i = +29, \\ + k_a \quad . \quad + k_c + 2k_d \quad . \quad +4k_g + 2k_h + 0{,}675\,k_i = -8, \\ +2k_a + k_b \quad . \quad + k_d + 2k_e + 2k_g + 4k_h + 0{,}070\,k_i = +15, \\ . \quad -0{,}289\,k_b - 0{,}065\,k_c + 0{,}364\,k_d - 0{,}665\,k_e + 0{,}675\,k_g + 0{,}070\,k_h \\ \qquad + 0{,}373\,k_i = -13. \end{array}\right.$$

§ 49. Auflösung der Endgleichungen, Rechenproben und mittlere Fehler der Gewichtseinheit und der Beobachtungsergebnisse.*)

1. Führen wir für die Faktoren der Endgleichungen und die Widersprüche einfachere Bezeichnungen ein, indem wir setzen:

$$(158)\quad \left\{\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathfrak{a}_1 = \left[\frac{aa}{p}\right], & \mathfrak{b}_1 = \left[\frac{ab}{p}\right], & \mathfrak{c}_1 = \left[\frac{ac}{p}\right], & \ldots, & \mathfrak{f}_1 = -f_a, \\ & \mathfrak{b}_2 = \left[\frac{bb}{p}\right], & \mathfrak{c}_2 = \left[\frac{bc}{p}\right], & \ldots, & \mathfrak{f}_2 = -f_b, \\ & & \mathfrak{c}_3 = \left[\frac{cc}{p}\right], & \ldots, & \mathfrak{f}_3 = -f_c, \\ & & & \ldots, & \ldots\ldots, \end{array}\right.$$

so gehen die Endgleichungen über in:

$$(159)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{a}_1 k_a + \mathfrak{b}_1 k_b + \mathfrak{c}_1 k_c + \cdots \mathfrak{f}_1 = 0, \\ \mathfrak{b}_1 k_a + \mathfrak{b}_2 k_b + \mathfrak{c}_2 k_c + \cdots \mathfrak{f}_2 = 0, \\ \mathfrak{c}_1 k_a + \mathfrak{c}_2 k_b + \mathfrak{c}_3 k_c + \cdots \mathfrak{f}_3 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Diese Gleichungen haben genau dieselbe Form wie die Endgleichungen (**121**); wir lösen sie daher auch auf nach den Formeln (**120**b), (**122**), (**123**) oder nach dem Schema (**124**).

*) Die Gewichte und mittleren Fehler der wahrscheinlichsten Werthe der beobachteten Gröfsen und der Funktionen von diesen werden im VII. Abschnitte besonders behandelt.

2. Hierzu ergeben sich Rechenproben durch dreifache Berechnung des Werthes von $[p(\mathfrak{n})(\mathfrak{n})]$. Zuerst erhalten wir, indem wir die Ausdrücke für die Verbesserungen (1), (2), (3), (4), ... in den Korrelatengleichungen (**156**) quadriren, mit den Gewichten $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$ multipliziren und dann alles addiren:

$$p_1(1)(1) = \frac{a_1 a_1}{p_1} k_a k_a + \frac{b_1 b_1}{p_1} k_b k_b + \frac{c_1 c_1}{p_1} k_c k_c + \cdots 2\frac{a_1 b_1}{p_1} k_a k_b + 2\frac{a_1 c_1}{p_1} k_a k_c + \cdots 2\frac{b_1 c_1}{p_1} k_b k_c + \cdots$$

$$p_2(2)(2) = \frac{a_2 a_2}{p_2} k_a k_a + \frac{b_2 b_2}{p_2} k_b k_b + \frac{c_2 c_2}{p_2} k_c k_c + \cdots 2\frac{a_2 b_2}{p_2} k_a k_b + 2\frac{a_2 c_2}{p_2} k_a k_c + \cdots 2\frac{b_2 c_2}{p_2} k_b k_c + \cdots$$

$$p_3(3)(3) = \frac{a_3 a_3}{p_3} k_a k_a + \frac{b_3 b_3}{p_3} k_b k_b + \frac{c_3 c_3}{p_3} k_c k_c + \cdots 2\frac{a_3 b_3}{p_3} k_a k_b + 2\frac{a_3 c_3}{p_3} k_a k_c + \cdots 2\frac{b_3 c_3}{p_3} k_b k_c + \cdots$$

$$p_4(4)(4) = \frac{a_4 a_4}{p_4} k_a k_a + \frac{b_4 b_4}{p_4} k_b k_b + \frac{c_4 c_4}{p_4} k_c k_c + \cdots 2\frac{a_4 b_4}{p_4} k_a k_b + 2\frac{a_4 c_4}{p_4} k_a k_c + \cdots 2\frac{b_4 c_4}{p_4} k_b k_c + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[p(\mathfrak{n})(\mathfrak{n})] = \left[\frac{aa}{p}\right] k_a k_a + \left[\frac{bb}{p}\right] k_b k_b + \left[\frac{cc}{p}\right] k_c k_c + \cdots 2\left[\frac{ab}{p}\right] k_a k_b + 2\left[\frac{ac}{p}\right] k_a k_c + \cdots 2\left[\frac{bc}{p}\right] k_b k_c + \cdots$$

Multipliziren wir sodann die Endgleichungen (**157**) mit den Korrelaten $k_a, k_b, k_c, \ldots$ und addiren alles, so erhalten wir:

$$\left[\frac{aa}{p}\right] k_a k_a + \left[\frac{ab}{p}\right] k_a k_b + \left[\frac{ac}{p}\right] k_a k_c + \cdots = k_a f_a,$$

$$\left[\frac{ab}{p}\right] k_a k_b + \left[\frac{bb}{p}\right] k_b k_b + \left[\frac{bc}{p}\right] k_b k_c + \cdots = k_b f_b,$$

$$\left[\frac{ac}{p}\right] k_a k_c + \left[\frac{bc}{p}\right] k_b k_c + \left[\frac{cc}{p}\right] k_c k_c + \cdots = k_c f_c,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left[\frac{aa}{p}\right] k_a k_a + \left[\frac{bb}{p}\right] k_b k_b + \left[\frac{cc}{p}\right] k_c k_c + \cdots 2\left[\frac{ab}{p}\right] k_a k_b + 2\left[\frac{ac}{p}\right] k_a k_c + \cdots 2\left[\frac{bc}{p}\right] k_b k_c + \cdots = [kf].$$

Der oben für $[p(\mathfrak{n})(\mathfrak{n})]$ erhaltene Ausdruck stimmt überein mit dem hier für $[kf]$ erhaltenen Ausdruck und demnach folgt:

(160) $$[p(\mathfrak{n})(\mathfrak{n})] = [kf] = -[k\mathfrak{f}].$$

Berücksichtigen wir nun ferner, dafs nach (**158**)

$$[kf] = -\mathfrak{f}_1 k_a - \mathfrak{f}_2 k_b - \mathfrak{f}_3 k_c - \cdots$$

ist und dafs nach Formel (**127**)

$$-\mathfrak{f}_1 k_a - \mathfrak{f}_2 k_b - \mathfrak{f}_3 k_c - \cdots = \frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 + \frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 + \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3 + \cdots$$

sein mufs, so ist auch:

(161) $$[p(\mathfrak{n})(\mathfrak{n})] = \frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 + \frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 + \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3 + \cdots$$

Zu diesen beiden Werthen von $[p(n)(n)]$, die wir gleich bei Auflösung der Endgleichungen bilden, und die uns zugleich eine Probe für die richtige Durchführung der Auflösung liefern, erhalten wir endlich einen dritten Werth, indem wir nach den Korrelatengleichungen (**156**) die Zahlenwerthe der Verbesserungen (1), (2), (3), (4), ... berechnen und mit diesen Werthen

(**162**) $$[p(n)(n)] = p_1(1)(1) + p_2(2)(2) + p_3(3)(3) + p_4(4)(4) + \cdots$$

$\left[\frac{aa}{p}\right]$	$\left[\frac{ab}{p}\right]$	$\left[\frac{ac}{p}\right]$	$\left[\frac{ad}{p}\right]$	$\left[\frac{ae}{p}\right]$	$\left[\frac{ag}{p}\right]$	$\left[\frac{ah}{p}\right]$	$\left[\frac{ai}{p}\right]$	$-f_a$	$\left[\frac{bb}{p}\right]$	$\left[\frac{bc}{p}\right]$	$\left[\frac{bd}{p}\right]$	$\left[\frac{be}{p}\right]$
+3,000	.	.	.	+1,000	+1,000	+2,000	.	−16,000	+3,000	.	.	+2,000
	.	.	.	−0,333	−0,333	−0,667	.	+5,333	.	.	.	.
								.	+3,00	.	.	+2,000
								+3,327		.	.	−0,667
								−1,789				
								−1,176				
								.				
								.				
								.				
								.				
							$k_a =$	+5,695				

$\left[\frac{dd}{p}\right]$	$\left[\frac{de}{p}\right]$	$\left[\frac{dg}{p}\right]$	$\left[\frac{dh}{p}\right]$	$\left[\frac{di}{p}\right]$	$-f_d$	$\left[\frac{ee}{p}\right]$	$\left[\frac{eg}{p}\right]$	$\left[\frac{eh}{p}\right]$	$\left[\frac{ei}{p}\right]$	$-f_e$	$\left[\frac{gg}{p}\right]$
+3,000	.	+2,000	+1,000	+0,364	−19,000	+4,000	.	+2,000	−0,665	−29,000	+4,000
.	.	.	.	.	.	−0,333	−0,333	−0,667	.	+5,333	−0,333
.	.	.	.	.	.	−1,333	.	−0,667	+0,193	+8,667	.
.	.	.	.	.	.	−0,333	−0,333	.	+0,022	−8,000	−0,333
+3,000	.	+2,000	+1,000	+0,364	−19,000	.	.	.	.	.	−1,333
	.	−0,667	−0,333	−0,1213	+6,333	+2,000	−0,667	+0,667	−0,450	−23,000	−0,222
					+6,159		+0,333	−0,333	+0,225	+11,500	+1,778
					+1,663					−11,425	
					−3,577					+1,663	
					.					+1,789	
				$k_d =$	+10,578				$k_e =$	+3,527	

bilden, wodurch wir eine Probe für die richtige Bildung der Faktoren der Endgleichungen erhalten.

(163). Weiter erhalten wir dann eine Probe für die richtige Bildung und Umformung der Bedingungsgleichungen, indem wir zuerst feststellen, ob die erhaltenen Verbesserungen (1), (2), (3), (4), ... den umgeformten Bedingungsgleichungen **(155)** genügen, indem wir sodann nach den Formeln **(153)** durch

$\left[\frac{bg}{p}\right]$.	$\left[\frac{bh}{p}\right]$.	$\left[\frac{bi}{p}\right]$.	$-f_b$.	$\left[\frac{cc}{p}\right]$.	$\left[\frac{cd}{p}\right]$.	$\left[\frac{ce}{p}\right]$.	$\left[\frac{cg}{p}\right]$.	$\left[\frac{ch}{p}\right]$.	$\left[\frac{ci}{p}\right]$.	$-f_c$.
.	+ 1,000	− 0,289	− 13,000	+ 3,000	.	+ 1,000	+ 1,000	.	− 0,065	+ 24,000
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	+ 1,000	− 0,289	− 13,000	.	.	.	.	.	.	.
.	− 0,333	+ 0,0963	+ 4,333	+ 3,000	.	+ 1,000	+ 1,000	.	− 0,065	+ 24,000
			− 4,890		.	− 0,333	− 0,333	.	+ 0,0217	− 8,000
			+ 1,663							− 1,102
			.							.
			− 2,351							− 1,789
			.							− 1,176
			.							.
		$k_b =$	− 1,245						$k_c =$	− 12,067

$\left[\frac{gh}{p}\right]$.	$\left[\frac{gi}{p}\right]$.	$-f_g$.	$\left[\frac{hh}{p}\right]$.	$\left[\frac{hi}{p}\right]$.	$-f_h$.	$\left[\frac{ii}{p}\right]$.	$-f_i$.	Probe.	
+2,000	+0,675	+ 8,000	+4,000	+ 0,070	− 15,000	+ 0,3727	+ 13,0000		
−0,667	.	+ 5,333	−1,333	.	+ 10,667	.	.	+ 85,333	+ 91,120
.	.	.	−0,333	+ 0,096	+ 4,333	− 0,0278	− 1,2519	+ 56,333	− 16,185
.	+0,022	− 8,000	.	.	.	− 0,0014	+ 0,5208	+ 192,000	+ 289,608
−0,667	−0,243	+ 12,667	−0,333	− 0,121	+ 6,333	− 0,0442	+ 2,3053	+ 120,333	+ 200,982
+0,222	−0,150	− 7,667	−0,222	+ 0,150	+ 7,667	− 0,1012	− 5,1750	+ 264,500	+ 102,283
+0,889	+0,304	+ 10,333	−0,444	− 0,152	− 5,167	− 0,0520	− 1,7668	+ 60,055	− 42,928
−0,500	−0,171	− 5,812	+1,333	+ 0,043	+ 8,833	− 0,0014	− 0,2849	+ 58,521	− 74,850
		+ 8,683		− 0,0322	− 6,625	+ 0,1447	+ 7,3475	+ 373,084	+ 660,101
		+ 2,495			+ 1,635			+1210,159	+1210,131
	$k_g =$	+ 5,366		$k_h =$	− 4,990	$k_i =$	− 50,777		

Hinzufügung der Verbesserungen (1), (2), (3), (4), ... zu den Beobachtungsergebnissen 1, 2, 3, 4, ... die verbesserten Werthe I, II, III, IV, ... bilden und danach feststellen, ob diese verbesserten Werthe den Bedingungsgleichungen (**150**) genügen.

3. Die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen, wodurch wir die Quadratsumme der auf die Gewichtseinheit reduzirten Beobachtungsfehler zu dividiren haben, um das Quadrat des mittleren Fehlers $\mathfrak{m}$ der Gewichtseinheit zu erhalten, ist gleich der Anzahl r der Bedingungsgleichungen, so dafs also ist:

$$\textbf{(164)} \qquad \mathfrak{m} = \pm\sqrt{\frac{[p(n)(n)]}{r}}.$$

Hiermit erhalten wir die mittleren Fehler $m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots$ der Beobachtungsergebnisse 1, 2, 3, 4, ... nach:

$$\textbf{(165)} \qquad m_1 = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_1}},\; m_2 = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_2}},\; m_3 = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_3}},\; m_4 = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_4}},\; \ldots$$

Beispiel 1: Die Auflösung der Endgleichungen (**157**) gestaltet sich nach dem Schema (**124**) wie folgt: (Siehe die Tabellen auf Seite 210 und 211.)

Die Berechnung von $[p(\mathrm{n})(\mathrm{n})]$ nach den Formeln (**160**) und (**161**) ist in den beiden letzten Spalten des Schemas ausgeführt und hat ergeben:

$$\textbf{(161)} \qquad [p(\mathrm{n})(\mathrm{n})] = \frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 + \frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 + \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3 + \cdots = 1210{,}16,$$

$$\textbf{(160)} \qquad [p(\mathrm{n})(\mathrm{n})] = [kf] = [-k\mathfrak{f}] \cdots = 1210{,}13,$$

welche beiden Werthe genügend übereinstimmen und somit die richtige Auflösung der Endgleichungen sicherstellen.

Mit den erhaltenen Zahlenwerthen der Korrelaten $k_a, k_b, k_c, \ldots k_i$ ergeben sich nach den Korrelatengleichungen (**156**) die folgenden Zahlenwerthe der Verbesserungen (1), (2), (3), ... (12):

$$\textbf{(156)} \left\{\begin{aligned}
(1) &= +k_a + k_e + k_h = +5{,}70 + 3{,}53 - 4{,}99 = +4{,}24'',\\
(2) &= +k_a + k_g + k_h = +5{,}70 + 5{,}37 - 4{,}99 = +6{,}08'',\\
(3) &= +k_a = +5{,}70'',\\
(4) &= +k_b + k_e - 0{,}081\,k_i = -1{,}24 + 3{,}53 - 0{,}081\,(-50{,}78) = +6{,}40'',\\
(5) &= +k_b + k_e + k_h - 0{,}208\,k_i = -1{,}24 + 3{,}53 - 4{,}99 - 0{,}208\,(-50{,}78) = +7{,}86'',\\
(6) &= +k_b = -1{,}24'',\\
(7) &= +k_c + k_g + 0{,}311\,k_i = -12{,}07 + 5{,}37 + 0{,}311\,(-50{,}78) = -22{,}49'',\\
(8) &= +k_c + k_e - 0{,}376\,k_i = -12{,}07 + 3{,}53 - 0{,}376\,(-50{,}78) = +10{,}55'',\\
(9) &= +k_c = -12{,}07'',\\
(10) &= +k_d + k_g + k_h + 0{,}278\,k_i = +10{,}58 + 5{,}37 - 4{,}99 + 0{,}278\,(-50{,}78) = -3{,}16'',\\
(11) &= +k_d + k_g + 0{,}086\,k_i = +10{,}58 + 5{,}37 + 0{,}086\,(-50{,}78) = +11{,}58'',\\
(12) &= +k_d = +10{,}58''.
\end{aligned}\right.$$

Die Quadratsumme dieser Verbesserungen ergiebt sich zu:

$$[p(\mathrm{n})(\mathrm{n})] = p_1(1)(1) + p_2(2)(2) + p_3(3)(3) + \cdots p_{12}(12)(12) = 1210{,}53,$$

welcher Betrag mit den nach den Formeln (**160**) und (**161**) erhaltenen Beträgen genügend übereinstimmt. Setzen wir die Zahlenwerthe der Verbesserungen in die umgeformten Bedingungsgleichungen (**155**) ein, so erhalten wir:

$$
(155)\left\{\begin{array}{ll}
+\ 4{,}2 + \ 6{,}1 + \ 5{,}7 = +\ 16{,}0'', & +\ 4{,}2 + \ 6{,}4 + 7{,}9 + 10{,}6 = +\ 29{,}1'', \\
+\ 6{,}4 + \ 7{,}9 - \ 1{,}2 = +\ 13{,}1'', & +\ 6{,}1 - 22{,}5 - 3{,}2 + 11{,}6 = -\ \ 8{,}0'', \\
-\ 22{,}5 + 10{,}6 - 12{,}1 = -\ 24{,}0'', & +\ 4{,}2 + \ 6{,}1 + 7{,}9 - \ 3{,}2 = +\ 15{,}0'', \\
-\ \ 3{,}2 + 11{,}6 + 10{,}6 = +\ 19{,}0'', & \\
\multicolumn{2}{l}{-0{,}081\,(+6{,}4) - 0{,}208\,(+7{,}9) + 0{,}311\,(-22{,}5) - 0{,}376\,(+10{,}6) + 0{,}278\,(-3{,}2)} \\
\multicolumn{2}{l}{+0{,}086\,(+11{,}6) = -0{,}5 - 1{,}6 - 7{,}0 - 4{,}0 - 0{,}9 + 1{,}0 = -13{,}0.}
\end{array}\right.
$$

Die erhaltenen Beträge stimmen bis auf eine Einheit der Dezimalstelle mit den Widersprüchen f_a, f_b, f_c, ... f_i überein, die umgeformten Bedingungsgleichungen werden also genügend scharf erfüllt.

Fügen wir nach den Formeln (**153**) den Beobachtungsergebnissen 1, 2, 3,... 12 die Verbesserungen (1), (2), (3), ... (12) hinzu, so erhalten wir die wahrscheinlichsten Werthe I, II, III, . . . XII der beobachteten Winkel wie folgt:

$$
(153)\left\{\begin{array}{rcl}
\mathrm{I} = \ 1 + (1) & = & 39^\circ 48' 55'' + \ 4{,}2'' = \ 39^\circ 48' 59{,}2'', \\
\mathrm{II} = \ 2 + (2) & = & 33\ 37\ 34\ +\ 6{,}1 = \ 33\ 37\ 40{,}1\ , \\
\mathrm{III} = \ 3 + (3) & = & 286\ 33\ 15\ +\ 5{,}7 = 286\ 33\ 20{,}7\ , \\
\mathrm{IV} = \ 4 + (4) & = & 52\ 04\ 30\ +\ 6{,}4 = \ 52\ 04\ 36{,}4\ , \\
\mathrm{V} = \ 5 + (5) & = & 58\ 52\ 04\ +\ 7{,}9 = \ 58\ 52\ 11{,}9\ , \\
\mathrm{VI} = \ 6 + (6) & = & 249\ 03\ 13\ -\ 1{,}2 = 249\ 03\ 11{,}8\ , \\
\mathrm{VII} = \ 7 + (7) & = & 34\ 04\ 07\ -22{,}5 = \ 34\ 03\ 44{,}5\ , \\
\mathrm{VIII} = \ 8 + (8) & = & 29\ 14\ 02\ +10{,}6 = \ 29\ 14\ 12{,}6\ , \\
\mathrm{IX} = \ 9 + (9) & = & 296\ 42\ 15\ -12{,}1 = 296\ 42\ 02{,}9\ , \\
\mathrm{X} = 10 + (10) & = & 47\ 41\ 12\ -\ 3{,}2 = \ 47\ 41\ 08{,}8\ , \\
\mathrm{XI} = 11 + (11) & = & 64\ 37\ 15\ +11{,}6 = \ 64\ 37\ 26{,}6\ , \\
\mathrm{XII} = 12 + (12) & = & 247\ 41\ 14\ +10{,}6 = 247\ 41\ 24{,}6\ .
\end{array}\right.
$$

Wie nachstehende Zusammenstellung zeigt, erfüllen diese verbesserten Winkel nunmehr auch die Bedingungsgleichungen (**150**) genügend scharf:

I	39	48	59,2	IV	52	04	36,4	VII	34	03	44,5	X	47	41	08,8
II	33	37	40,1	V	58	52	11,9	VIII	29	14	12,6	XI	64	37	26,6
III	286	33	20,7	VI	249	03	11,8	IX	296	42	02,9	XII	247	41	24,6
	360	00	00,0		360	00	00,1		360	00	00,0		360	00	00,0

I	39	48	59,2		
IV + V	110	56	48,3	*log sin* (IV + V)	9.97 031
VIII	29	14	12,6	*cpl log sin* VIII	0.81 120
	180	00	00,1		
II	33	37	40,1		
VII	34	03	44,5	*log sin* VII	9.74 826
X + XI	112	18	35,4	*cpl log sin* (X + XI)	0.03 379
	180	00	00,0		
I + II	73	26	39,3		
X	47	41	08,8	*log sin* X	9.86 892
V	58	52	11,9	*cpl log sin* V	0.06 753
	180	00	00,0		0.00 001

Die Richtigkeit der Rechnung ist hiermit nach allen Seiten sichergestellt.

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ergiebt sich zu:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[p(n)(n)]}{r}} = \pm\sqrt{\frac{1210}{8}} = \pm\, 12{,}3''. \tag{164}$$

Da sämtliche Beobachtungsergebnisse das Gewicht 1 haben, stimmt der mittlere Fehler m derselben mit dem mittleren Fehler m der Gewichtseinheit überein.

§ 50. Bildung der reduzirten Endgleichungen aus reduzirten Bedingungs- und Korrelatengleichungen.*)

1. Die Faktoren der Endgleichungen ergeben sich bei dem Verfahren für bedingte Beobachtungen aus den Faktoren der Bedingungs- und Korrelatengleichungen a, b, c, ... und den reziproken Werthen $\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_3}, \frac{1}{p_4}, \ldots$ der Gewichte in ganz ähnlicher Weise wie sich diese Faktoren bei dem Verfahren für vermittelnde Beobachtungen aus den Faktoren a, b, c, ... der Fehlergleichungen und den Gewichten p_1, p_2, p_3, ... ergeben. Daher können wir auch in ähnlicher Weise wie wir bei dem letztern Verfahren die reduzirten Endgleichungen in geeigneten Fällen direkt aus reduzirten Fehlergleichungen gebildet haben, bei dem Verfahren für bedingte Beobachtungen die reduzirten Endgleichungen direkt aus reduzirten Bedingungs- und Korrelatengleichungen bilden.

2. Sind die Faktoren a_1, a_2, a_3, a_4, ... der ersten Bedingungsgleichung sämtlich gleich $+1$, liegen also die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} (1) + (2) + (3) + (4) + \cdots = f_a, \\ b_1(1) + b_2(2) + b_3(3) + b_4(4) + \cdots = f_b, \\ c_1(1) + c_2(2) + c_3(3) + c_4(4) + \cdots = f_c, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{155}$$

vor, so ergeben sich daraus die folgenden Korrelaten- und Endgleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} (1) = \frac{1}{p_1}k_a + \frac{b_1}{p_1}k_b + \frac{c_1}{p_1}k_c + \cdots, \\ (2) = \frac{1}{p_2}k_a + \frac{b_2}{p_2}k_b + \frac{c_2}{p_2}k_c + \cdots, \\ (3) = \frac{1}{p_3}k_a + \frac{b_3}{p_3}k_b + \frac{c_3}{p_3}k_c + \cdots, \\ (4) = \frac{1}{p_4}k_a + \frac{b_4}{p_4}k_b + \frac{c_4}{p_4}k_c + \cdots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \tag{156}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\frac{1}{p}\right]k_a + \left[\frac{b}{p}\right]k_b + \left[\frac{c}{p}\right]k_c + \cdots = f_a, \\ \left[\frac{b}{p}\right]k_a + \left[\frac{bb}{p}\right]k_b + \left[\frac{bc}{p}\right]k_c + \cdots = f_b, \\ \left[\frac{c}{p}\right]k_a + \left[\frac{bc}{p}\right]k_b + \left[\frac{cc}{p}\right]k_c + \cdots = f_c, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{157}$$

Aus der ersten Endgleichung folgt:

$$k_a = -\frac{\left[\frac{b}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}k_b - \frac{\left[\frac{c}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}k_c - \cdots + \frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a.$$

*) Vergleiche: Schleiermacher's Methode der Winkelausgleichung in einem Dreiecksnetze von Professor Nell in Darmstadt. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1881, Heft 1 und 3, 1883, Heft 12.

Wird dieser Ausdruck für k_a in die beiden letzten Gleichungen eingesetzt, so ergeben sich die folgenden reduzirten Endgleichungen:

$$\left(\left[\frac{bb}{p}\right]-\frac{\left[\frac{b}{p}\right]\left[\frac{b}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right)k_b+\left(\left[\frac{bc}{p}\right]-\frac{\left[\frac{b}{p}\right]\left[\frac{c}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right)k_c+\cdots\cdot=f_b-\frac{\left[\frac{b}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a,$$

$$\left(\left[\frac{bc}{p}\right]-\frac{\left[\frac{b}{p}\right]\left[\frac{c}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right)k_b+\left(\left[\frac{cc}{p}\right]-\frac{\left[\frac{c}{p}\right]\left[\frac{c}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right)k_c+\cdots\cdot=f_c-\frac{\left[\frac{c}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

3. Dieselben reduzirten Endgleichungen ergeben sich aus den folgenden reduzirten Bedingungs- und Korrelatengleichungen:

$$(166)\quad\begin{cases} b_1((1))+b_2((2))+b_3((3))+b_4((4))+\cdots+\left[\frac{b}{p}\right]((n+1))=f_b-\frac{\left[\frac{b}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a,\\ c_1((1))+c_2((2))+c_3((3))+c_4((4))+\cdots+\left[\frac{c}{p}\right]((n+1))=f_c-\frac{\left[\frac{c}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

$$(167)\quad\begin{cases} ((1))=\frac{b_1}{p_1}k_b+\frac{c_1}{p_1}k_c+\cdots\cdot,\\ ((2))=\frac{b_2}{p_2}k_b+\frac{c_2}{p_2}k_c+\cdots\cdot,\\ ((3))=\frac{b_3}{p_3}k_b+\frac{c_3}{p_3}k_c+\cdots\cdot,\\ ((4))=\frac{b_4}{p_4}k_b+\frac{c_4}{p_4}k_c+\cdots\cdot,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ ((n+1))=-\frac{\left[\frac{b}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}k_b-\frac{\left[\frac{c}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}k_c-\cdots\cdot \end{cases}$$

Denn wenn die in den reduzirten Korrelatengleichungen für ((1)), ((2)), ((3)), ((4)), $\cdots\cdot$ gegebenen Ausdrücke in die reduzirten Bedingungsgleichungen eingesetzt werden, so liefern sie die Beiträge $\left[\frac{bb}{p}\right]$, $\left[\frac{bc}{p}\right]$, $\cdots\cdot$ $\left[\frac{cc}{p}\right]$, $\cdots\cdot$ zu den Faktoren der reduzirten Endgleichungen und wenn der Ausdruck für ((n + 1)) in dieselben Gleichungen eingesetzt wird, so liefert er die Beiträge $-\frac{\left[\frac{b}{p}\right]\left[\frac{b}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}$, $-\frac{\left[\frac{b}{p}\right]\left[\frac{c}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}$, $\cdots\cdot$ $-\frac{\left[\frac{c}{p}\right]\left[\frac{c}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}$, $\cdots\cdot$, so dafs also die Ausdrücke für ((1)), ((2)), ((3)), ((4)), $\cdots\cdot$ ((n + 1)) zusammen die Faktoren der obigen reduzirten Endgleichungen liefern.

Nachdem k_b, k_c, $\cdots\cdot$ durch Auflösung der reduzirten Endgleichungen berechnet sind, ergiebt sich k_a nach der bereits angeführten Formel:

$$(168)\quad k_a=-\frac{\left[\frac{b}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}k_b-\frac{\left[\frac{c}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}k_c-\cdots\cdot+\frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a=((n+1))+\frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a.$$

Ferner ergiebt sich für die wahrscheinlichsten Werthe der Verbesserungen (1), (2), (3), (4), ... aus den Korrelatengleichungen (156) und (167):

$$(169)\quad \begin{cases} (1) = ((1)) + \frac{1}{p_1} k_a, \\ (2) = ((2)) + \frac{1}{p_2} k_a, \\ (3) = ((3)) + \frac{1}{p_3} k_a, \\ (4) = ((4)) + \frac{1}{p_4} k_a, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Dem sich bei Auflösung der reduzirten Endgleichungen ergebenden Betrage $\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 + \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3 + \cdots$ ist nach Formel (161) der Betrag $\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$, oder da hier $\mathfrak{a}_1 = \left[\frac{1}{p}\right]$, $\mathfrak{f}_1 = -f_a$ ist, der Betrag $\frac{f_a}{\left[\frac{1}{p}\right]} f_a$ hinzufügen, um $[p(\mathrm{n})(\mathrm{n})]$ zu erhalten.

4. Die Formeln (166) bis (169) vereinfachen sich, wenn die Gewichte p_1, p_2, p_3, p_4, ... sämtlich gleich 1 sind, wie folgt:

$$(170)\quad \begin{cases} b_1((1)) + b_2((2)) + b_3((3)) + b_4((4)) + \cdots + [b]((\mathrm{n}+1)) = f_b - \frac{[b]}{n} f_a, \\ c_1((1)) + c_2((2)) + c_3((3)) + c_4((4)) + \cdots + [c]((\mathrm{n}+1)) = f_c - \frac{[c]}{n} f_a, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , \end{cases}$$

$$(171)\quad \begin{cases} ((1)) = b_1 k_b + c_1 k_c + \cdots, \\ ((2)) = b_2 k_b + c_2 k_c + \cdots, \\ ((3)) = b_3 k_b + c_3 k_c + \cdots, \\ ((4)) = b_4 k_b + c_4 k_c + \cdots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\ ((\mathrm{n}+1)) = -\frac{[b]}{n} k_b - \frac{[c]}{n} k_c - \cdots, \end{cases}$$

$$(172)\quad k_a = -\frac{[b]}{n} k_b - \frac{[c]}{n} k_c - \cdots + \frac{1}{n} f_a = ((n+1)) + \frac{1}{n} f_a,$$

$$(173)\quad \begin{cases} (1) = ((1)) + k_a, \\ (2) = ((2)) + k_a, \\ (3) = ((3)) + k_a, \\ (4) = ((4)) + k_a, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Dem sich bei Auflösung der reduzirten Endgleichungen ergebenden Betrage $\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 + \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3 + \cdots$ ist in diesem Falle der Betrag $\frac{f_a}{n} f_a$ hinzuzufügen, um $[(\mathrm{n})(\mathrm{n})]$ zu erhalten.

5. Bei Anwendung der Formeln (166) bis (169) oder der Formeln (170) bis (173) ist zu beachten, dafs bei Bildung der Zahlenwerthe von $\left[\frac{1}{p}\right]$, $\left[\frac{b}{p}\right]$, $\left[\frac{c}{p}\right]$, ... und von n, $[b]$, $[c]$, ... nur diejenigen Zahlenwerthe von b, c, ... p anzurechnen sind, die in Korrelatengleichungen stehen, worin die Faktoren $a = +1$ vorkommen und dafs hierbei alle Korrelatengleichungen unberücksichtigt bleiben, worin die Faktoren $a = 0$ sind oder nicht vorkommen, da diese letztern

Korrelatengleichungen keine Beiträge zu den Faktoren $\left[\frac{aa}{p}\right], \left[\frac{ab}{p}\right], \left[\frac{ac}{p}\right], \ldots$ der Endgleichungen, woraus die Gröfsen $\left[\frac{1}{p}\right], \left[\frac{b}{p}\right], \left[\frac{c}{p}\right], \ldots, n, [b], [c], \ldots$ in der vorstehenden Formelentwicklung hervorgegangen sind, liefern.

6. Die Widersprüche $f_b - \frac{\left[\frac{b}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]} f_a,\ f_c - \frac{\left[\frac{c}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]} f_a, \ldots$ in den reduzirten Bedingungsgleichungen (**166**) können in der Weise gebildet werden, dafs den Beobachtungsergebnissen $1, 2, 3, 4, \ldots$ zunächst Verbesserungen $v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots$ beigefügt werden, die nach dem Verfahren für direkte Beobachtungen mehrerer Gröfsen, deren Summe einen bekannten Sollbetrag erfüllen mufs, aus der ersten Bedingungsgleichung berechnet werden und dafs dann die Widersprüche mit den so verbesserten Beobachtungsergebnissen $1+v_1,\ 2+v_2,\ 3+v_3,\ 4+v_4, \ldots$ berechnet werden. Die Verbesserungen $v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots$ ergeben sich nach den Formeln (**102**) wie folgt:

(**102**) $$v_1 = \frac{\frac{1}{p_1}}{\left[\frac{1}{p}\right]} f_a,\quad v_2 = \frac{\frac{1}{p_2}}{\left[\frac{1}{p}\right]} f_a,\quad v_3 = \frac{\frac{1}{p_3}}{\left[\frac{1}{p}\right]} f_a,\quad v_4 = \frac{\frac{1}{p_4}}{\left[\frac{1}{p}\right]} f_a, \ldots$$

Mit diesen Verbesserungen ergeben sich die Widersprüche nach den Formeln (**151**) und (**152**) zu:

$$F_b\left(\left(1+\frac{\frac{1}{p_1}}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a\right), \left(2+\frac{\frac{1}{p_2}}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a\right), \left(3+\frac{\frac{1}{p_3}}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a\right), \left(4+\frac{\frac{1}{p_4}}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a\right), \ldots\right)$$

$$= F_b(1, 2, 3, 4, \ldots) + \frac{\frac{b_1}{p_1}}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a + \frac{\frac{b_2}{p_2}}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a + \frac{\frac{b_3}{p_3}}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a + \frac{\frac{b_4}{p_4}}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a + \ldots$$

$$= \Sigma_b + \frac{\left[\frac{b}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a, \text{ so dafs}$$

$$S_b - F_b\left(\left(1-\frac{\frac{1}{p_1}}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a\right), \left(2+\frac{\frac{1}{p_2}}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a\right), \left(3+\frac{\frac{1}{p_3}}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a\right), \left(4+\frac{\frac{1}{p_4}}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a\right), \ldots\right)$$

$$= S_b - \Sigma_b - \frac{\left[\frac{b}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a = f_b - \frac{\left[\frac{b}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a$$

und ebenso

$$S_c - F_c\left(\left(1+\frac{\frac{1}{p_1}}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a\right), \left(2+\frac{\frac{1}{p_2}}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a\right), \left(3+\frac{\frac{1}{p_3}}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a\right), \left(4+\frac{\frac{1}{p_4}}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a\right), \ldots\right)$$

$$= f_c - \frac{\left[\frac{c}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a$$

. . . .

wird.

Die Verbesserungen $(\mathbf{1})=(1)-v_1$, $(\mathbf{2})=(2)-v_2$, $(\mathbf{3})=(3)-v_3$, $(\mathbf{4})=(4)-v_4$, ... die an den bereits durch Zusatz von v_1, v_2, v_3, v_4, verbesserten Beobachtungsergebnissen noch anzubringen sind, ergeben sich nach den unveränderten Korrelatengleichungen, wenn k_a nach der Formel berechnet wird, die sich aus der Formel (**168**) durch Weglassung des letzten Gliedes ergiebt, wenn k_a also gerechnet wird nach:

$$k_a = -\frac{\left[\frac{b}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]} k_b - \frac{\left[\frac{c}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]} k_c - \cdots = ((n+1)).$$

Sind die Gewichte $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$ sämtlich $=1$, so ergiebt sich die den Beobachtungsergebnissen beizufügende Verbesserung v nach Formel (**93**) zu:

$$v = \frac{1}{n} f_a,$$

wonach mit den verbesserten Beobachtungsergebnissen $1+\frac{1}{n}f_a$, $2+\frac{1}{n}f_a$, $3+\frac{1}{n}f_a$, $4+\frac{1}{n}f_a$, ... die Widersprüche $f_b - \frac{[b]}{n}f_a$, $f_c - \frac{[c]}{n}f_a$, ... der reduzirten Bedingungsgleichungen (**170**) erhalten werden.

Zur Erlangung der Verbesserungen $(\mathbf{1})=(1)-v$, $(\mathbf{2})=(2)-v$, $(\mathbf{3})=(3)-v$, $(\mathbf{4})=(4)-v$, ... ist k_a dann zu rechnen nach:

$$k_a = -\frac{[b]}{n} k_b - \frac{[c]}{n} k_c - \cdots = ((n+1)).$$

Beispiel 1: Die in unserm Beispiele erhaltenen Bedingungs- und Korrelatengleichungen sind, wenn wir zur Gewinnung einer bessern Uebersicht, für alle Faktoren, die nicht $=0$ sind, die Bezeichnungen a, b, c, ... wieder einführen:

$$(\mathbf{155})\ \left\{\begin{array}{ll} a_1(1)+a_2(2)+a_3(3)=f_a, & e_1(1)+e_4(4)+e_5(5)+e_8(8)=f_e, \\ b_4(4)+b_5(5)+b_6(6)=f_b, & g_2(2)+g_7(7)+g_{10}(10)+g_{11}(11)=f_g, \\ c_7(7)+c_8(8)+c_9(9)=f_c, & h_1(1)+h_2(2)+h_5(5)+h_{10}(10)=f_h, \\ d_{10}(10)+d_{11}(11)+d_{12}(12)=f_d, & \\ \multicolumn{2}{l}{i_4(4)+i_5(5)+i_7(7)+i_8(8)+i_{10}(10)+i_{11}(11)=f_i,} \end{array}\right.$$

$$(\mathbf{156})\ \left\{\begin{array}{ll} (1)=a_1k_a+e_1k_e+h_1k_h, & (7)=c_7k_c+g_7k_g+i_7k_i, \\ (2)=a_2k_a+g_2k_g+h_2k_h, & (8)=c_8k_c+e_8k_e+i_8k_i, \\ (3)=a_3k_a, & (9)=c_9k_c, \\ (4)=b_4k_b+e_4k_e+i_4k_i, & (10)=d_{10}k_d+g_{10}k_g+h_{10}k_h+i_{10}k_i, \\ (5)=b_5k_b+e_5k_e+h_5k_h+i_5k_i, & (11)=d_{11}k_d+g_{11}k_g+i_{11}k_i, \\ (6)=b_6k_b, & (12)=d_{12}k_d. \end{array}\right.$$

In diesen Gleichungen ist $a_1=a_2=a_3=+1$ und sämtliche Gewichte sind ebenfalls $=1$. Wir können die Gleichungen also nach den Formeln (**170**) und (**171**) reduziren. Zu diesem Zweck bilden wir zuerst n, $[b]$, $[c]$, ..., wobei wir nach Nr. 5 nur die drei ersten Korrelatengleichungen berücksichtigen, da nur in diesen die Faktoren a vorkommen. Wir erhalten:

$$n=3,\ [b]=0,\ [c]=0,\ [d]=0,\ [e]=+e_1,\ [g]=+g_2,\ [h]=h_1+h_2,\ [i]=0,$$

und damit die reduzirten Bedingungs- und Korrelatengleichungen:

$$(170)\begin{cases} b_4\,(4)+b_5\,(5)+b_6\,(6)=f_b, & e_1((1))+e_4(4)+e_5(5)+e_8(8) \\ & \quad +e_1((13))=f_e-\frac{e_1}{3}f_a, \\ c_7\,(7)+c_8\,(8)+c_9\,(9)=f_c, & g_2((2))+g_7(7)+g_{10}(10)+g_{11}(11) \\ & \quad +g_2((13))=f_g-\frac{g_2}{3}f_a, \\ d_{10}(10)+d_{11}(11)+d_{12}(12)=f_d, & h_1((1))+h_2((2))+h_5(5)+h_{10}(10) \\ & \quad +(h_1+h_2)((13))=f_h-\frac{h_1+h_2}{3}f_a, \\ i_4(4)+i_5(5)+i_7(7)+i_8(8)+i_{10}(10)+i_{11}(11)=f_i, & \end{cases}$$

$$(171)\begin{cases} ((1))=e_1k_e+h_1k_h, & (7)=c_7k_c+g_7k_g+i_7k_i, \\ ((2))=g_2k_g+h_2k_h, & (8)=c_8k_c+e_8k_e+i_8k_i, \\ ((3))=0, & (9)=c_9k_c, \\ (4)=b_4k_b+e_4k_e+i_4k_i, & (10)=d_{10}k_d+g_{10}k_g+h_{10}k_h+i_{10}k_i, \\ (5)=b_5k_b+e_5k_e+h_5k_h+i_5k_i, & (11)=d_{11}k_d+g_{11}k_g+i_{11}k_i, \\ (6)=b_6k_b, & (12)=d_{12}k_d, \\ & ((13))=-\frac{e_1}{3}k_e-\frac{g_2}{3}k_g-\frac{h_1+h_2}{3}k_h. \end{cases}$$

$$(172)\qquad k_a=((13))+\frac{1}{3}f_a. \qquad\qquad (173)\quad \begin{cases}(1)=((1))+k_a, \\ (2)=((2))+k_a, \\ (3)=k_a. \end{cases}$$

In diesen reduzirten Bedingungs- und Korrelatengleichungen ist nun weiter $b_4=b_5=b_6=+1$, während die übrigen Faktoren b sämtlich gleich Null sind, so dafs wir diese Gleichungen nach den Formeln **(170)** und **(171)** weiter reduziren können. Die Faktoren b kommen nur in der 4., 5. und 6. Korrelatengleichung vor, und wir erhalten:

$$n=3,\ [c]=0,\ [d]=0,\ [e]=e_4+e_5,\ [g]=0,\ [h]=h_5,\ [i]=i_4+i_5.$$

Nach Ausführung dieser Reduktion erhalten wir Gleichungen, worin die nur in der 7., 8. und 9. Korrelatengleichung vorkommenden Faktoren c ebenfalls gleich $+1$ sind, so dafs wir weiter reduziren können. Wir erhalten hierfür:

$$n=3,\ [d]=0,\ [e]=e_8,\ [g]=g_7,\ [h]=0,\ [i]=i_7+i_8.$$

Auch nach Ausführung dieser Reduktion können wir noch weiter reduziren, da in den reduzirten Gleichungen $d_{10}=d_{11}=d_{12}=+1$ ist, und weitere Faktoren d nicht vorkommen. Wir erhalten hierfür aus der 10., 11. und 12. Korrelatengleichung:

$$n=3,\ [e]=0,\ [g]=g_{10}+g_{11},\ [h]=h_{10},\ [i]=i_{10}+i_{11}.$$

Führen wir die vorbezeichneten 3 Reduktionen gemeinschaftlich aus, so ergeben sich die folgenden reduzirten Bedingungs- und Korrelatengleichungen:

$$(170)\begin{cases} e_1((1))+e_4((4))+e_5((5))+e_8((8))+e_1((13))+(e_4+e_5)((14)) \\ \qquad +e_8((15))=f_e-\frac{e_1}{3}f_a-\frac{e_4+e_5}{3}f_b-\frac{e_8}{3}f_c, \\ g_2((2))+g_7((7))+g_{10}((10))+g_{11}((11))+g_2((13))+g_7((15)) \\ \qquad +(g_{10}+g_{11})((16))=f_g-\frac{g_2}{3}f_a-\frac{g_7}{3}f_c-\frac{g_{10}+g_{11}}{3}f_d, \\ h_1((1))+h_2((2))+h_5((5))+h_{10}((10))+(h_1+h_2)((13))+h_5((14)) \\ \qquad +h_{10}((16))=f_h-\frac{h_1+h_2}{3}f_a-\frac{h_5}{3}f_b-\frac{h_{10}}{3}f_d, \\ i_4((4))+i_5((5))+i_7((7))+i_8((8))+i_{10}((10))+i_{11}((11)) \\ \qquad +(i_4+i_5)((14))+(i_7+i_8)((15))+(i_{10}+i_{11})((16)) \\ \qquad =f_i-\frac{i_4+i_5}{3}f_b-\frac{i_7+i_8}{3}f_c-\frac{i_{10}+i_{11}}{3}f_d, \end{cases}$$

$$
(171)\left\{\begin{array}{ll}
((1)) = e_1 k_e + h_1 k_h, & ((10)) = g_{10} k_g + h_{10} k_h + i_{10} k_i, \\
((2)) = g_2 k_g + h_2 k_h, & ((11)) = g_{11} k_g + i_{11} k_i, \\
((3)) = 0, & ((12)) = 0, \\
((4)) = e_4 k_e + i_4 k_i, & ((13)) = -\frac{e_1}{3} k_e - \frac{g_2}{3} k_g - \frac{h_1 + h_2}{3} k_h, \\
((5)) = e_5 k_e + h_5 k_h + i_5 k_i, & ((14)) = -\frac{e_4 + e_5}{3} k_e - \frac{h_5}{3} k_h - \frac{i_4 + i_5}{3} k_i, \\
((6)) = 0, & \\
((7)) = g_7 k_g + i_7 k_i, & ((15)) = -\frac{e_8}{3} k_e - \frac{g_7}{3} k_g - \frac{i_7 + i_8}{3} k_i, \\
((8)) = e_8 k_e + i_8 k_i, & \\
((9)) = 0, & ((16)) = -\frac{g_{10} + g_{11}}{3} k_g - \frac{h_{10}}{3} k_h - \frac{i_{10} + i_{11}}{3} k_i,
\end{array}\right.
$$

oder wenn für e, g, h, i, f die im § 47 erhaltenen Zahlenwerthe eingeführt werden:

$$
(170)\left\{\begin{array}{l}
((1)) + ((4)) + ((5)) + ((8)) + ((13)) + 2\,((14)) + ((15)) \\
\qquad = +29 - \frac{1}{3}(+16) - \frac{2}{3}(+13) - \frac{1}{3}(-24) = +23, \\
((2)) + ((7)) + ((10)) + ((11)) + ((13)) + ((15)) + 2\,((16)) \\
\qquad = -8 - \frac{1}{3}(+16) - \frac{1}{3}(-24) - \frac{2}{3}(+19) = -18, \\
((1)) + ((2)) + ((5)) + ((10)) + 2\,((13)) + ((14)) + ((16)) \\
\qquad = +15 - \frac{2}{3}(+16) - \frac{1}{3}(+13) - \frac{1}{3}(+19) = -6{,}333, \\
-0{,}081\,((4)) - 0{,}208\,((5)) + 0{,}311\,((7)) - 0{,}376\,((8)) + 0{,}278\,((10)) \\
\qquad + 0{,}086\,((11)) - 0{,}289\,((14)) - 0{,}065\,((15)) + 0{,}364\,((16)) = -13 \\
\qquad - \frac{-0{,}289}{3}(+13) - \frac{-0{,}065}{3}(-24) - \frac{+0{,}364}{3}(+19) = -14{,}573,
\end{array}\right.
$$

Nr.		p.	e.	g.	h.	i.	f.	$\frac{ee}{p}$.	$\frac{eg}{p}$.	$\frac{eh}{p}$.	$\frac{ei}{p}$.	$\frac{ef}{p}$.
1	$a_1 = +1$	1	+1	.	+1	.		+1	.	+1	.	
2	$a_2 = +1$	1	.	+1	+1	.		.	.	.	.	
3	$a_3 = +1$	1	.	.	.	.		.	.	.	.	
4	$b_4 = +1$	1	+1	.	.	−0,081		+1	.	.	−0,081	
5	$b_5 = +1$	1	+1	.	+1	−0,208		+1	.	+1	−0,208	
6	$b_6 = +1$	1	.	.	.	.		.	.	.	.	
7	$c_7 = +1$	1	.	+1	.	+0,311		.	.	.	.	
8	$c_8 = +1$	1	+1	.	.	−0,376		+1	.	.	−0,376	
9	$c_9 = +1$	1	.	.	.	.		.	.	.	.	
10	$d_{10} = +1$	1	.	+1	+1	+0,278		.	.	.	.	
11	$d_{11} = +1$	1	.	+1	.	+0,086		.	.	.	.	
12	$d_{12} = +1$	1	.	.	.	.		.	.	.	.	
13		−3	+1	+1	+2	.	$f_a = +16$	$-1/3$	$-1/3$	$-2/3$	.	$-16/3$
14		−3	+2	.	+1	−0,289	$f_b = +13$	$-4/3$	.	$-2/3$	+0,193	$-26/3$
15		−3	+1	+1	.	−0,065	$f_c = -24$	$-1/3$	$-1/3$	.	+0,022	$+24/3$
16		−3	.	+2	+1	+0,364	$f_d = +19$	.	.	.	.	.
											$f_e =$	+29,000
								+2	$-2/3$	$+2/3$	−0,450	+23,000

$$(171)\quad \left\{\begin{array}{l|l|l}
((1)) = k_e + k_h, & ((7)) = k_g + 0{,}311\,k_i, & ((13)) = -\frac{1}{3}k_e - \frac{1}{3}k_g - \frac{2}{3}k_h, \\
((2)) = k_g + k_h, & ((8)) = k_e - 0{,}376\,k_i, & \\
((3)) = 0, & ((9)) = 0, & ((14)) = -\frac{2}{3}k_e - \frac{1}{3}k_h - \frac{-0{,}289}{3}k_i, \\
((4)) = k_e - 0{,}081\,k_i, & ((10)) = k_g + k_h + 0{,}278\,k_i, & ((15)) = -\frac{1}{3}k_e - \frac{1}{3}k_g - \frac{-0{,}065}{3}k_i, \\
((5)) = k_e + k_h - 0{,}208\,k_i, & ((11)) = k_g + 0{,}086\,k_i, & ((16)) = -\frac{2}{3}k_g - \frac{1}{3}k_h - \frac{+0{,}364}{3}k_i. \\
((6)) = 0, & ((12)) = 0, &
\end{array}\right.$$

Weiter erhalten wir nach den Formeln (**172**) und (**173**):

$$(172)\quad k_a = ((13)) + \frac{1}{3}f_a, \quad k_b = ((14)) + \frac{1}{3}f_b, \quad k_c = ((15)) + \frac{1}{3}f_c, \quad k_d = ((16)) + \frac{1}{3}f_d.$$

$$(173)\quad \left\{\begin{array}{l|l|l|l}
(1) = ((1)) + k_a, & (4) = ((4)) + k_b, & (7) = ((7)) = k_c, & (10) = ((10)) + k_d, \\
(2) = ((2)) + k_a, & (5) = ((5)) + k_b, & (8) = ((8)) = k_c, & (11) = ((11)) + k_d, \\
(3) = k_a, & (6) = k_b, & (9) = k_c, & (12) = k_d.
\end{array}\right.$$

Aus den Faktoren der reduzirten Korrelatengleichungen (**171**) ergeben sich die Faktoren der reduzirten Endgleichungen in gewohnter Weise, wie die nachfolgende Tabelle zeigt.

In diese Tabelle ist alles mit aufgenommen, was erforderlich ist, um ohne weiteres die sämtlichen Faktoren der reduzirten Endgleichungen aus den Faktoren der Korrelatengleichungen (**156**) zu bilden. Letztere sind in die 2. bis 7. Spalte der Tabelle unter Nr. 1 bis 12 eingetragen. Daraus ergeben sich die Faktoren der 13., 14., 15. und 16. reduzirten Korrelatengleichung als Summe der Faktoren e, g, h, i in den die Faktoren a, b, c, d enthaltenden Korrelatengleichungen 1 bis 3, 4 bis 6, 7 bis 9, 10 bis 12 mit dem Gewichte, welches gleich ist der negativen Anzahl der betreffenden Korrelatengleichungen. In die 8. Spalte sind die Widersprüche

$\frac{gg}{p}$.	$\frac{gh}{p}$.	$\frac{gi}{p}$.	$\frac{gf}{p}$.	$\frac{hh}{p}$.	$\frac{hi}{p}$.	$\frac{hf}{p}$.	$\frac{ii}{p}$.	$\frac{if}{p}$.	$-\frac{ff}{p}$.
.	.	.		+1	.		.		
+1	+1	.		+1	.		.		
.	.	.		.	.		.		
.	.	.		.	.		+0,0066		
.	.	.		+1	−0,208		+0,0433		
.	.	.		.	.		.		
+1	.	+0,311		.	.		+0,0967		
.	.	.		.	.		+0,1414		
.	.	.		.	.		.		
+1	+1	+0,278		+1	+0,278		+0,0773		
+1	.	+0,086		.	.		+0,0074		
.	.	.		.	.		.		
−1/3	−2/3	.	−16/3	−4/3	.	−32/3	.		256/3
.	.	.	.	−1/3	+0,096	−13/3	−0,0278	+ 1,2523	169/3
−1/3	.	+0,022	+21/3	.	.	.	−0,0014	− 0,5200	576/3
−4/3	−2/3	−0,243	−38/3	−1/3	−0,121	−19/3	−0,0442	− 2,3053	361/3
		$f_g =$	− 8,000		$f_h =$	+ 15,000	$f_i =$	− 13,0000	
+2	+2/3	+0,454	−18,000	+2	+0,045	− 6,333	+0,2993	− 14,5730	454,000

f_a, f_b, f_c, f_d eingetragen, die mit den Faktoren und reziproken Werthen der Gewichte der 13., 14., 15., 16. reduzirten Korrelatengleichung multiplizirt die Beträge liefern, die zusammen mit den Widersprüchen f_e, f_g, f_h, f_i die Widersprüche der reduzirten Endgleichungen liefern. Wie danach aus den in der 3. bis 8. Spalte eingetragenen Zahlenwerthen die Faktoren der reduzirten Endgleichungen gebildet sind, ist ohne weiteres ersichtlich.

In die letzte Spalte sind die Beträge

$\left[\frac{ee}{p}\right]$.	$\left[\frac{eg}{p}\right]$.	$\left[\frac{eh}{p}\right]$.	$\left[\frac{ei}{p}\right]$.	$-\left[\frac{ef}{p}\right]$.	$\left[\frac{gg}{p}\right]$.	$\left[\frac{gh}{p}\right]$.	$\left[\frac{gi}{p}\right]$.
+ 2,000	− 0,667	+ 0,667	− 0,450	− 23,000	+ 2,000	+ 0,667	+ 0,454
	+ 0,333	− 0,333	+ 0,225	+ 11,500	− 0,222	+ 0,222	− 0,150
				− 11,423	+ 1,778	+ 0,889	+ 0,304
				+ 1,663		− 0,500	− 0,171
				+ 1,788			
			$k_e =$	+ 3,528			$k_g =$

Mit den für k_e, k_g, k_h, k_i erhaltenen Zahlenwerthen ergeben sich nach den reduzirten Korrelatengleichungen (**171**) die Zahlenwerthe für ((1)), ((2)), ((3)),.... ((16)) wie folgt:

$$((1)) = k_e + k_h = -1{,}46,$$
$$((2)) = k_g + k_h = +0{,}38,$$
$$((3)) = 0{,}00,$$
$$((4)) = k_e - 0{,}081\,k_i = +7{,}64,$$
$$((5)) = k_e + k_h - 0{,}208\,k_i = +9{,}11,$$
$$((6)) = 0{,}00,$$
$$((7)) = k_g + 0{,}311\,k_i = -10{,}44,$$
$$((8)) = k_e - 0{,}376\,k_i = +22{,}63,$$
$$((9)) = 0{,}00,$$
$$((10)) = k_g + k_h + 0{,}278\,k_i = -13{,}75,$$
$$((11)) = k_g + 0{,}086\,k_i = +0{,}99,$$
$$((12)) = 0{,}00,$$
$$((13)) = -\frac{1}{3}k_e - \frac{1}{3}k_g - \frac{2}{3}k_h = +0{,}362,$$
$$((14)) = -\frac{2}{3}k_e - \frac{1}{3}k_h - \frac{-0{,}289}{3}k_i = -5{,}583,$$
$$((15)) = -\frac{1}{3}k_e - \frac{1}{3}k_g - \frac{-0{,}065}{3}k_i = -4{,}064,$$
$$((16)) = -\frac{2}{3}k_g - \frac{1}{3}k_h - \frac{+0{,}364}{3}k_i = +4{,}251.$$

Hiermit ergiebt sich nach den Formeln (**172**):

$$k_a = ((13)) + \frac{1}{3}f_a = +5{,}695,$$
$$k_b = ((14)) + \frac{1}{3}f_b = -1{,}250,$$
$$k_c = ((15)) + \frac{1}{3}f_c = -12{,}064,$$
$$k_d = ((16)) + \frac{1}{3}f_d = +10{,}584.$$

$$\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1+\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2+\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3+\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4=\frac{f_a}{3}f_a+\frac{f_b}{3}f_b+\frac{f_c}{3}f_c+\frac{f_d}{3}f_d=-\left[\frac{ff}{p}\right]$$

aufgenommen, die die, durch die Reduktion weggefallenen 4 ersten reduzirten Endgleichungen zu der nach Formel (**161**) zu berechnenden Fehlerquadratsumme liefern.

Die Auflösung der reduzirten Endgleichungen ist in der folgenden Tabelle durchgeführt.

$-\left[\frac{gf}{p}\right]\cdot$	$\left[\frac{hh}{p}\right]\cdot$	$\left[\frac{hi}{p}\right]\cdot$	$-\left[\frac{hf}{p}\right]\cdot$	$\left[\frac{ii}{p}\right]\cdot$	$-\left[\frac{if}{p}\right]\cdot$	Probe.	
+ 18,000	+ 2,000	+ 0,045	+ 6,333	+ 0,2993	+ 14,5730	+ 454,000	+ 454,000
− 7,667	− 0,222	+ 0,150	+ 7,667	− 0,1012	− 5,1750	+ 264,500	+ 81,144
+ 10,333	− 0,445	− 0,152	− 5,167	− 0,0520	− 1,7668	+ 60,055	− 96,534
− 5,812	+ 1,333	+ 0,043	+ 8,833	− 0,0014	− 0,2849	+ 58,521	+ 31,591
+ 8,[illegible]81		− 0,0322	− 6,625	+ 0,1447	+ 7,3463	+ 372,967	+ 739,857
+ 2,494			+ 1,637			+ 1210,043	+ 1210,058
+ 5,363		$k_h =$	− 4,988	$k_i =$	− 50,769		

Endlich ergeben sich die wahrscheinlichsten Werthe der Verbesserungen (1), (2), (3), ... (12) nach den Formeln (**173**) mit:

$$\begin{aligned}
(1) &= ((1)) + k_a = +4{,}24, & (7) &= ((7)) + k_c = -22{,}50,\\
(2) &= ((2)) + k_a = +6{,}08, & (8) &= ((8)) + k_c = +10{,}57,\\
(3) &= + k_a = +5{,}70, & (9) &= + k_c = -12{,}06,\\
(4) &= ((4)) + k_b = +6{,}39, & (10) &= ((10)) + k_d = -\ 3{,}17,\\
(5) &= ((5)) + k_b = +7{,}86, & (11) &= ((11)) + k_d = +11{,}57,\\
(6) &= + k_b = -1{,}25, & (12) &= + k_d = +10{,}58.
\end{aligned}$$

Die Zahlenwerthe stimmen mit den im § 49 erhaltenen Zahlenwerthen bis auf kleine Abweichungen in der letzten Stelle überein.

Nach dem unter Nr. 6 geschilderten Verfahren ergeben sich die in die reduzirten Endgleichungen einzusetzenden Widersprüche wie folgt:

	n.			v.	n = n + v.				n.			v.	n = n + v.		
1	39	48	55	+ 5,3	39	49	00,3	7	34	04	07	− 8,0	34	03	59,0
2	33	37	34	+ 5,3	33	37	39,3	8	29	14	02	− 8,0	29	13	54,0
3	286	33	15	+ 5,3	286	33	20,3	9	296	42	15	− 8,0	296	42	07,0
Σ_a	359	59	44	+15,9	359	59	59,9	Σ_c	360	00	24	−24,0	360	00	00,0
S_a	360	00	00					S_c	360	00	00				
f_a		+	16					f_c		−	24				
4	52	04	30	+ 4,3	52	04	34,3	10	47	41	12	+ 6,3	47	41	18,3
5	58	52	04	+ 4,3	58	52	08,3	11	64	37	15	+ 6,3	64	37	21,3
6	249	03	13	+ 4,3	249	03	17,3	12	247	41	14	+ 6,3	247	41	20,3
Σ_b	359	59	47	+12,9	359	59	59,9	Σ_d	359	59	41	+18,9	359	59	59,9
S_b	360	00	00					S_d	360	00	00				
f_b		+	13					f_d		+	19				

	°	'	"		
1	39	49	00,3		
4 + **5**	110	56	42,7	*log sin* (**4** + **5**)	9.97 031
8	29	13	54,0	*cpl log sin* **8**	0.31 127
Σ_e	179	59	37,0		
S_e	180	00	00,0		
f_e		+	23,0		
2	33	37	39,3		
7	34	03	59,0	*log sin* **7**	9.74 831
10 + **11**	112	18	39,7	*cpl log sin* (**10** + **11**)	0.03 379
Σ_g	180	00	18,0		
S_g	180	00	00,0		
f_g		—	18,0		
1 + **2**	73	26	39,7		
10	47	41	18,3	*log sin* **10**	9.86 894
5	58	52	08,3	*cpl log sin* **5**	0.06 753
Σ_h	180	00	06,3	Σ_i	0.00 015
S_h	180	00	00,0	S_i	0.00 000
f_h		—	6,3	f_i	— 15

Die Faktoren der reduzirten Endgleichungen werden im übrigen ebenso gebildet, wie auf Seite 220 und 221 gezeigt ist. Die Auflösung der reduzirten Endgleichungen ergiebt:

$$k_e = +2{,}97,\quad k_g = +5{,}81,\quad k_h = -4{,}87,\quad k_i = -53{,}73.$$

Hiermit ergiebt sich nach den Formeln (**171**):

((1)) = — 1,90,	((7)) = — 10,90,	
((2)) = + 0,94,	((8)) = + 23,17,	((13)) = + 0,32 = k_a,
((3)) = 0,00,	((9)) = 0,00,	((14)) = — 5,53 = k_b,
((4)) = + 7,32,	((10)) = — 14,00,	((15)) = — 4,09 = k_c,
((5)) = + 9,28,	((11)) = + 1,19,	((16)) = + 4,27 = k_d.
((6)) = 0,00,	((12)) = 0,00,	

Sodann ergeben sich die Verbesserungen (**1**), (**2**), (**3**), ... (**12**), die den bereits einmal durch Zulegung von v_1, v_2, v_3, ... v_{12} verbesserten Winkeln **1**, **2**, **3**, ... **12** noch beizufügen sind, nach den Formeln (**173**) zu:

(**1**) = — 1,6,	(**4**) = + 1,8,	(**7**) = — 15,0,	(**10**) = — 9,7,
(**2**) = + 1,3,	(**5**) = + 3,8,	(**8**) = + 19,1,	(**11**) = + 5,5,
(**3**) = + 0,3,	(**6**) = — 5,5,	(**9**) = — 4,1,	(**12**) = + 4,3.

Durch Zulegung dieser Verbesserungen ergeben sich die wahrscheinlichsten Werthe I, II, III, ... XII der Winkel zu:

I	= **1** + (**1**) =	39°	49'	00,3"	— 1,6"	=	39°	48'	58,7",
II	= **2** + (**2**) =	33	37	39,3	+ 1,3	=	33	37	40,6 ,
III	= **3** + (**3**) =	286	33	20,3	+ 0,3	=	286	33	20,6 ,
IV	= **4** + (**4**) =	52	04	34,3	+ 1,8	=	52	04	36,1 ,
V	= **5** + (**5**) =	58	52	08,3	+ 3,8	=	58	52	12,1 ,
VI	= **6** + (**6**) =	249	03	17,3	— 5,5	=	249	03	11,8 ,
VII	= **7** + (**7**) =	34	03	59,0	— 15,0	=	34	03	44,0 ,
VIII	= **8** + (**8**) =	29	13	54,0	+ 19,1	=	29	14	13,1 ,
IX	= **9** + (**9**) =	296	42	07,0	— 4,1	=	296	42	02,9 ,
X	= **10** + (**10**) =	47	41	18,3	— 9,7	=	47	41	08,6 ,
XI	= **11** + (**11**) =	64	37	21,3	+ 5,5	=	64	37	26,8 ,
XII	= **12** + (**12**) =	247	41	20,3	+ 4,3	=	247	41	24,6 ,

die mit den im § 49 erhaltenen Werthen bis auf 0,5″ übereinstimmen. Diese im Verhältnis zu den Beobachtungsfehlern bedeutungslose Abweichung rührt davon her, dafs sich bei dem hier eingeschlagenen Verfahren $f_h = -6{,}3$ und $f_i = -15$ ergeben hat, während sich im § 49 hierfür $-6{,}333$ und $-14{,}5742$ ergeben hat.

§ 51. Systematische Anordnung der Rechnungen.

1. Bei der praktischen Anwendung des Verfahrens für bedingte Beobachtungen kann die Aufstellung des Formelapparates in der Regel auf die Aufstellung der Bedingungsgleichungen (**150**) eingeschränkt werden, wenn die ganze Rechnung in zweckmäfsiger Weise systematisch geordnet wird. Nur in einzelnen Fällen kann allenfalls noch die Aufstellung der Formeln (**154**) für die Differenzialquotienten erforderlich werden. Dabei gewinnen die Rechnungen meistens noch an Uebersichtlichkeit und auch an Sicherheit, da mehr Proben in einfachster Weise gezogen werden können. Um zu zeigen, wie dies zu ermöglichen ist, ist das Beispiel 1 in solcher Weise geordnet auf Seite 226 bis 229 nochmals mitgeteilt. Zur Erläuterung diene folgendes:

2. Zuerst werden die Beobachtungsergebnisse durch arabische Ziffern fortlaufend nummerirt und die Nummern in die sich auf die vorliegende Aufgabe beziehende Figur übersichtlich eingetragen.

3. Sodann wird nach dem in den §§ 43 und 44 dargelegten Verfahren oder nach speziellen später zu entwickelnden Regeln die Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen festgestellt und die Aufsuchung der zu erfüllenden Bedingungen durchgeführt.

4. Hiernach werden die Objekte, worauf sich die zu erfüllenden Bedingungen beziehen, in geregelter Ordnung durch Buchstaben bezeichnet. Diese Buchstaben werden durch die ganze Rechnung beibehalten zur Bezeichnung der Faktoren der betreffenden umgeformten Bedingungsgleichungen und als Indices aller Gröfsen, die zu den Bedingungsgleichungen gehören. Defshalb werden Buchstaben, die in den allgemeinen Formeln eine besondere Bedeutung haben, hierbei nicht verwendet.

Wenn ein Teil der Bedingungsgleichungen später durch Reduktion der Bedingungs- und Korrelatengleichungen nach dem im § 50 dargelegten Verfahren wegfallen kann, werden die Objekte, wofür diese Bedingungsgleichungen gelten, zweckmäfsig durch die ersten oder durch die letzten Buchstaben bezeichnet.

Die Buchstaben zur Bezeichnung der Objekte werden ebenfalls in die Hauptfigur oder in Nebenfiguren für die einzelnen Objekte eingetragen.

Im vorliegenden Beispiele sind die 4 Punkte △1, △2, △3, △4, deren Winkel die Bedingungen erfüllen müssen, dafs die Winkelsumme 360° ist, mit P_a, P_b, P_c, P_d bezeichnet. Es sind für diese Objekte die ersten Buchstaben gewählt, weil die zugehörigen Bedingungsgleichungen später durch Reduktion der Bedingungs- und Korrelatengleichungen wegfallen. Sodann sind die Dreiecke △△ 1 2 3, △△ 3 1 4, △△ 4 1 2, deren Winkel die Bedingung erfüllen müssen, dafs die Winkelsumme 180° ist, in der Reihenfolge, wie sie in der folgenden Seitenberechnung vorkommen, mit e, g, h bezeichnet, unter Vermeidung des Buchstabens f, der in den allgemeinen Formeln zur Bezeichnung der Widersprüche dient. Die Bezeichnungen sind in kleine in die Hauptfigur eingezeichnete Dreiecke eingetragen. Endlich ist das Viereck △△ 1 2 3 4, worin die Bedingung erfüllt werden mufs, dafs die Seitenberechnung ohne Fehler abschliefst, mit i bezeichnet. Die Seite △1 — △2, wovon bei der Seitenberechnung ausgegangen wird und worauf die

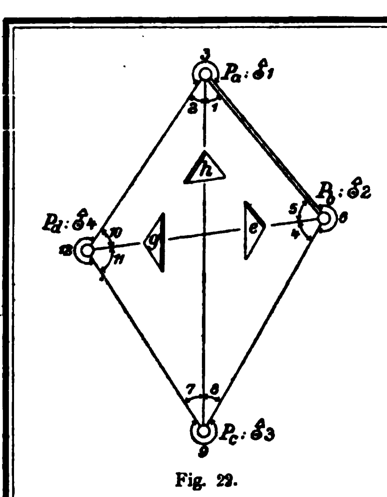


Fig. 29.

1. Bedingungsgleichungen.

P_a: I + II + III = 360°,
P_b: IV + V + VI = 360°,
P_c: VII + VIII + IX = 360°,
P_d: X + XI + XII = 360°,
Δ_e: I + IV + V + VIII = 180°,
Δ_g: II + VII + X + XI = 180°,
Δ_h: I + II + V + X = 180°,

$$\text{◈ } i: \frac{\sin(\mathrm{IV}+\mathrm{V})\,\sin\mathrm{VII}\,\sin\mathrm{X}}{\sin\mathrm{VIII}\,\sin(\mathrm{X}+\mathrm{XI})\,\sin\mathrm{V}} = 1.$$

2. Berechnung der Widersprüche und Zusammenstellung der Verbesserungen.

Bezeichnung der Punkte.	Winkel.	Beobachtete Winkel n. °	′	″	v.	″	n = n + v. °	′	″	Verbesserungen (n).		″
1.	2.	3.			4.		5.			6.		
P_a : ♁ 1	1	39	48	55	+	5,3	39	49	00,3	(1)	−	1,1
	2	33	37	34	+	5,3	33	37	39,3	(2)	+	1,0
	3	286	33	15	+	5.3	286	33	20,3	(3)	+	0,1
	Σ_a	359	59	44	+	15,9	359	59	59,9			0,0
	S_a	360	00	00								
	f_a		+	16								
P_b : ♁ 2	4	52	04	30	+	4,3	52	04	34,3	(4)	+	2,0
	5	58	52	04	+	4,3	58	52	08,3	(5)	+	3,5
	6	249	03	13	+	4,3	249	03	17,3	(6)	−	5,5
	Σ_b	359	59	47	+	12,9	359	59	59,9			0,0
	S_b	360	00	00								
	f_b		+	13								
P_c : ♁ 3	7	34	04	07	−	8,0	34	03	59,0	(7)	−	14,8
	8	29	14	02	−	8,0	29	13	54,0	(8)	+	18,8
	9	296	42	15	−	8,0	296	42	07,0	(9)	−	4,0
	Σ_c	360	00	24	−	24,0	360	00	00,0			0,0
	S_c	360	00	00								
	f_c		−	24								
P_d : ♁ 4	10	47	41	12	+	6,3	47	41	18,3	(10)	−	9,4
	11	64	37	15	+	6,3	64	37	21,3	(11)	+	5,4
	12	247	41	14	+	6,3	247	41	20,3	(12)	+	4,0
	Σ_d	359	59	41	+	18,9	359	59	59,9			0,0
	S_d	360	00	00								
	f_d		+	19								

2a. Berechnung der Widersprüche und Zusammenstellung der Verbesserungen.

Bezeichnung der Dreiecke.	Punkte.	Winkel.	Winkel n. °	′	″	Verbesserungen (n) der Winkel.		″	cpl log sin α. log sin β.	Verbesserungen i (n) der Logarithmen.		
1.	2.	3.	4.			5.			6.	7.		
e.	△ 3	α: 8	29	13	54,0	(8)	+	18,8	0.31 127	−0,38 (8)	—	7,1
	△ 2	β: 4 + 5	110	56	42,6	(4) + (5)	+	5,5	9.97 081	−0,08 ((4) + (5))	—	0,4
	△ 1	γ: 1	39	49	00,3	(1)	—	1,1				
		Σ_e	179	59	36,9		+	23,2				
		S_e	180	00	00,0							
		f_e		+	23,1							
g.	△ 4	α: 10 + 11	112	18	39,6	(10) + (11)	—	4,0	0.03 379	+0,08 ((10) + (11))	—	0,3
	△ 3	β: 7	34	03	59,0	(7)	—	14,8	9.74 831	+0,32 (7)	—	4,7
	△ 1	γ: 2	33	37	39,3	(2)	+	0,9				
		Σ_g	180	00	17,9		—	17,9				
		S_g	180	00	00,0							
		f_g		—	17,9							
h.	△ 2	α: 5	58	52	08,3	(5)	+	3,5	0.06 753	−0,12 (5)	—	0,4
	△ 4	β: 10	47	41	18,3	(10)	—	9,4	9.86 894	+0,20 (10)	—	1,9
	△ 1	γ: 1 + 2	73	26	39,6	(1) + (2)	—	0,1				
		Σ_h	180	00	06,2		—	6,0	0.00 015	$= \Sigma_i$	—	14,8
		S_h	180	00	00,0				0.00 000	$= S_i$		
		f_h		—	6,2				— 15	$= f_i$		

3. Faktoren der Korrelatengleichungen.

Nr.		p.	e.	g.	h.	i.
1	$a_1 = +1$	1	+1	.	+1	.
2	$a_2 = +1$	1	.	+1	+1	.
3	$a_3 = +1$	1	.	.	.	.
4	$b_4 = +1$	1	+1	.	.	−0,08
5	$b_5 = +1$	1	+1	.	+1	−0,20
6	$b_6 = +1$	1	.	.	.	.
7	$c_7 = +1$	1	.	+1	.	+0,32
8	$c_8 = +1$	1	+1	.	.	−0,38
9	$c_9 = +1$	1	.	.	.	.
10	$d_{10} = +1$	1	.	+1	+1	+0,28
11	$d_{11} = +1$	1	.	+1	.	+0,08
12	$d_{12} = +1$	1	.	.	.	.
13		−3	+1	+1	+2	.
14		−3	+2	.	+1	−0,28
15		−3	+1	+1	.	−0,06
16		−3	.	+2	+1	+0,36

4. Bildung der Faktoren der Endgleichungen.

$\frac{ee}{p}$.	$\frac{eg}{p}$.	$\frac{eh}{p}$.	$\frac{ei}{p}$.	$\frac{gg}{p}$.	$\frac{gh}{p}$.	$\frac{gi}{p}$.	$\frac{hh}{p}$.	$\frac{hi}{p}$.	$\frac{ii}{p}$.
+1	.	+1	.	.	.	.	+1	.	.
.	.	.	.	+1	+1	.	+1	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
+1	.	.	−0,08	.	.	.	.	.	+0,0064
+1	.	+1	−0,20	.	.	.	+1	−0,20	+0,0400
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	+1	.	+0,32	.	.	+0,1024
+1	.	.	−0,38	.	.	.	.	.	+0,1444
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	+1	+1	+0,28	+1	+0,28	+0,0784
.	.	.	.	+1	.	+0,08	.	.	+0,0064
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
−1/3	−1/3	−2/3	.	−1/3	−2/3	.	−4/3	.	.
−4/3	.	−2/3	+0,19	.	.	.	−1/3	+0,09	−0,0261
−1/3	−1/3	.	+0,02	−1/3	.	+0,02	.	.	−0,0012
.	.	.	.	−4/3	−2/3	−0,24	−1/3	−0,12	−0,0432
+2	−2/3	+2/3	−0,45	+2	+2/3	+0,46	+2	+0,05	+0,3075

5. Auflösung der

$\left[\frac{ee}{p}\right]$.		$\left[\frac{eg}{p}\right]$.		$\left[\frac{eh}{p}\right]$.		$\left[\frac{ei}{p}\right]$.		$-f_e$.		$\left[\frac{gg}{p}\right]$.		$\left[\frac{gh}{p}\right]$.		$\left[\frac{gi}{p}\right]$.	
+	2,00	−	0,67	+	0,67	−	0,45	−	23,10	+	2,00	+	0,67	+	0,46
		+	0,33	−	0,33	+	0,225	+	11,55	−	0,22	+	0,22	−	0,15
								−	11,46	+	1,78	+	0,89	+	0,31
								+	1,55			−	0,50	−	0,174
								+	1,82						
							$k_e =$	+	3,46						$k_g =$

6. Berechnung der Verbesserungen (n).

Nr.	$\frac{e}{p}k_e$		+ $\frac{g}{p}k_g$		+ $\frac{h}{p}k_h$		+ $\frac{i}{p}k_i$		= (n).		(n).			(n)(n).
1	+	3,46		.	−	4,66		.	−	1,20	$((1)) + k_a$	−	1,06	1,1
2		.	+	5,47	−	4,66		.	+	0,81	$((2)) + k_a$	+	0,95	0,9
3		.		.		.		.		.	$((3)) + k_a$	+	0,14	0,0
4	+	3,46		.		.	+	4,08	+	7,54	$((4)) + k_b$	+	2,02	4,1
5	+	3,46		.	−	4,66	+	10,19	+	8,99	$((5)) + k_b$	+	3,47	12,0
6		.		.		.		.			$((6)) + k_b$	−	5,52	30,5
7		.	+	5,47		.	−	16,30	−	10,83	$((7)) + k_c$	−	14,82	219,6
8	+	3,46		.		.	+	19,36	+	22,82	$((8)) + k_c$	+	18,83	354,6
9		.		.		.					$((9)) + k_c$	−	3,99	15,9
10		.	+	5,47	−	4,66	−	14,27	−	13,46	$((10)) + k_d$	−	9,45	89,3
11		.	+	5,47		.	−	4,08	+	1,39	$((11)) + k_d$	+	5,40	29,2
12		.		.		.		.		.	$((12)) + k_d$	+	4,01	16,1
												$[p(n)(n)]$		773,3
13	−	1,15	−	1,82	+	3,11		.	+	0,14	$= k_a$	$\frac{f_a}{3} f_a$		85,3
14	−	2,31		.	+	1,55	−	4,76	−	5,52	$= k_b$			
15	−	1,15	−	1,82		.	−	1,02	−	3,99	$= k_c$	$\frac{f_b}{3} f_b$		56,3
16		.	−	3,65	+	1,55	+	6,11	+	4,01	$= k_d$			
	+	9,23	+	14,59	−	12,43	−	0,69	+	10,70		$\frac{f_c}{3} f_c$		192,0
												$\frac{f_d}{3} f_d$		120,3
												$[p(n)(n)]$		1227,2

$$\mathfrak{m} = m = \pm\sqrt{\frac{[p(n)(n)]}{r}} + \pm\sqrt{\frac{1227,2}{8}} = \pm 12,4''$$

Endgleichungen.

$-f_g$.	$\left[\frac{hh}{p}\right]$.	$\left[\frac{hi}{p}\right]$.	$-f_h$.	$\left[\frac{ii}{p}\right]$.	$-f_i$.	Probe.	
+ 17,90	+ 2,00	+ 0,05	+ 6,20	+ 0,308	+ 15,000		
− 7,70	− 0,22	+ 0,15	+ 7,70	− 0,101	− 5,198	− 266,80	− 79,93
+ 10,20	− 0,45	− 0,15	− 5,10	− 0,054	− 1,775	− 58,45	+ 97,91
− 5,73	+ 1,33	+ 0,05	+ 8,80	− 0,002	− 0,834	− 58,08	− 28,89
+ 8,87		− 0,038	− 6,60	+ 0,151	+ 7,693	− 391,96	− 764,25
+ 2,33			+ 1,94			− 775,29	− 775,16
+ 5,47		$k_h =$	− 4,66	$k_i =$	− 50,95		

7. Zusammenstellung der ausgeglichenen Winkel und Logarithmen.

Bezeichnung der Punkte.	Bezeichnung der Winkel.	Ausgeglichene Winkel n + (n). °	′	″	Dreiecke.	Bezeichnung der Punkte.	Bezeichnung der Winkel.	Ausgeglichene Winkel n + (n). °	′	″	cpl log sin α. log sin β.
1.	2.	3.			4.	5.	6.	7.			8.
P_a: ♁ 1	I	39	48	59,2	*e*	♁ 3	α: VIII	29	14	12,8	0.31 120
	II	33	37	40,3		♁ 2	β: IV + V	110	56	48,1	9.97 031
	III	286	33	20,4		♁ 1	γ: I	39	48	59,2	
		359	59	59,9				180	00	00,1	
P_b: ♁ 2	IV	52	04	36,3	*g*	♁ 4	α: X + XI	112	18	35,6	0.03 379
	V	58	52	11,8		♁ 3	β: VII	34	03	44,2	9.74 826
	VI	249	03	11,8		♁ 1	γ: II	33	37	40,3	
		359	59	59,9				180	00	00,1	
P_c: ♁ 3	VII	34	03	44,2	*h*	♁ 2	α: V	58	52	11,8	0.06 753
	VIII	29	14	12,8		♁ 4	β: X	47	41	08,9	9.86 892
	IX	296	42	03,0		♁ 1	γ: I + II	73	26	39,5	
		360	00	00,0				180	00	00,2	0.00 001
P_d: ♁ 4	X	47	41	08,9							
	XI	64	37	26,7							
	XII	247	41	24,3							
		359	59	59,9							

Seitenberechnung abgeschlossen wird, ist in der Figur durch Doppellinien bezeichnet. Ferner ist auch in den kleinen Dreiecken, worin die Bezeichnungen e, g, h eingetragen sind, die Grundlinie durch Doppellinien und die aus der Grundlinie zu berechnende Seite durch eine stärker gezogene Linie bezeichnet.

5. Nach diesen Vorbereitungen können die Bedingungsgleichungen (**150**) ohne weiteres nach der Figur hingeschrieben werden. Für die Aufstellung der Seitengleichungen kann noch die Regel gemerkt werden, dafs in den Nenner die Sinus der Winkel kommen, die der Grundlinie gegenüber liegen und in den Zähler die Sinus der Winkel, die der aus der Grundlinie zu berechnenden Seite gegenüber liegen.

Für das vorliegende Beispiel sind die Bedingungsgleichungen auf Seite 226 in Abtheilung 1 der Tabelle aufgestellt.

6. Die Bedingungsgleichungen (**150**) geben allen erforderlichen Anhalt um die Rechnung nach den allgemeinen Formeln (**151**) bis (**173**) durchführen zu können.

Zunächst werden für die Objekte, wofür die Bedingungsgleichungen reduzirt werden sollen, die Widersprüche f nach den Formeln (**151**) und (**152**) berechnet und die Beobachtungsergebnisse nach den Formeln (**93**) und (**94**) oder (**102**) und (**103**) verbessert.

Für das vorliegende Beispiel ist dies auf Seite 226, Abtheilung 2 der Tabellen in den Spalten 1 bis 5 durchgeführt.

Mit den verbesserten Beobachtungsergebnissen werden die übrigen Widersprüche f ebenfalls nach den Formeln (**151**) und (**152**) berechnet.

Dies ist auf Seite 227, Abtheilung 2[a], in den Spalten 1 bis 4 und 6 durchgeführt. Hierbei sind die Winkel in den Dreiecken so angesetzt worden, dafs als $\angle\,\alpha$ immer der Winkel genommen worden ist, der der Grundlinie des Dreiecks gegenüber liegt, wofür in der Seitenberechnung also $cpl\,log\,sin\,\alpha$ anzusetzen ist, während als $\angle\,\beta$ der Winkel genommen worden ist, der der aus der Grundlinie zu berechnenden Seite gegenüber liegt, wofür also in der Dreiecksberechnung $log\,sin\,\beta$ anzusetzen ist.

7. Den in der Berechnung der Widersprüche vorkommenden Gröfsen werden sogleich die Ausdrücke für die Verbesserungen beigeschrieben, die sie erhalten müssen, damit die Bedingungsgleichungen (**150**) erfüllt werden. Die allgemeine Form für diese Ausdrücke ist $\frac{\partial F}{\partial n}(n)$. Für den Differenzialquotienten $\frac{\partial F}{\partial n}$ brauchen nur in seltenen Fällen die Formeln aufgestellt und die Zahlenwerthe nach diesen Formeln berechnet zu werden, vielmehr kann in den meisten Fällen der Differenzialquotient ohne weiteres hingeschrieben werden. Am häufigsten ist er $+1$ oder -1. Wenn der Widerspruch f logarithmisch berechnet und in Einheiten der letzten Stelle der Logarithmen ausgedrückt wird, ist $\frac{\partial F}{\partial n}$ gleich der meistens genügend genau aus der Logarithmentafel zu entnehmenden logarithmischen Differenz für eine Einheit der Verbesserung (n). Beispielsweise ist, wenn $n = +225{,}23$ ist und die Verbesserungen in Centimeter ausgedrückt werden, $log\,225{,}23 = 2.35\,263$ und $\frac{\partial\,log\,n}{\partial n} = +1{,}9$; denn wie ohne weiteres aus der Logarithmentafel zu entnehmen ist, ändert sich $log\,225{,}23$ um 1,9 Einheiten der letzten Stelle des Logarithmus, wenn die Verbesserung (n) sich um einen Centimeter ändert. Ferner ist, wenn $n = +36°\,28'\,20''$ ist und (n) in Sekunden ausgedrückt wird, $log\,sin\,36°\,28'\,20'' = 9.77\,411$ und $\frac{\partial\,log\,sin\,n}{\partial n} = +0{,}28$, oder wenn $n = +132°\,28{,}7'$

ist und (n) in Minuten ausgedrückt wird, $log\,sin\,132°\,28{,}7' = 9.86\,778$ und $\frac{\partial\,log\,sin\,n}{\partial n} = -11$, oder wenn $n = 58°\,32'$ ist und (n) in Minuten ausgedrückt wird, $cpl\,log\,sin\,58°\,32' = 0.06\,91$ und $\frac{\partial\,cpl\,log\,sin\,n}{\partial n} = -0{,}7$.

Im vorliegenden Beispiele sind die Ausdrücke für die Verbesserungen $\frac{\partial F}{\partial n}(n)$ auf Seite 226, Abtheilung 2, im ersten Teile der Spalte 6 und auf Seite 227, Abtheilung 2a, im ersten Teile der Spalten 5 und 7 zusammengestellt.

8. Die Summe der Verbesserungen mufs gleich sein den vorhandenen Widersprüchen, wonach die umgeformten Bedingungsgleichungen (**155**) ohne weiteres nach der Zusammenstellung der Ausdrücke für die Verbesserungen hingeschrieben werden können.

Beispielsweise ergeben sich aus Abtheilung 2a, Spalte 4 und 5, sowie 6 und 7 die umgeformten Bedingungsgleichungen für Dreieck *e* und Viereck *i* wie folgt:

$$(\mathbf{2}) + (\mathbf{7}) + (\mathbf{10}) + (\mathbf{11}) = -17{,}9,$$

$$-0{,}08\,(\mathbf{4}) + (-0{,}08 - 0{,}12 = -0{,}20)\,(\mathbf{5}) + 0{,}32\,(\mathbf{7}) - 0{,}38\,(\mathbf{8})$$
$$+ (+0{,}08 + 0{,}20 = +0{,}28)\,(\mathbf{10}) + 0{,}08\,(\mathbf{11}) = -15.$$

Es ist aber gar nicht nöthig, diese umgeformten Bedingungsgleichungen erst aufzustellen, vielmehr können nach der Zusammenstellung der Ausdrücke für die Verbesserungen sogleich die Faktoren der Korrelatengleichungen zusammengestellt werden, wie es auf Seite 227 in Abtheilung 3 der Tabelle geschehen ist. Zu dieser Zusammenstellung und zu den folgenden ganz schematischen Rechnungen sind weitere Erläuterungen kaum noch nöthig. Es sei nur noch darauf hingewiesen, dafs nach Berechnung der Verbesserungen (n) in Abtheilung 6 der Tabelle in Abtheilung 2 und 2a den im ersten Teile der Spalten 6, 5 und 7 stehenden Ausdrücken der Verbesserungen im zweiten Teile der Spalten ihre Zahlenwerthe beigefügt sind und dafs durch ihre Aufsummirung festgestellt ist, dafs ihre Summe in der That gleich den vorhandenen Widersprüchen ist.

2. Kapitel. Anwendung des Verfahrens auf die Bestimmung von Knotenpunkten in Polygonnetzen.

§ 52. Spezielle Regeln für die Feststellung der zu erfüllenden Bedingungen.

1. In einem Polygonnetze ergiebt sich die Anzahl r der zu erfüllenden Bedingungen aus der Anzahl n_p der zu bestimmenden Knotenpunkte und aus der Anzahl n_z der gemessenen Züge.*)

Ein Zug genügt zur gegenseitigen nicht versicherten Festlegung zweier Knotenpunkte. Um die weitern Knotenpunkte gegen die beiden ersten Knotenpunkte einfach unversichert festzulegen, genügt für jeden weitern Knotenpunkt ein Zug. Demnach sind für die einfache, nicht versicherte gegenseitige Festlegung von n_p Knotenpunkten $n_p - 1$ Züge erforderlich, während alle weitern Züge je eine überschüssige Bestimmung und somit auch nach Regel (**147**) je eine zu erfüllende Bedingung liefern.

*) Wenn in einem Polygonnetze die rechtwinkligen Koordinaten der Knotenpunkte aus den gemessenen Winkeln und Strecken der Polygonseiten bestimmt werden sollen, so ergeben sich 3 Gruppen von Bedingungsgleichungen und zwar je eine Gruppe für die Winkel, für die Ordinatenunterschiede und für die Abscissenunterschiede. Jede Gruppe wird aus bekannten Gründen für sich behandelt und das hier und im folgenden Gesagte gilt dann für die einzelnen Gruppen von Bedingungsgleichungen.

(174). Wenn demnach n_p **neu zu bestimmende** Knotenpunkte eines Polygonnetzes durch n_z Züge mit einander verbunden sind, so ist die Anzahl r der zu erfüllenden Bedingungen:

$$r = n_z - (n_p - 1) = n_z - n_p + 1.$$

Beispiel 1: In dem nebenstehend dargestellten Netze sind behufs Bestimmung der Höhen der $n_p = 5$ Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 die Höhenunterschiede zwischen diesen Punkten in den dargestellten $n_z = 9$ Zügen oder Strahlen durch 6malige gegenseitige Beobachtung der Zenithdistanzen bestimmt. Bei Berechnung der Höhen nach dem Verfahren für bedingte Beobachtungen ergeben sich demnach

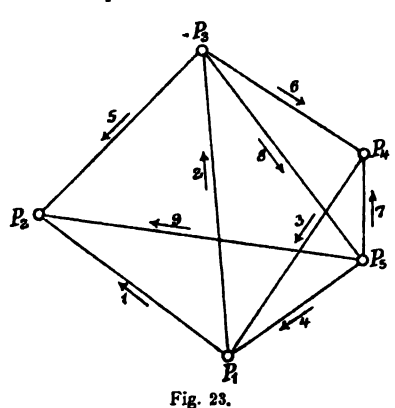


Fig. 23.

(174) $r = n_z - n_p + 1 = 9 - 5 + 1 = 5$

zu erfüllende Bedingungen.

2. Wenn das Polygonnetz an gegebene Punkte angeschlossen ist, so genügt ein Anschlufszug, um das Netz einfach, nicht versichert gegen die gegebenen Punkte festzulegen. Alle weitern Anschlufszüge liefern je eine überschüssige Bestimmung und somit auch je eine zu erfüllende Bedingung, so dafs durch n_a Anschlufszüge $n_a - 1$ Bedingungen hinzukommen.

(175). Wenn demnach n_p **neu zu bestimmende** Knotenpunkte eines Polygonnetzes durch n_z Züge mit einander und durch n_a Züge mit gegebenen Anschlufspunkten verbunden sind, so dafs im ganzen $N_z = n_z + n_a$ Züge vorhanden sind, so ist die Anzahl r der zu erfüllenden Bedingungen:

$$r = n_z - n_p + 1 + (n_a - 1) = N_z - n_p.$$

Die Regeln **(174)** und **(175)** gelten auch für den Fall, dafs für je eine, an einen neu zu bestimmenden Knotenpunkt anschliefsende Polygonseite die Neigung gegen die Abscissenlinie des Koordinatensystems aus den Winkeln des Polygonnetzes zu bestimmen ist und ferner auch für den Fall, dafs n_p Strahlen, deren Richtungen neu zu bestimmen sind, durch n_z Winkel gegenseitig festgelegt und durch n_a Winkel an Strahlen angeschlossen sind, deren Richtungen gegeben und unverändert beizubehalten sind.

Beispiel 2: In dem bereits im § 21 und im § 35 behandelten Nivellementsnetze sind die $n_p = 6$ neu zu bestimmenden Knotenpunkte ⊙⊙ 2, 3, 4, 5, 6, 7 durch $N_z = 11$ Züge untereinander und mit den gegebenen Punkten ⊡ ⊡ **1, 57, 58, 59,** verbunden.*) Bei Behandlung dieses Netzes nach dem Verfahren für bedingte Beobachtungen ergeben sich demnach

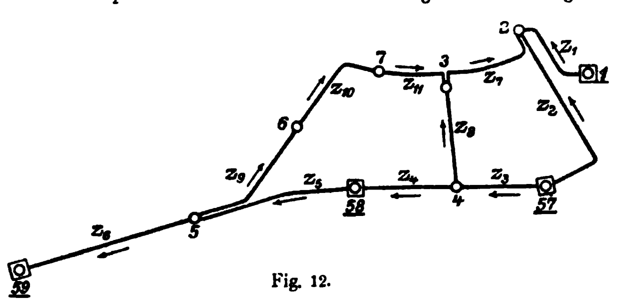


Fig. 12.

*) Die Züge 9, 10 und 11 können auch als ein Zug behandelt werden, womit die ⊙⊙ 6 und 7 als Knotenpunkte ausscheiden. Damit vermindert sich die Anzahl der Züge und der neu zu bestimmenden Knotenpunkte um 2, während die Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen unverändert bleibt.

$$r = N_z - n_p = 11 - 6 = 5 \tag{175}$$

zu erfüllende Bedingungen.

3. In Nivellements- und andern Polygonnetzen, wo keine sich überschneidenden Züge vorkommen, und die nicht an mehrere gegebene Punkte angeschlossen sind, ist die Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen gleich der Anzahl der vorhandenen geschlossenen Polygone. Die zu erfüllenden Bedingungen ergeben sich dann ohne weiteres daraus, dafs in jedem geschlossenen Polygon die Summe der wahrscheinlichsten Werthe der beobachteten Gröfsen ihren Sollbetrag erfüllen mufs.

In solchen Fällen, wo sich überschneidende Züge vorkommen, können die zu erfüllenden Bedingungen auch immer in einfacher Weise festgestellt werden, indem zunächst die Beobachtungsergebnisse ausgewählt werden, die zur einfachen, nicht versicherten Bestimmung der gesuchten Gröfsen ausreichen, und indem dann nach einander für jedes überschüssige Beobachtungsergebnis nach der Figur festgestellt wird, welche Bedingung sich durch seinen Hinzutritt ergiebt.

Beispiel 1: Zur einfachen, nicht versicherten Bestimmung der gegenseitigen Höhenlage der Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 reichen die Höhenunterschiede der Strahlen 1, 2, 3, 4 aus.

Durch Hinzutritt des Höhenunterschiedes	ergiebt sich die Bedingung, dafs die Summe der in einheitlicher Richtung genommenen Höhenunterschiede
des Strahls 5	im Dreieck $P_1\ P_2\ P_3$ gleich Null sein mufs,
„ „ 6	„ „ $P_1\ P_3\ P_4$ „ „ „ „ ,
„ „ 7	„ „ $P_1\ P_4\ P_5$ „ „ „ „ ,
„ „ 8	„ „ $P_3\ P_4\ P_5$ „ „ „ „ ,
„ „ 9	„ „ $P_1\ P_2\ P_5$ „ „ „ „ .

Hiermit sind die zu erfüllenden 5 Bedingungen festgestellt und zwar derart, dafs die Bedingungen sämtlich von einander unabhängig sind, wie es sein mufs.*)

4. Wenn Nivellements- oder andere Polygonnetze, worin keine sich überschneidenden Züge vorkommen, an gegebene Punkte angeschlossen sind, so ergiebt sich eine bildliche Darstellung der sämtlichen geschlossenen Polygone, wofür je eine Bedingung aufzustellen ist, indem die gegebenen Punkte in der Netzskizze durch einen Polygonzug, mit einander verbunden werden, dabei aber aus dem Polygonzuge kein geschlossenes Polygon gebildet wird, indem die das Polygon vollends schliefsende Verbindungslinie weggelassen wird.

In andern Fällen wird zweckmäfsig in der Weise vorgegangen, dafs zuerst so, wie unter Nr. 3 erläutert ist, die Bedingungen festgestellt werden, die ohne Berücksichtigung der gegebenen Stücke zu erfüllen sind, dafs dann ein gegebenes Stück ausgewählt wird, das zum einfachen, nicht versicherten Anschlufs genügt, und dafs nunmehr für jedes weitere gegebene Stück nacheinander festgestellt wird, welche Bedingung sich durch seinen Hinzutritt ergiebt.

*) Das hier dargestellte Verfahren kann auch eingeschlagen werden, wenn die Bedingungen festzustellen sind, die die behufs Bestimmung von Strahlen-Richtungen unabhängig von einander beobachteten Winkel erfüllen müssen. Man braucht nur die Strahlen als Punkte und die Winkel als Verbindungslinien der betreffenden Punkte darzustellen, um nach der sich ergebenden Figur die zu erfüllenden Bedingungen einfach und sicher festzustellen. Für die Bestimmung der Anzahl r der zu erfüllenden Bedingungen können die Formeln (**174**) und (**175**) angewendet werden, wenn unter n_z und N_z die Anzahl der beobachteten Winkel, unter n_p die Anzahl der neu zu bestimmenden Richtungen verstanden wird.

Auch die weitere Durchführung der Berechnung kann ebenso erfolgen, wie im folgenden für die Beispiele 1 und 2 gezeigt wird.

Beispiel 2: In untenstehender Figur ist das Nivellementsnetz durch Hinzufügung des die gegebenen Punkte verbindenden Polygonzuge ⊡ **1** — ⊡ **57** — ⊡ **58** — ⊡ **59** ergänzt, womit eine Darstellung der 5 geschlossenen Polygone *a*, *b*, *c*, *d*, *e* gewonnen ist, worin die Bedingung zu erfüllen ist, dafs die Summe der Höhenunterschiede gleich Null sein mufs.

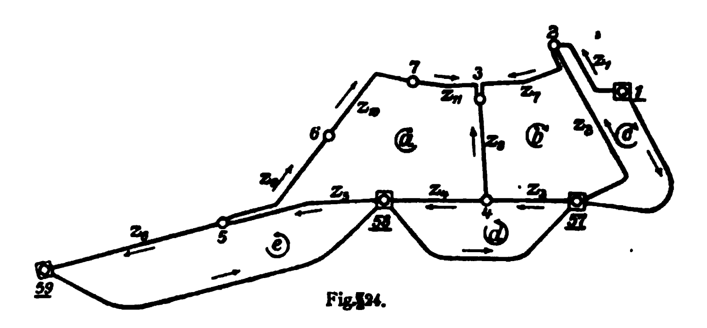


Fig. 24.

§ 58. Aufstellung der Bedingungsgleichungen und weitere Durchführung der Rechnung.

Nachdem die zu erfüllenden Bedingungen festgestellt sind, können die Bedingungsgleichungen hingeschrieben werden und kann die weitere Rechnung in der im § 51 dargelegten Weise durchgeführt werden. Es kann aber für Polygonnetze noch eine weitere Vereinfachung erreicht werden, indem für die Bildung der Faktoren der Endgleichungen mechanische Regeln aufgestellt werden, wonach diese Faktoren direkt aus den Gewichten der Beobachtungsergebnisse gewonnen werden können. Diese Regeln können besser für das Beispiel 2 entwickelt werden, als für das Beispiel 1, weshalb wir das Beispiel 2 hier zuerst behandeln.

Beispiel 2: Die Polygone, wofür die Bedingungsgleichungen aufzustellen sind, sind bereits in obenstehender Figur mit *a*, *b*, *c*, *d*, *e* bezeichnet. Die „Polygonrichtung", die wir bei Zusammenstellung der Höhenunterschiede in den einzelnen Polygonen innehalten, ist durch die die Buchstaben umschliefsenden Pfeile bezeichnet, während die Richtung, worin die beobachteten Höhenunterschiede genommen sind, durch die neben den Zuglinien eingetragenen Pfeile bezeichnet ist. Stimmt Polygonrichtung und Zugrichtung überein, so ist der Höhenunterschied in den Bedingungsgleichungen im positiven Sinne, im andern Falle im negativen Sinne zu nehmen. Sind I, II, III, ... XI nun die wahrscheinlichsten Werthe der Höhenunterschiede in den Zügen 1, 2, 3, ... 11, so ergeben sich nach unserer Figur folgende Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
\text{Polygon } a&: \quad + \mathrm{IV} + \mathrm{V} + \mathrm{IX} + \mathrm{X} + \mathrm{XI} - \mathrm{VIII} = 0 = S_a,\\
\text{„} \quad b&: \quad - \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{VIII} - \mathrm{VII} = 0 = S_b,\\
\text{„} \quad c&: \quad + \mathrm{II} - \mathrm{I} + \Delta H_{1}^{57} = 0 = S_c,\\
\text{„} \quad d&: \quad + \mathrm{III} + \mathrm{IV} + \Delta H_{58}^{57} = 0 = S_d,\\
\text{„} \quad e&: \quad + \mathrm{V} + \mathrm{VI} + \Delta H_{59}^{58} = 0 = S_e.
\end{aligned}$$

Hiernach ergeben sich die Faktoren der Endgleichungen wie folgt:

Nr.	p.	a.	b.	c.	d.	e.	$\frac{aa}{p}$.	$\frac{ab}{p}$.	$\frac{ac}{p}$.	$\frac{ad}{p}$.	$\frac{ae}{p}$.	$\frac{bb}{p}$.	$\frac{bc}{p}$.	$\frac{bd}{p}$.	$\frac{be}{p}$.	$\frac{cc}{p}$.	$\frac{cd}{p}$.	$\frac{ce}{p}$.	$\frac{dd}{p}$.	$\frac{de}{p}$.	$\frac{ee}{p}$.
1	p_1	·	·	−1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	$+\frac{1}{p_1}$	·	·	·	·	·
2	p_2	·	−1	+1	·	·	·	·	·	·	·	$+\frac{1}{p_2}$	$-\frac{1}{p_2}$	·	·	$+\frac{1}{p_2}$	·	·	·	·	·
3	p_3	·	+1	·	+1	·	·	·	·	·	·	$+\frac{1}{p_3}$	·	$+\frac{1}{p_3}$	·	·	·	·	$+\frac{1}{p_3}$	·	·
4	p_4	+1	·	·	+1	·	$+\frac{1}{p_4}$	·	·	$+\frac{1}{p_4}$	·	·	·	·	·	·	·	·	$+\frac{1}{p_4}$	·	·
5	p_5	+1	·	·	·	+1	$+\frac{1}{p_5}$	·	·	·	$+\frac{1}{p_5}$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	$+\frac{1}{p_5}$
6	p_6	·	·	·	·	+1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	$+\frac{1}{p_6}$
7	p_7	·	−1	·	·	·	·	·	·	·	·	$+\frac{1}{p_7}$	·	·	·	·	·	·	·	·	·
8	p_8	−1	+1	·	·	·	$+\frac{1}{p_8}$	$-\frac{1}{p_8}$	·	·	·	$+\frac{1}{p_8}$	·	·	·	·	·	·	·	·	·
9	p_9	+1	·	·	·	·	$+\frac{1}{p_9}$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
10	p_{10}	+1	·	·	·	·	$+\frac{1}{p_{10}}$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
11	p_{11}	+1	·	·	·	·	$+\frac{1}{p_{11}}$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·

Vergleichen wir die in den einzelnen Spalten stehenden Summanden mit Figur 24, so ergiebt sich folgendes:

$\left[\frac{aa}{p}\right]$ ist gleich der Summe der reziproken Werthe der Gewichte der Züge, die in dem Polygon a vorkommen, und ebenso sind $\left[\frac{bb}{p}\right]$, $\left[\frac{cc}{p}\right]$, $\left[\frac{dd}{p}\right]$, $\left[\frac{ee}{p}\right]$ gleich der Summe der reziproken Werthe der Gewichte der Züge, die in den Polygonen b, c, d, e vorkommen.

Ferner ist $\left[\frac{ab}{p}\right]$ gleich dem reziproken Werthe des Gewichtes des Zuges, den die Polygone a und b gemeinschaftlich haben, und ebenso sind $\left[\frac{ad}{p}\right]$, $\left[\frac{ae}{p}\right]$, $\left[\frac{bc}{p}\right]$, $\left[\frac{bd}{p}\right]$ gleich den reziproken Werthen der Gewichte der Züge, die die Polygone a und d, a und e, b und c, b und d gemeinschaftlich haben, während $\left[\frac{ac}{p}\right]$, $\left[\frac{be}{p}\right]$, $\left[\frac{cd}{p}\right]$, $\left[\frac{ce}{p}\right]$, $\left[\frac{de}{p}\right]$ gleich Null sind, entsprechend dem, dafs die Polygone a und c, b und e, c und d, c und e, d und e keinen Zug gemeinschaftlich haben. Das Vorzeichen der Produktensummen $\left[\frac{ab}{p}\right]$, $\left[\frac{ad}{p}\right]$, $\left[\frac{ae}{p}\right]$, $\left[\frac{bc}{p}\right]$, $\left[\frac{bd}{p}\right]$ ist positiv, wo der gemeinschaftliche Zug in den beiden benachbarten Polygonen in gleicher Polygonrichtung, dagegen negativ, wo der gemeinschaftliche Zug in den beiden benachbarten Polygonen in entgegengesetzter Polygonrichtung genommen ist und deſshalb der wahrscheinlichste Werth für den gemeinschaftlichen Zug in den beiden betreffenden Bedingungsgleichungen gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen hat.

Hiernach ergeben sich folgende Regeln für die Bildung der Faktoren der Endgleichungen:

1. $\left[\frac{aa}{p}\right]$, $\left[\frac{bb}{p}\right]$, $\left[\frac{cc}{p}\right]$, $\left[\frac{dd}{p}\right]$, ... sind gleich der Summe der reziproken Werthe der Gewichte der Züge, die den Polygonen a, b, c, d, ... angehören.

2. Berechnung der Widersprüche, Zusammenstellung der reziproken Werthe der Gewichte, sowie der Verbesserungen.

Der Züge Anfangspunkt.	Der Züge Endpunkt.	Höhenunterschiede.	m	$\frac{1}{p}$.	Verbesserungen.	mm
		Polygon *a*.				
4	**58**	+ 4	0,4815	0,98	+ (4)	− 2,0
58	5	+ 5	0,3038	1,79	+ (5)	− 3,9
5	6	+ 9	×8,2362	1,43	+ (9)	− 0,3
6	7	+10	×7,3380	1,09	+(10)	− 0,2
7	3	+11	0,3545	0,91	+(11)	− 0,2
3	4	− 8	3,2962	1,02	− (8)	− 3,6
$-f_a = \Sigma_a =$			0,0102	7,22		−10,2
		Polygon *b*.				
2	**57**	− 2	×9,4375	2,27	− (2)	+ 5,7
57	4	+ 3	×9,5052	0,89	+ (3)	+ 1,3
4	3	+ 8	×6,7038	1,02	+ (8)	+ 3,6
3	2	− 7	4,3378	1,56	− (7)	+ 5,1
$-f_b = \Sigma_b =$			×9,9843	5,74		+15,7

Der Züge Anfangspunkt.	Der Züge Endpunkt.	Höhenunterschiede.	m	$\frac{1}{p}$.	Verbesserungen.	mm
		Polygon *c*.				
57	2	+ 2	0,5625	2,27	+(2)	−5,7
2	**1**	− 1	×7,0252	1,22	−(1)	+1,0
1	**57**	$+\Delta H$	2,4170			
$-f_c = \Sigma_c =$			0,0047	3,49		−4,7
		Polygon *d*.				
57	4	+ 3	×9,5052	0,89	+(3)	+1,3
4	**58**	+ 4	0,4815	0,98	+(4)	−2,0
58	**57**	$+\Delta H$	0,0140			
$-f_d = \Sigma_d =$			0,0007	1,87		−0,7
		Polygon *e*.				
58	5	+ 5	0,3038	1,79	+(5)	−3,9
5	**59**	+ 6	×8,9010	2,00	+(6)	−3,9
59	**58**	$+\Delta H$	0,8030			
$-f_e = \Sigma_e =$			0,0078	3,79		−7,8

3. Auflösung der Endgleichungen.

$\left[\frac{aa}{p}\right]$.	$\left[\frac{ab}{p}\right]$.	$\left[\frac{ac}{p}\right]$.	$\left[\frac{ad}{p}\right]$.	$\left[\frac{ae}{p}\right]$.	$-f_a$. mm	$\left[\frac{bb}{p}\right]$.	$\left[\frac{bc}{p}\right]$.	$\left[\frac{bd}{p}\right]$.	$\left[\frac{be}{p}\right]$.	$-f_b$. mm
+7,22	−1,02	.	+0,98	+1,79	+10,20	+5,74	−2,27	+0,89	.	−15,70
	+0,141	.	−0,136	−0,248	− 1,41	−0,14	.	+0,14	+0,25	+ 1,44
					+ 0,48	+5,60	−2,27	+1,03	+0,25	−14,26
					+ 0,25		+0,405	−0,184	−0,045	+ 2,55
					.					+ 0,09
					+ 0,47					+ 0,34
										+ 0,32
				$k_a =$	− 0,21				$k_b =$	+ 3,30

$\left[\frac{cc}{p}\right]$.	$\left[\frac{cd}{p}\right]$.	$\left[\frac{ce}{p}\right]$.	$-f_c$. mm	$\left[\frac{dd}{p}\right]$.	$\left[\frac{de}{p}\right]$.	$-f_d$. mm	$\left[\frac{ee}{p}\right]$.	$-f_e$. mm	Probe.	
+3,49	.	.	+4,70	+1,87	.	+0,70	+3,79	+7,80		
.	.	.	.	−0,13	−0,24	−1,39	−0,44	−2,53	−14,38	− 2,14
−0,92	+0,42	+0,10	−5,78	−0,19	−0,05	+2,62	−0,01	+0,64	−36,36	−51,81
+2,57	+0,42	+0,10	−1,08	−0,07	−0,02	+0,18	−0,00	+0,04	− 0,45	+ 3,76
	−0,163	−0,039	+0,42	+1,48	−0,31	+2,11	−0,06	+0,44	− 3,02	− 1,29
			+0,08		+0,209	−1,43	+3,28	+6,39	−12,46	−15,21
			+0,30			−0,41			−66,67	−66,69
		$k_c =$	+0,80		$k_d =$	−1,84	$k_e =$	−1,95		

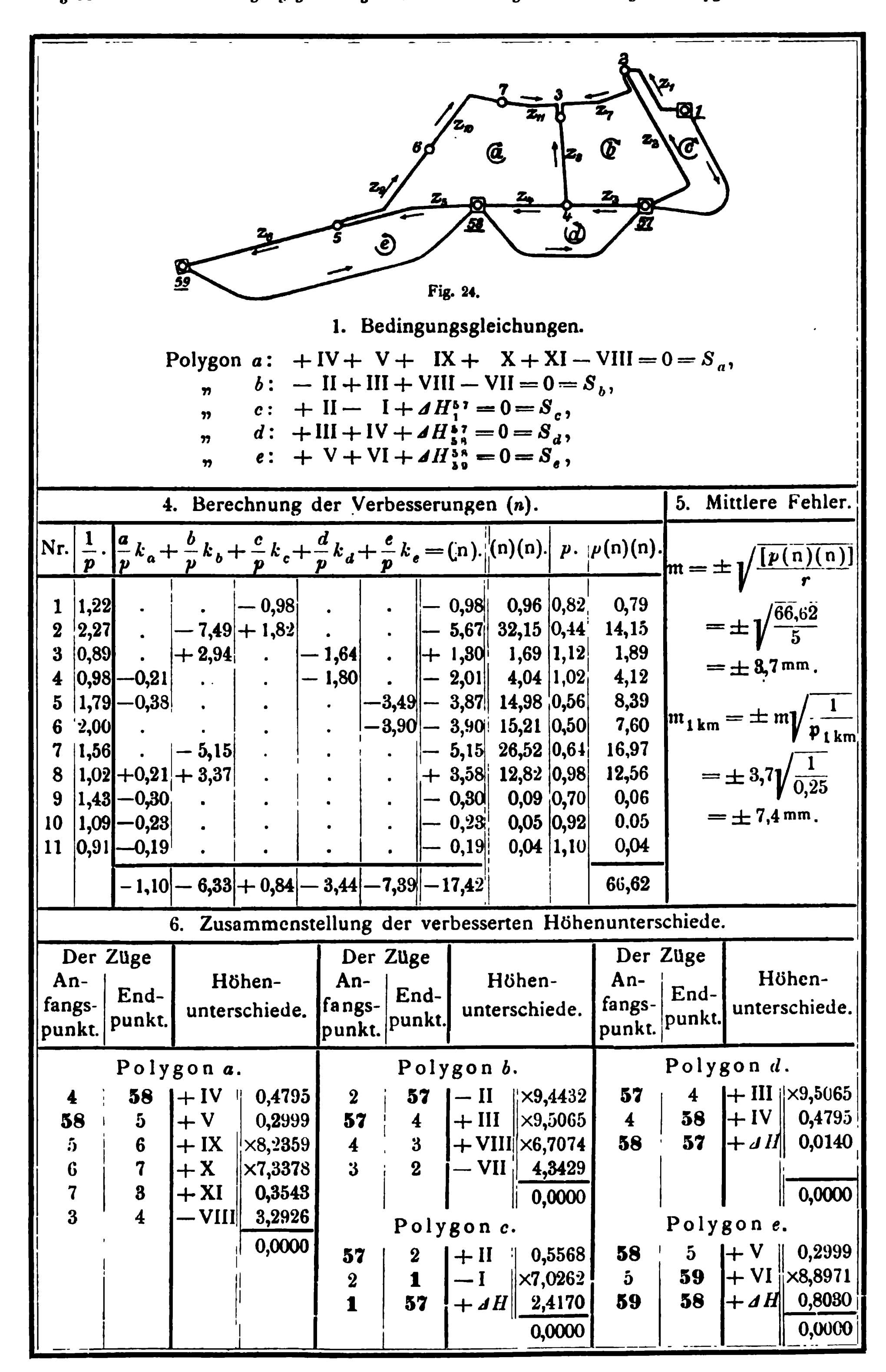


Fig. 24.

1. Bedingungsgleichungen.

Polygon a: $+\text{IV}+\text{V}+\text{IX}+\text{X}+\text{XI}-\text{VIII}=0=S_a$,

" b: $-\text{II}+\text{III}+\text{VIII}-\text{VII}=0=S_b$,

" c: $+\text{II}-\text{I}+\varDelta H_1^{57}=0=S_c$,

" d: $+\text{III}+\text{IV}+\varDelta H_{58}^{57}=0=S_d$,

" e: $+\text{V}+\text{VI}+\varDelta H_{59}^{58}=0=S_e$,

4. Berechnung der Verbesserungen (n).

Nr.	$\frac{1}{p}$.	$\frac{a}{p}k_a+$	$\frac{b}{p}k_b+$	$\frac{c}{p}k_c+$	$\frac{d}{p}k_d+$	$\frac{e}{p}k_e$	$=(n)$.	(n)(n).	p.	p(n)(n).
1	1,22	.	.	− 0,98	.	.	− 0,98	0,96	0,82	0,79
2	2,27	.	− 7,49	+ 1,82	.	.	− 5,67	32,15	0,44	14,15
3	0,89	.	+ 2,94	.	− 1,64	.	+ 1,30	1,69	1,12	1,89
4	0,98	−0,21	.	.	− 1,80	.	− 2,01	4,04	1,02	4,12
5	1,79	−0,38	.	.	.	−3,49	− 3,87	14,98	0,56	8,39
6	2,00	.	.	.	.	−3,90	− 3,90	15,21	0,50	7,60
7	1,56	.	− 5,15	.	.	.	− 5,15	26,52	0,64	16,97
8	1,02	+0,21	+ 3,37	.	.	.	+ 3,58	12,82	0,98	12,56
9	1,43	−0,30	.	.	.	.	− 0,30	0,09	0,70	0,06
10	1,09	−0,23	.	.	.	.	− 0,23	0,05	0,92	0.05
11	0,91	−0,19	.	.	.	.	− 0,19	0,04	1,10	0,04
		− 1,10	− 6,33	+ 0,84	− 3,44	−7,39	−17,42			66,62

5. Mittlere Fehler.

$$\mathfrak{m}=\pm\sqrt{\frac{[p(\mathfrak{n})(\mathfrak{n})]}{r}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{66,62}{5}}$$

$$=\pm 3,7\,\text{mm}.$$

$$\mathfrak{m}_{1\,\text{km}}=\pm\,\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_{1\,\text{km}}}}$$

$$=\pm 3,7\sqrt{\frac{1}{0,25}}$$

$$=\pm 7,4\,\text{mm}.$$

6. Zusammenstellung der verbesserten Höhenunterschiede.

Der Züge Anfangspunkt.	Endpunkt.	Höhenunterschiede.		Der Züge Anfangspunkt.	Endpunkt.	Höhenunterschiede.		Der Züge Anfangspunkt.	Endpunkt.	Höhenunterschiede.	
Polygon a.				Polygon b.				Polygon d.			
4	58	+ IV	0,4795	2	57	− II	×9,4432	57	4	+ III	×9,5065
58	5	+ V	0,2999	57	4	+ III	×9,5065	4	58	+ IV	0,4795
5	6	+ IX	×8,2359	4	3	+ VIII	×6,7074	58	57	+ $\varDelta H$	0,0140
6	7	+ X	×7,3378	3	2	− VII	4,3429				
7	3	+ XI	0,3543				0,0000				0,0000
3	4	− VIII	3,2926	Polygon c.				Polygon e.			
			0,0000	57	2	+ II	0,5568	58	5	+ V	0,2999
				2	1	− I	×7,0262	5	59	+ VI	×8,8971
				1	57	+ $\varDelta H$	2,4170	59	58	+ $\varDelta H$	0,8030
							0,0000				0,0000

2. $\left[\frac{ab}{p}\right], \left[\frac{ac}{p}\right], \left[\frac{ad}{p}\right], \ldots$
$\left[\frac{bc}{p}\right], \left[\frac{bd}{p}\right], \ldots$
$\left[\frac{cd}{p}\right], \ldots$
$\ldots$

sind gleich den reziproken Werthen des Gewichtes der den Polygonen

a u. b, a u. c, a u. d, ...
b u. c, b u. d, ...
c u. d, ...
....

gemeinschaftlichen Züge,

und zwar mit positivem Vorzeichen, wenn die Höhenunterschiede des gemeinschaftlichen Zuges in beiden Polygonen in gleicher Richtung, mit negativem Vorzeichen, wenn sie in beiden Polygonen in entgegengesetzter Richtung genommen sind und defshalb der wahrscheinlichste Werth für den gemeinschaftlichen Zug in den beiden betreffenden Bedingungsgleichungen gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen hat.

Diese Regeln gelten allgemein für alle Polygonnetze, einerlei ob sie an gegebene Punkte angeschlossen sind oder nicht.

Werden demnach bei Berechnung der Widersprüche f gleich die Summen der reziproken Werthe der Gewichte der in dieser Berechnung vorkommenden Beobachtungsergebnisse mit gebildet, so können danach die Faktoren der Endgleichungen ohne weiteres hingeschrieben werden.

Mit Benutzung dieser Regeln für die Bildung der Faktoren der Endgleichungen kann die Rechnung durchgeführt werden wie folgt: (Siehe die Tabellen auf Seite 236 und 237.)

Beispiel 1: Für das im § 52 behandelte trigonometrische Höhennetz sind die Beobachtungsergebnisse und deren Gewichte in folgender Tabelle zusammengestellt:

Strahl.	Strahlenlänge. km		Höhenunterschied. m	Gewicht p.	$\frac{1}{p}$.	Strahl.	Strahlenlänge. km		Höhenunterschied. m	Gewicht p.	$\frac{1}{p}$.
$P_1 P_2$	17,0	1	+ 17,582	1,38	0,73	$P_3 P_4$	13,9	6	− 25,711	2,07	0,48
$P_1 P_3$	21,7	2	+ 8,821	0,85	1,18	$P_5 P_4$	6,9	7	− 28,104	8,35	0,12
$P_4 P_1$	16,9	3	+ 16,911	1,40	0,71	$P_3 P_6$	18,6	8	+ 2,471	1,15	0,87
$P_5 P_1$	11,8	4	− 11,205	2,86	0,35	$P_6 P_2$	23,6	9	+ 6,272	0,72	1,39
$P_3 P_2$	16,7	5	+ 8,931	1,44	0,69						

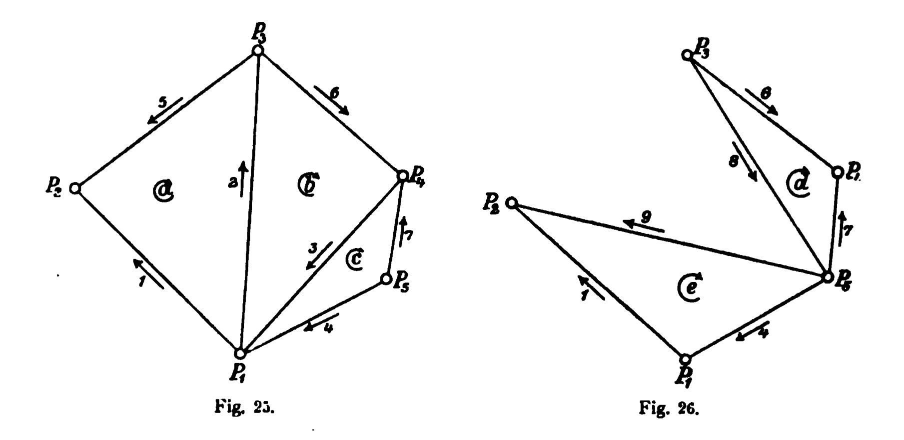


Fig. 25. Fig. 26.

Die Gewichtseinheit ist das Gewicht eines Höhenunterschiedes für einen Strahl von 20km Länge in nahezu horizontaler Richtung.

Die Dreiecke, wofür nach § 52, Nr. 3 die Bedingungsgleichungen aufzustellen sind, zeichnen wir uns nochmals getrennt auf, bezeichnen sie mit a, b, c, d, e und kennzeichnen die Richtung, die wir bei Zusammenstellung der Höhenunterschiede innehalten wollen, durch um die Buchstaben gezogene Pfeile. Dann ergeben sich die Bedingungsgleichungen wie folgt:

$$\begin{aligned}
\Delta a&: +\mathrm{I} - \mathrm{V} - \mathrm{II} = 0 = S_a,\\
\Delta b&: +\mathrm{II} + \mathrm{VI} + \mathrm{III} = 0 = S_b,\\
\Delta c&: -\mathrm{III} - \mathrm{VII} + \mathrm{IV} = 0 = S_c,\\
\Delta d&: +\mathrm{VI} - \mathrm{VII} - \mathrm{VIII} = 0 = S_d,\\
\Delta e&: +\mathrm{I} - \mathrm{IX} + \mathrm{IV} = 0 = S_e.
\end{aligned}$$

Die weitere Rechnung gestaltet sich ganz ebenso wie beim Beispiel 2, wefshalb wir ihre Durchführung unterlassen.

3. Kapitel. Anwendung des Verfahrens auf die Berechnung von Dreiecksnetzen.

§ 54. Spezielle Regeln für die Feststellung der Gesamtanzahl der zu erfüllenden Bedingungen.

1. Bei der Berechnung von Dreiecksnetzen ist in erster Linie darüber zu entscheiden, wie die auf den einzelnen Standpunkten erlangten Beobachtungsergebnisse behandelt und in die weitern Rechnungen eingeführt werden sollen.

Bei Dreiecksnetzen niederer Ordnung und auch bei Dreiecksnetzen höherer Ordnung, die lediglich gelegt werden, um den Dreiecksnetzen niederer Ordnung als Grundlage zu dienen und die nicht für weitergehende wissenschaftliche Zwecke benutzt werden sollen,*) können die auf den einzelnen Standpunkten erlangten Beobachtungsergebnisse für sich ausgeglichen werden und können die hierdurch gewonnenen wahrscheinlichsten Werthe der Winkel oder Richtungen in der Regel ohne weiteres als unabhängige Beobachtungsergebnisse**) in die Berechnung des Dreiecksnetzes eingeführt werden.

Wenn aber eine möglichst grofse Genauigkeit der Rechnungsergebnisse gefordert werden mufs, so müssen entweder die Bedingungen, die sich für die auf den einzelnen Standpunkten beobachteten Winkel oder Richtungen ergeben, den sich im übrigen für das Dreiecksnetz ergebenden Bedingungen hinzugefügt werden und die sich daraus ergebenden Rechnungen im Zusammenhange durchgeführt werden, wie es im 1. Kapitel dieses Abschnittes für ein einfaches Beispiel gezeigt ist, oder es mufs das im folgenden Abschnitte behandelte Verfahren für bedingte

---

*) Vergleiche: Die Verbindungs-Triangulation zwischen dem Rheinischen Dreiecksnetze der Europäischen Gradmessung und der Triangulation des Dortmunder Kohlenreviers der Landesaufnahme von Dr. phil. C. Reinhertz, Stuttgart, Karl Wittwer, 1889, worin ausführlich über die bezeichnete, von der Preufsischen Katasterverwaltung lediglich für die Neumessung gröfserer Komplexe ausgeführte Triangulation I. Ordnung berichtet ist.

**) Vergleiche die Einleitung zum II. Teil, § 15, Nr. 3, Seite 50.

vermittelnde Beobachtungen eingeschlagen werden. Welches dieser beiden Verfahren zu wählen ist, wird in der Regel danach zu entscheiden sein, ob das eine oder das andere einfacher zum Ziele führt.

Da nun im vorhergehenden bereits in genügendem Umfange erläutert ist wie die Ausgleichung der auf einem Standpunkte beobachteten Winkel oder Richtungen durchzuführen ist, oder wie die sich dafür ergebenden Bedingungen festzustellen sind,*) so wird im folgenden nur behandelt, wie die sich im übrigen für ein Dreiecksnetz ergebenden Bedingungen festzustellen sind und wie danach die Rechnungen weiter zu führen sind, wenn die aus den Beobachtungen auf den einzelnen Standpunkten folgenden wahrscheinlichsten Werthe der Winkel oder Richtungen in die Dreiecksnetzberechnung eingeführt werden ohne Rücksicht darauf, wie diese Werthe gewonnen sind.

Wir machen in dieser Beziehung nur eine Ausnahme für die einfachen Fälle, wo auf einem Punkte entweder die sämtlichen den Horizont schliefsenden Winkel oder wo neben den Einzelwinkeln einzelne Winkelsummen unabhängig von einander beobachtet sind und die Beobachtungsergebnisse als unabhängige Winkel in die Dreiecksberechnung eingeführt werden, um diese einfachen Fälle gleich in ihrem ganzen Umfange im Zusammenhange zu behandeln und um für Dreiecksnetze mit unabhängigen Winkeln allgemein gültige Formeln zur Berechnung der Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen aufstellen zu können.

2. In Dreiecksnetzen ergiebt sich die Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen verschieden je nachdem Winkel oder Richtungen in die Rechnung eingeführt werden.

Werden Winkel eingeführt, so sind zur einfachen, nicht versicherten Bestimmung der gegenseitigen Lage der ersten 3 Punkte 2 Winkel in einem Dreieck und für jeden weitern Punkt ebenfalls 2 Winkel genügend. Wenn n_p Punkte vorhanden sind, so sind zur einfachen nicht versicherten Bestimmung ihrer gegenseitigen Lage $2 + 2(n_p - 3) = 2n_p - 4$ Winkel genügend. Alle übrigen Winkel sind überschüssig und liefern je eine Bedingung, so dafs, wenn n_w Winkel vorliegen, die Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen $n_w - (2n_p - 4) = n_w - 2n_p + 4$ ist.

Werden Richtungen in die Dreiecksnetzberechnung eingeführt, so sind zuerst die auf den einzelnen Standpunkten beobachteten Richtungen gegenseitig zu orientiren. Zur einfachen, nicht versicherten gegenseitigen Orientirung der Richtungen ist für jeden Standpunkt eine Richtung genügend, so dafs also zur einfachen, nicht versicherten gegenseitigen Orientirung der auf n_{st} Standpunkten beobachteten Richtungen n_{st} Richtungen genügen. Ferner sind zur einfachen, nicht versicherten Bestimmung der gegenseitigen Lage der ersten 3 Punkte 2 orientirte Richtungen und für jeden weitern Punkt ebenfalls 2 orientirte Richtungen genügend, so dafs also für n_p Punkte $2 + 2(n_p - 3) = 2n_p - 4$ orientirte Richtungen genügen. Im Ganzen genügen also zur einfachen nicht versicherten Bestimmung der gegenseitigen Lage von n_p Punkten aus Richtungen,

---

*) Vergl. § 20, Beispiel 1 und die §§ 32—34, sowie die §§ 52 und 53, insbesondere die Note zu § 52, Nr. 3, Seite 233.

Die Ausgleichung von Richtungsbeobachtungen in unvollständigen Sätzen nach dem Verfahren für bedingte Beobachtungen ist nicht behandelt, weil für solche Beobachtungen in der Regel bei der Berechnung des Dreiecksnetzes zweckmäfsiger das Verfahren für bedingte vermittelnde Beobachtungen eingeschlagen wird.

Siehe ferner Gaufs, Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen u. s. w. 2. Auflage, I. Teil, Abschnitt V.

die auf n_{st} Standpunkten beobachtet sind, $n_{st} + 2n_p - 4$ Richtungen. Alle weitern Richtungen sind überschüssig und liefern je eine Bedingung. Demnach ist die Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen, wenn n_r Richtungen vorliegen, gleich $n_r - (n_{st} + 2n_p - 4) = n_r - n_{st} - 2n_p + 4$.

Ist das Netz angeschlossen an n_a Dreiecksseiten, deren Neigungen oder Richtungen gegeben und unverändert beizubehalten sind, so genügt eine Anschlufsseite zum einfachen, nicht versicherten Anschlufs, so dafs $n_a - 1$ Anschlüsse überschüssig sind und demnach in diesem Falle zu der oben berechneten Anzahl von Bedingungen noch $n_a - 1$ Bedingungen hinzukommen. Bei der Abzählung der im Dreiecksnetze beobachteten Winkel oder Richtungen ist in diesem Falle zu beachten, dafs die Anschlufswinkel oder Anschlufsrichtungen nicht mitzuzählen sind, wenn die betreffenden Anschlufsseiten nicht dem eigentlichen Dreiecksnetze angehören.*)

Ebenso ist, wenn das Dreiecksnetz an s_a Dreiecksseiten angeschlossen ist, deren Längen gegeben und unverändert beizubehalten sind, eine Dreiecksseite zum einfachen, nicht versicherten Anschlufs genügend. Die überschüssigen $s_a - 1$ Anschlufsdreiecksseiten liefern demnach noch weitere $s_a - 1$ Bedingungen zu den übrigen.

Für lediglich durch Rückwärtseinschneiden bestimmte Dreieckspunkte erhalten die Bedingungsgleichungen eine so komplizirte Form, dafs solche Dreieckspunkte zweckmäfsig aus dem nach dem Verfahren für bedingte Beobachtungen auszugleichenden Netze ausgeschieden werden und besonders nach dem Verfahren für vermittelnde Beobachtungen berechnet werden. Bei Abzählung der Punkte und Richtungen werden diese Punkte und die darauf beobachteten Winkel oder Richtungen daher ausgeschlossen.

Hiernach ergeben sich die folgenden Regeln:

In Dreiecksnetzen, woraus rückwärts eingeschnittene Punkte und die auf diesen beobachteten Winkel oder Richtungen ausgeschieden sind, ist die Gesamtanzahl r der zu erfüllenden Bedingungen,

(176) wenn zur gegenseitigen Festlegung von n_p Punkten n_w Winkel vorliegen,:

$$r = n_w - 2n_p + 4,$$

(177) wenn zur gegenseitigen Festlegung von n_p Punkten n_r Richtungen auf n_{st} Standpunkten vorliegen,:

$$r = n_r - 2n_p - n_{st} + 4,$$

(178) wenn das Netz aufserdem noch an n_a Dreiecksseiten angeschlossen ist, deren Neigung oder Richtung gegeben und unverändert beizubehalten ist, gleich der sich nach **(176)** oder **(177)** ergebenden Anzahl plus $n_a - 1$,

(179) wenn das Netz aufserdem noch an s_a Dreiecksseiten angeschlossen ist, deren Länge gegeben und unverändert beizubehalten ist, gleich der sich nach **(176)** oder **(177)** und **(179)** ergebenden Anzahl plus $s_a - 1$.

---

*) Siehe Beispiel 4, Seite 242.

Bei Abzählung der beobachteten Winkel oder Richtungen werden Anschlufswinkel oder Anschlufsrichtungen nicht mitgezählt, wenn die betreffenden Anschlufsseiten nicht dem eigentlichen Dreiecksnetze angehören.

Beispiele: In den Zeichnungen zu den nachfolgenden Beispielen sind die Punkte, Winkel oder Richtungen für sich fortlaufend nummerirt, so dafs die letzte Nummer, die durch Unterstreichen gekennzeichnet ist, die Anzahl der Punkte, Winkel oder Richtungen angiebt.

Gegebene Punkte sind durch Doppelkreise, gegebene Dreiecksseiten durch dicke Linien hervorgehoben.

Beispiel 1.

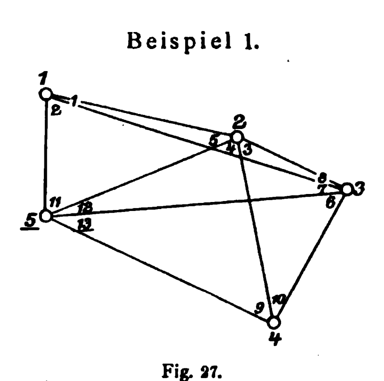


Fig. 27.

(176) $r = n_w - 2n_p + 4$
$= 13 - 2 \cdot 5 + 4 = 7.$

Beispiel 2.

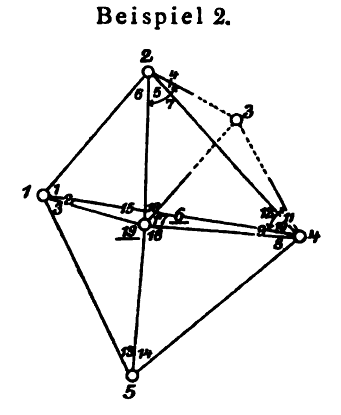


Fig. 28.

(176) $r = n_w - 2n_p + 4$
$= 19 - 2 \cdot 6 + 4 = 11.$

Beispiel 3.

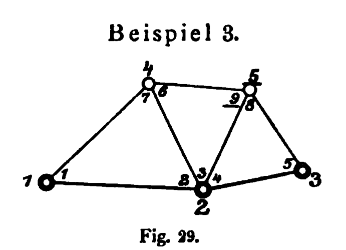


Fig. 29.

(176) $r = (n_w - 2n_p + 4 = 9 - 2 \cdot 5 + 4 = 3)$
(178) $+ (n_a - 1 = 2 - 1 = 1)$
$+ (s_a - 1 = 2 - 1 = 1) = 5.$

Beispiel 4.

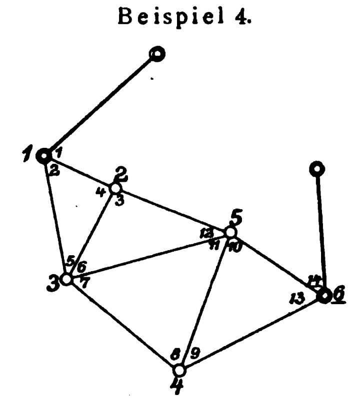


Fig. 30.

(176) $r = (n_w - 2n_p + 4 = 12 - 2 \cdot 6 + 4 = 4)$
$+ (n_a - 1 = 2 - 1 = 1) = 5.$



Beispiel 5.

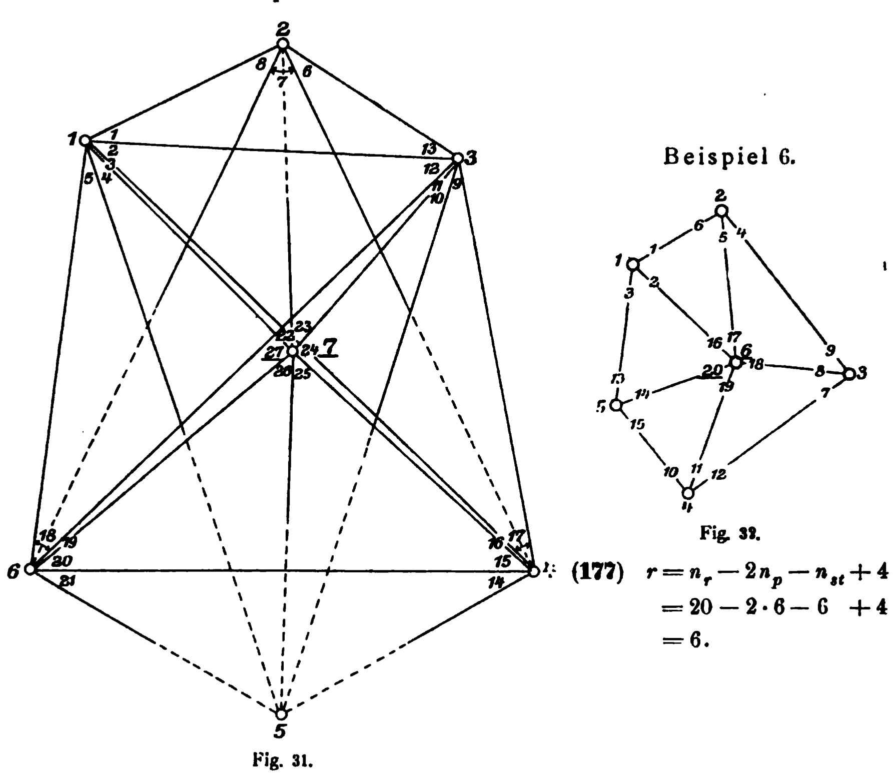


Fig. 31.

Beispiel 6.

Fig. 32.

(177) $r = n_r - 2n_p - n_{st} + 4$
$= 20 - 2\cdot 6 - 6 + 4$
$= 6.$

(176) $r = n_w - 2n_p + 4 = 27 - 2\cdot 7 + 4 = 17.$

Beispiel 7.

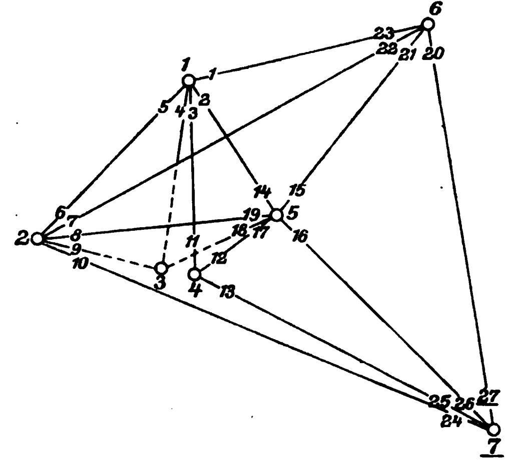


Fig. 33.

(177) $r = n_r - 2n_p - n_{st} + 4$
$= 27 - 2\cdot 7 - 6 + 4 = 11.$

§ 55. Einteilung der Bedingungen in Klassen und spezielle Regeln für die Feststellung der Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen einer jeden Klasse.

1. Für die sichere Feststellung der richtigen zu erfüllenden Bedingungen in Dreiecksnetzen ist es zweckmäfsig, die Bedingungen in 3 Klassen einzuteilen und festzustellen, wie viel von den überhaupt zu erfüllenden Bedingungen auf die verschiedenen Klassen entfallen.

Wir teilen die zu erfüllenden Bedingungen demnach ein in

a) Bedingungen I. Klasse oder Stationswinkelbedingungen,
b) Bedingungen II. Klasse oder Netzwinkelbedingungen und
c) Bedingungen III. Klasse oder Seitenbedingungen.

2. Die Bedingungen I. Klasse oder Stationswinkelbedingungen ergeben sich aus den überschüssigen Winkeln, die zur gegenseitigen Festlegung der Strahlen-Richtungen auf den einzelnen Stationspunkten vorliegen.

Zur einfachen, nicht versicherten gegenseitigen Festlegung der auf einem Standpunkte zu bestimmenden Richtungen genügen $n-1$ Winkel, wenn n die Anzahl der Richtungen ist. Sind nun in einem Dreiecksnetze n_{st} Standpunkte vorhanden und auf diesen n_r Richtungen zu bestimmen, so genügen demnach zur einfachen, nicht versicherten gegenseitigen Festlegung der Richtungen auf den einzelnen Standpunkten $n_r - n_{st}$ Winkel, so dafs, wenn überhaupt n_w Winkel vorliegen, $n_w - (n_r - n_{st}) = n_w - n_r + n_{st}$ Winkel überschüssig sind und ebensoviele Bedingungen I. Klasse zu erfüllen sind.

Wir erhalten daher als Regel:

(180). In Dreiecksnetzen ist die Anzahl r_I der zu erfüllenden Bedingungen I. Klasse oder Stationswinkelbedingungen, wenn n_w Winkel zur Bestimmung von n_r Richtungen auf n_{st} Standpunkten vorliegen,:

$$r_I = n_w - n_r + n_{st}.$$

Falls keine Winkel, sondern Richtungen vorliegen, so kommen keine Bedingungen I. Klasse vor, denn, wie bereits angeführt ist,*) werden entweder die endgültigen Werthe der Richtungen ohne Rücksicht auf ihre Ableitung aus den unmittelbaren Beobachtungsergebnissen in die Rechnung eingeführt oder es wird das Verfahren für bedingte vermittelnde Beobachtungen angewendet.

Beispiel 1: **(180)** $r_I = n_w - n_r + n_{st} = 13 - 18 + 5 = 0,$
Beispiel 2: $= 19 - 21 + 5 = 3,$
Beispiel 3: $= 9 - 14 + 5 = 0,$
Beispiel 4: $= 14 - 20 + 6 = 0,$
Beispiel 5: $= 27 - 32 + 6 = 1.$

3. Die Bedingungen II. Klasse oder Netzwinkelbedingungen ergeben sich aus den überschüssigen Winkelbestimmungen, die in den einzelnen, geschlossene Dreiecke oder Polygone bildenden Teilen des Dreiecksnetzes vorhanden sind.

In einem geschlossenen Polygon mit n_{st} Punkten ist, wenn sämtliche Winkel bestimmt sind, ein Winkel überschüssig, die Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen also gleich eins, oder gleich $n_{st} - (n_{st} - 1)$. Tritt nun eine weitere irgend zwei Punkte des Polygons verbindende Linie hinzu, an deren beiden Enden die Winkel bestimmt sind, die die neue Linie mit den vorhandenen Linien bildet, so

*) Vergleiche § 54, Nr. 1.

entstehen zwei geschlossene Polygone und in jedem dieser Polygone ist ein Winkel überschüssig. Damit kommt auch eine neue Bedingung hinzu, so dafs die Anzahl $(n_{st}+1)-(n_{st}-1)$ wird. Treten weitere neue Linien hinzu, an deren beiden Enden die Winkel bestimmt sind, so kommt mit jeder neuen Linie auch eine neue Bedingung hinzu und wenn n_n neue Linien hinzugekommen sind, so ist die Gesamtanzahl der Bedingungen $(n_{st}+n_n)-(n_{st}-1)$. Da nun in dem ursprünglichen Polygon n_{st} Linien vorhanden sind, so stellt $n_{st}+n_n$ die Anzahl aller überhaupt vorhandenen Linien dar, an deren beiden Enden die Winkel bestimmt sind, und wenn wir diese Anzahl mit n_l bezeichnen, so erhalten wir für die Anzahl r_{II} der Bedingungsgleichungen II. Klasse: $r_{II}=n_l-n_{st}+1$.

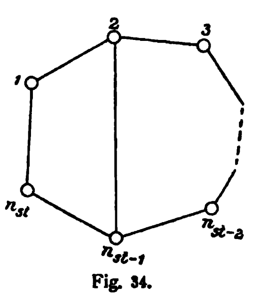


Fig. 34.

Durch Linien, wofür nur an einem Ende die Winkel bestimmt sind, die sie mit andern Linien bilden, entstehen keine neuen geschlossenen Polygone, worin ein Winkel überschüssig ist; es kommt dadurch also auch keine neue Bedingung hinzu. Bei Bestimmung der Anzahl n_l der Linien müssen daher auch alle solche Linien ausgeschlossen werden. Ebenso müssen auch bei Bestimmung der Anzahl n_{st} der Punkte alle die Punkte ausgeschlossen werden, die nur durch einseitig bestimmte Linien festgelegt, also vorwärts eingeschnitten und keine Standpunkte sind, worauf Winkel beobachtet sind.

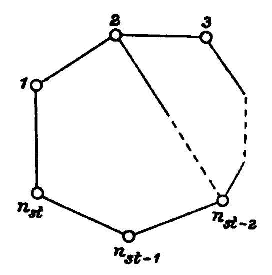


Fig. 35.

Wenn das Dreiecksnetz an Dreiecksseiten angeschlossen ist, deren Neigungen gegen eine Abscissenachse gegeben und unverändert beizubehalten sind, so genügt die Neigung einer gegebenen Dreiecksseite zur einfachen, nicht versicherten Bestimmung der Neigungen der neu zu bestimmenden Dreiecksseiten. Die Neigungen aller übrigen gegebenen Dreiecksseiten sind überschüssig und liefern je eine zu erfüllende Bedingung. Wenn also die Neigungen von n_a Dreiecksseiten zum Anschlufs gegeben sind, so liefern sie n_a-1 Bedingungen, womit die Gesamtzahl aller Bedingungen II. Klasse $r_{II}=n_l-n_{st}+1+(n_a-1)=n_l+n_a-n_{st}$ wird.

Demnach erhalten wir als Regel:

In Dreiecksnetzen ist die Anzahl r_{II} der Bedingungen II. Klasse oder der Netzwinkelbedingungen,

(181) wenn n_{st} Standpunkte durch n_l Linien verbunden sind, an deren beiden Enden die Winkel bestimmt sind,:

$$r_{II}=n_l-n_{st}+1,$$

(182) wenn das Netz aufserdem an n_a Dreiecksseiten angeschlossen ist, deren Neigungen gegeben und unverändert beizubehalten sind,:

$$r_{II}=n_l-n_{st}+n_a.$$

Beispiel 1: **(181)** $r_{II}=n_l-n_{st}+1 = 9-5+1=5$,
Beispiel 2: $= 9-5+1=5$,
Beispiel 3: **(182)** $r_{II}=n_l-n_{st}+n_a= 7-5+2=4$,
Beispiel 4: $= 9-6+2=5$,
Beispiel 5: **(181)** $r_{II}=n_l-n_{st}+1 =12-6+1=7$,
Beispiel 6: $=10-6+1=5$,
Beispiel 7: $=12-6+1=7$.

4. Die Bedingungen III. Klasse oder Seitenbedingungen in Dreiecksnetzen ergeben sich aus den überschüssigen Dreiecksseiten, die zur Bestimmung der Dreieckspunkte vorhanden sind.

Zur einfachen, nicht versicherten Bestimmung der gegenseitigen Lage der ersten beiden Dreieckspunkte genügt eine Dreiecksseite, während für den einfachen, nicht versicherten Anschlufs eines jeden weitern Punktes zwei Dreiecksseiten erforderlich sind. Sind also n_p Dreieckspunkte ihrer Lage nach gegenseitig festzulegen, so genügen hierzu $1 + 2(n_p - 2) = 2n_p - 3$ Dreiecksseiten. Alle weitern Dreiecksseiten sind überschüssig und liefern je eine Bedingung, so dafs, wenn überhaupt n_s Dreiecksseiten bestimmt sind, die Anzahl r_{III} der Bedingungen III. Klasse $r_{III} = n_s - 2n_p + 3$ ist.

Hierbei ist es einerlei, wie die Dreiecksseiten bestimmt sind, also auch, ob die Winkel an beiden Enden oder nur an einem Ende der Dreiecksseite bestimmt sind.

Wenn in dem Dreiecksnetze Dreiecksseiten vorhanden sind, deren Länge gegeben und unverändert beizubehalten ist, so genügt eine solche Dreiecksseite, um daraus die Länge aller neu zu bestimmenden Dreiecksseiten einfach, nicht versichert abzuleiten. Jede weitere gegebene Anschlufsseite liefert eine überschüssige Bestimmung des Längenmafses der neu zu bestimmenden Dreiecksseiten und somit auch eine zu erfüllende Bedingung. Wenn daher s_a Dreiecksseiten vorhanden sind, deren Länge gegeben und unverändert beizubehalten ist, so wird die Anzahl der Bedingungen III. Klasse $r_{III} = n_s - 2n_p + 3 + (s_a - 1) = n_s - 2n_p + s_a + 2$.

Demnach ergiebt sich die Regel:

Die Anzahl r_{III} der Bedingungen III. Klasse oder der Seitenbedingungen in Dreiecksnetzen ist,

(183) wenn n_p Dreieckspunkte durch n_s Dreiecksseiten verbunden sind,:

$$r_{III} = n_s - 2n_p + 3,$$

(184) wenn aufserdem die Längen für s_a Dreiecksseiten des Dreiecksnetzes gegeben und unverändert beizubehalten sind,:

$$r_{III} = n_s - 2n_p + s_a + 2.$$

Beispiel 1: **(183)** $r_{III} = n_s - 2n_p + 3 = 9 - 2 \cdot 5 + 3 = 2,$
Beispiel 2: $= 12 - 2 \cdot 6 + 3 = 3,$
Beispiel 3: **(184)** $r_{III} = n_s - 2n_p + s_a + 2 = 7 - 2 \cdot 5 + 2 + 2 = 1,$
Beispiel 4: **(183)** $r_{III} = n_s - 2n_p + 3 = 9 - 2 \cdot 6 + 3 = 0,$
Beispiel 5: $= 20 - 2 \cdot 7 + 3 = 9,$
Beispiel 6: $= 10 - 2 \cdot 6 + 3 = 1,$
Beispiel 7: $= 15 - 2 \cdot 7 + 3 = 4.$

Die Summe $r_I + r_{II} + r_{III}$ der sich nach den Regeln **(180)** bis **(184)** ergebenden Bedingungen I., II. und III. Klasse mufs übereinstimmen mit der sich nach den Regel **(176)** bis **(179)** ergebenden Gesamtanzahl r aller in einem Dreiecksnetze zu erfüllenden Bedingungen, womit eine Sicherung für die richtige Bestimmung der Anzahl der Bedingungen gewonnen wird.

§ 56. Aufsuchung der zu erfüllenden Bedingungen.

1. Die Bedingungen I. Klasse können in jedem Falle gefunden werden, indem zuerst für jeden einzelnen Standpunkt festgestellt wird, wie viel Bedingungen die vorliegenden Winkel nach Regel **(180)** erfüllen müssen und indem diese Bedingungen nach der im § 52, Nr. 3 gegebenen Anleitung aufgesucht werden. Vielfach werden die Bedingungen I. Klasse aber ohne weiteres nach der Figur, worin die vorliegenden Winkel bezeichnet sind, gefunden und hingeschrieben werden können.

Beispiele: Nach § 55, Nr. 2 sind im Beispiele 2: $r_I = 3$ und im Beispiel 5: $r_I = 1$ Bedingungen I. Klasse zu erfüllen, in allen übrigen Beispielen keine. Nach Figur 28 sind die 3 Bedingungen des Beispiels 2:

1. dafs die Summe der wahrscheinlichsten Werthe der Winkel 4 und 5 gleich sein mufs dem wahrscheinlichsten Werthe des Winkels 7,
2. dafs die Summe der wahrscheinlichsten Werthe der Winkel 10 und 11 gleich sein mufs dem wahrscheinlichsten Werthe des Winkels 12 und
3. dafs die Summe der wahrscheinlichsten Werthe der Winkel auf Punkt 6 gleich 360° sein mufs.

Ebenso ist die eine Bedingung des Beispiels 5 nach Figur 31 die, dafs die Summe der wahrscheinlichsten Werthe der Winkel auf Punkt 7 gleich 360° sein mufs.

2. Die Bedingungen II. Klasse werden am einfachsten und sichersten in der Weise festgestellt, dafs, wenn das Netz nicht sehr einfach ist, zuerst alle geschlossenen Dreiecke und Polygone, worin sämtliche Winkel bestimmt sind und die einfach ohne Diagonalverbindungen aneinander hängen, besonders aufgezeichnet werden. Für jedes dieser geschlossenen Dreiecke und Polygone ergiebt sich dann die eine Bedingung II. Klasse, dafs die Summe der wahrscheinlichsten Werthe der Winkel den Sollbetrag (180° oder $(n-2)\cdot 180°$) erfüllen mufs. Werden dann die übrigen Diagonallinien, an deren beiden Enden die Winkel bestimmt sind, einzeln nach einander hinzugenommen und jedesmal für eins der beiden Dreiecke oder Polygone, die durch Hinzutritt einer Diagonallinie entstehen, die Bedingung angesetzt, dafs die Summe der wahrscheinlichsten Werthe der Winkel den Sollbetrag (180° oder $(n-2)\cdot 180°$) erfüllen mufs, so werden damit alle Bedingungen II. Klasse gefunden bis auf die, die sich aus dem Anschlufs des Netzes an Dreiecksseiten ergeben, deren Neigungen gegeben und unverändert beizubehalten sind. Letztere werden dann gefunden, indem zuerst eine gegebene Dreiecksseite aufgenommen und dann einzeln festgestellt wird, welche Bedingung sich durch Hinzutritt jeder einzelnen der weitern gegebenen Dreiecksseiten ergiebt.

Beispiel 1: Für die einfach aneinanderhängenden Dreiecke *a*, *b*, *c* ergeben sich zunächst die 3 Bedingungen, dafs in jedem dieser Dreiecke die Summe der wahrscheinlichsten Werthe der Winkel 180° sein mufs. Durch Hinzutritt der Diagonallinie 5—3 ergiebt sich dann weiter die Bedingung, dafs dies auch der Fall sein mufs für das Dreieck *d* und durch Hinzutritt der Diagonallinie 1—3 für das Dreieck *e*, womit die aufzusuchenden 5 Bedingungen II. Klasse bestimmt sind.

Fig. 36.

Beispiel 2: In gleicher Weise ergiebt sich für das Beispiel 2, dafs die 5 Bedingungen II. Klasse aufzustellen sind für die in Figur 37 dargestellten Dreiecke *a*, *b*, *c*, *d* und *e*.

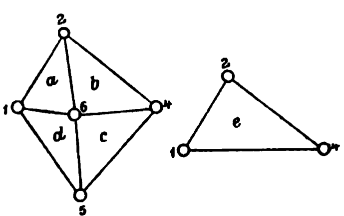
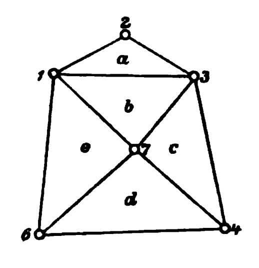


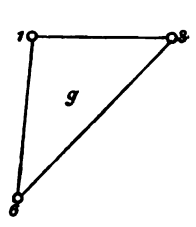
Fig. 37.

Beispiel 3: Die ersten 3 Bedingungen II. Klasse sind aufzustellen für die 3 einfach aneinanderhängenden Dreiecke, woraus das Netz besteht, und die vierte Bedingung ergiebt sich daraus, dafs die Summe der wahrscheinlichsten Werthe der Winkel auf Punkt 2 gleich sein mufs dem Unterschiede der gegebenen Neigungen der Dreiecksseiten 2 — 1 und 2 — 3.

Beispiel 4: Ebenso ergeben sich die ersten 4 Bedingungen für die 4 Dreiecke des Netzes und die fünfte daraus, dafs die Summe der Winkel an dem Polygonzuge 1—3—4—6 gleich sein mufs dem Unterschiede der gegebenen Neigungen für die beiden Anschlufsseiten plus $n \cdot 180°$.

Beispiel 5: Wie beim Beispiele 1 und 2 ergeben sich hier die in den Figuren 38 dargestellten Dreiecke a, b, c, d, e, g, h, wofür die 7 Bedingungen II. Klasse anzusetzen sind.





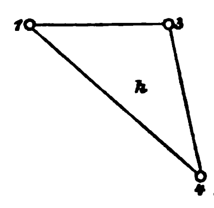
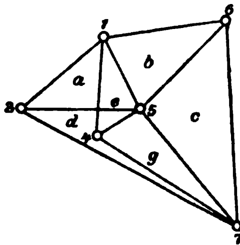


Fig. 38.

Beispiel 6: Die 5 Bedingungen II. Klasse sind anzusetzen für die 5 einfach aneinanderhängenden Dreiecke, woraus das Netz besteht.



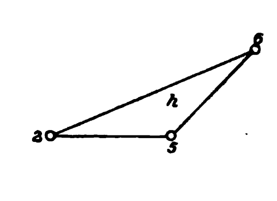


Fig. 39.

Beispiel 7: Die 7 Dreiecke, wofür die Bedingungen II. Klasse anzusetzen sind, sind in den nebenstehenden Figuren 39 dargestellt.

3. Behufs Aufsuchung der Bedingungen III. Klasse zerlegen wir das Dreiecksnetz nöthigenfalls in kleinere Teile und zwar so, dafs in jedem Teile nur eine einzige Linie überschüssig ist, also nur eine Bedingung zu erfüllen ist und dafs in jedem Teile mindestens ein Punkt vorhanden ist, der mit allen übrigen Punkten des Teils durch Dreiecksseiten verbunden ist. Wir bezeichnen diese einzelnen Teile als Centralsysteme und den Punkt eines jeden Centralsystems, der mit allen übrigen Punkten des Systems durch Dreiecksseiten verbunden ist, als Centralpunkt.

Die einfachsten Formen der Centralsysteme sind Vierecke mit 2 Diagonalen oder Polygone, deren Eckpunkte sämtlich durch Dreiecksseiten mit einem andern Punkte, dem Centralpunkte, verbunden sind.

In der Regel wird die Anzahl der Centralsysteme mit der Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen III. Klasse übereinstimmen (abgesehen von den Bedingungsgleichungen III. Klasse, die aus dem Anschlufs an ihrer Länge nach gegebene Dreiecksseiten folgen), so dafs mit Aufsuchung aller Centralsysteme auch der erforderliche Anhalt für die Aufstellung der Bedingungen III. Klasse gewonnen wird. Für die abweichenden Ausnahmefälle können keine allgemeinen Regeln gegeben werden; es wird aber meistens leicht sein, in diesen aufsergewöhnlichen Fällen die noch zu erfüllenden Bedingungen aufzufinden.

Die einzelnen Centralsysteme werden einfach und sicher gefunden wie folgt: Es wird ein Centralsystem aus dem Dreiecksnetze herausgezeichnet und dann untersucht, ob noch weitere Dreiecksseiten vorhanden sind, die die Punkte dieses Centralsystems mit einander verbinden. Ist dies der Fall, so werden zuerst die Centralsysteme festgestellt, die sich durch Hinzunahme jeder einzelnen dieser

Verbindungsdreiecksseiten ergeben. Sodann wird ein neuer Punkt mit den Dreiecksseiten hinzugenommen, die diesen Punkt mit den Punkten des ersten Centralsystems verbinden. Zwei der hinzugenommenen Dreiecksseiten sind dann erforderlich zur einfachen, nicht versicherten Bestimmung des neuen Punktes, alle übrigen hinzugenommenen Dreiecksseiten liefern je eine neue Bedingung und demnach auch je ein neues Centralsystem. Nachdem diese neuen Centralsysteme festgestellt sind, werden die weitern Punkte samt den sie mit den vorher aufgenommenen Punkten verbindenden Dreiecksseiten nacheinander einzeln hinzugenommen und wird weiter verfahren wie nach Hinzunahme des ersten Punktes.

Die Bedingungen III. Klasse, die sich ergeben aus dem Anschlufs des Netzes an Dreiecksseiten, deren Längen gegeben und unverändert beizubehalten sind, werden gefunden, indem zuerst eine gegebene Dreiecksseite in das Netz aufgenommen wird und dann für jede einzelne der weiter gegebenen Dreiecksseiten festgestellt wird, welche Bedingung sich durch ihren Hinzutritt ergiebt.

Beispiel 1: Wir nehmen zuerst das in Figur 40 dargestellte Centralsystem heraus. Dann ist nur noch Punkt 4 übrig, der mit den Punkten des ersten Centralsystems durch 3 Dreiecksseiten verbunden ist, so dafs sich durch Hinzunahme dieses Punktes mit seinen Dreiecksseiten $3 - 2 = 1$ neues Centralsystem ergiebt und zwar das in Figur 41 dargestellte. Hiermit sind die Centralsysteme festgestellt, wofür die 2 zu erfüllenden Bedingungen III. Klasse aufzustellen sind.

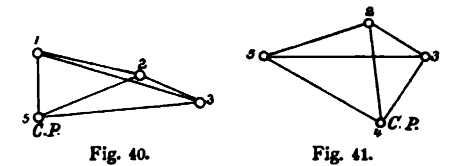


Fig. 40. Fig. 41.

Beispiel 2: Zuerst ist das in Figur 42 dargestellte Centralsystem herausgenommen. Durch die die Punkte 1 und 4 dieses Centralsystems verbindende Dreiecksseite ergiebt sich das in Figur 43 und durch die Hinzunahme des Punktes 3 mit seinen 3 Dreiecksseiten das in Figur 44 dargestellte Centralsystem.

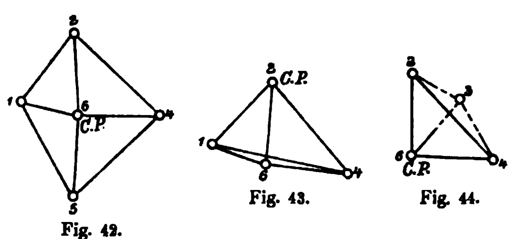


Fig. 42. Fig. 43. Fig. 44.

Beispiel 3: Es ist kein Centralsystem vorhanden, worin eine Bedingung III. Klasse zu erfüllen ist. Die einzige Bedingung dieser Art ergiebt sich daraus, dafs die Dreiecksseitenberechnung, von der ihrer Länge nach gegebenen und unverändert beizubehaltenden Seite $2 - 1$ ausgehend, auf die ebenfalls ihrer Länge nach gegebene und unverändert beizubehaltende Dreiecksseite $2 - 3$ ohne Abweichung abschliefsen mufs.

Im Beispiele 4 ist keine Bedingungsgleichung III. Klasse zu erfüllen.

Beispiel 5: Es ist zuerst das in Figur 45 dargestellte Centralsystem herausgenommen, wonach sich die beiden in Figur 46 und 47 dargestellten Central-

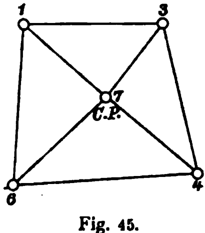


Fig. 45.



Fig. 46.

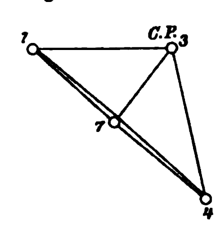


Fig. 47.

systeme durch Hinzunahme der die Punkte 1 und 4, 3 und 6 verbindenden Dreiecksseiten ergeben. Die drei weitern, in den Figuren 48 bis 50 dargestellten Centralsysteme folgen durch Hinzutritt des Punktes 2 mit seinen $5-2=3$ überschüssigen Dreiecksseiten und die drei letzten, in den Figuren 51 bis 53 dargestellten Centralsysteme durch Hinzutritt des Punktes 5 ebenfalls mit $5-2=3$ überschüssigen Dreiecksseiten.

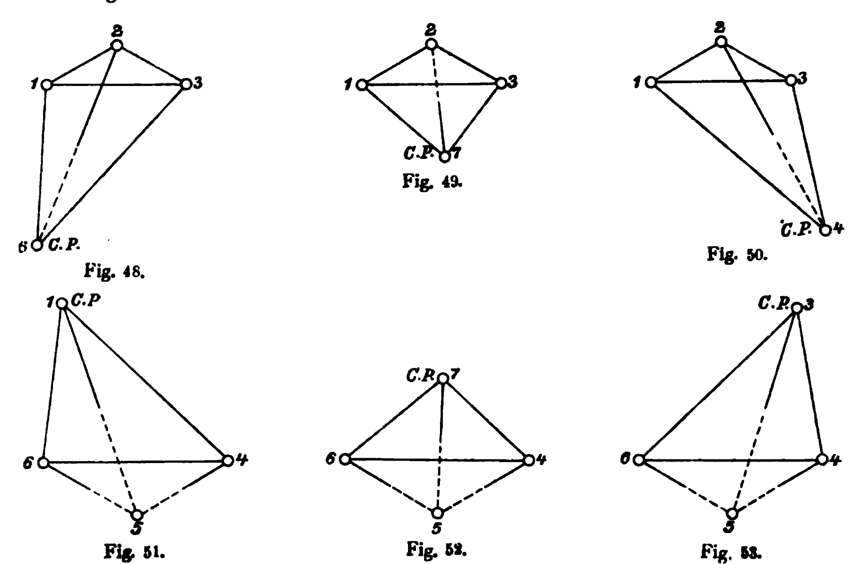


Fig. 48. Fig. 49. Fig. 50. Fig. 51. Fig. 52. Fig. 53.

Beispiel 6: Das Netz bildet ein Centralsystem.

4. Die sich für jedes Centralsystem ergebende Bedingung III. Klasse ist die, dafs die Dreiecksseitenberechnung, von einer Seite als Anfangsseite ausgehend und auf dieselbe Seite als Schlufsseite zurückführend, für Anfangs- und Schlufsseite dasselbe Mafs ergeben mufs. Die Dreiecke, deren Winkel in die aus dieser Bedingung folgenden Bedingungsgleichung eingeführt werden, haben eine gemeinschaftliche Spitze, den Centralpunkt.

In den Diagonal-Vierecken, die Centralsysteme bilden, kann jeder Eckpunkt als Centralpunkt gewählt werden*) und durch die Wahl des Centralpunktes werden die Dreiecke bestimmt, deren Winkel in die Bedingungsgleichung eingeführt werden müssen.

Beispielsweise ergiebt sich für das in Figur 54 dargestellte Centralsystem nach § 45, Seite 201 und 202, wenn der Punkt 2 als Centralpunkt genommen wird, die Bedingungsgleichung:

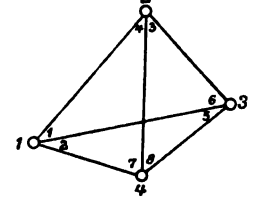


Fig. 54.

$$\frac{\sin(\mathrm{V}+\mathrm{VI})\,\sin\mathrm{VII}\,\sin\mathrm{I}}{\sin\mathrm{VIII}\,\sin(\mathrm{I}+\mathrm{II})\,\sin\mathrm{VI}}=1,$$

dagegen, wenn der Punkt 4 als Centralpunkt genommen wird, die Bedingungsgleichung:

$$\frac{\sin(\mathrm{I}+\mathrm{II})\,\sin\mathrm{III}\,\sin\mathrm{II}}{\sin\mathrm{IV}\,\sin(\mathrm{V}+\mathrm{VI})\,\sin\mathrm{V}}=1.$$

Während die Winkel der drei, am Centralpunkte liegenden Dreiecke in der Bedingungsgleichung erscheinen, fehlen die Winkel des

*) Als Centralpunkt kann auch der Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen oder der Durchschnittspunkt der Verlängerungen zweier gegenüber liegender Seiten des Vierecks genommen werden. Hierbei ergeben sich aber achtgliedrige Bedingungsgleichungen, während bei Annahme eines Eckpunktes als Centralpunkt sich nur sechsgliedrige Bedingungsgleichungen ergeben.

vierten, nicht am Centralpunkte liegenden Dreiecks. Hiernach sind wir in der Lage in einem Centralsystem die Winkel eines Dreiecks, das für die Dreiecksseitenberechnung ungünstig ist, von der Seiten-Bedingungsgleichung auszuschliefsen, indem wir als Centralpunkt den Eckpunkt des Vierecks nehmen, der nicht Eckpunkt dieses ungünstigen Dreiecks ist*).

Wir nehmen also für die in den Figuren 40 bis 53 dargestellten Centralsysteme die Punkte als Centralpunkte, die in den Figuren durch *C. P.* bezeichnet sind.

§ 57. Aufstellung der Bedingungsgleichungen und weitere Durchführung der Rechnungen.

Die Aufstellung der Bedingungsgleichungen und die weitere Durchführung der Rechnungen für Dreiecksnetze ist bereits im 1. Kapitel dieses Abschnitts ausführlich an einem einfachen Beispiele erläutert worden. Es folgt daher hier nur noch die vollständige Rechnung für Beispiel 1, worin mehrere Centralsysteme vorkommen und in dem unabhängige Winkel in die Rechnung eingeführt sind, sowie für Beispiel 6, worin Richtungen in die Rechnung eingeführt sind. Weitere Erläuterungen zu diesen Rechnungen werden nicht erforderlich sein.

*) Dies steht im Gegensatze zu der in Zachariae, „Die geodätischen Hauptpunkte und ihre Koordinaten", deutsch von Dr. E. Lamp, Seite 151 u. f. entwickelte und von Jordan in der Zeitschrift für Vermessungswesen, 1880, Seite 65 u. f., sowie in seinem Handbuche der Vermessungskunde, 3. Auflage, 1. Band, Seite 187 u. f. weiter behandelten Theorie, wonach grade die Winkel der für die Seitenberechnung ungünstigsten Dreiecke in die Seitenbedingungsgleichung einzuführen sind, um möglichst grofse Zahlenwerthe für die Koeffizienten der umgeformten Bedingungsgleichungen und für die Widersprüche zu erhalten. Wir haben uns dieser Theorie nicht angeschlossen, weil u. E. die Gröfse der Koeffizienten der umgeformten Bedingungsgleichungen und der Widersprüche im umgekehrten Verhältnis steht zu der Schärfe, womit die Fehler der für die Bestimmung des Dreiecksnetzes **wichtigen** Winkel eines Centralsystems in dem sich aus der Seitenbedingung ergebenden Widerspruche zum Ausdruck gelangen.

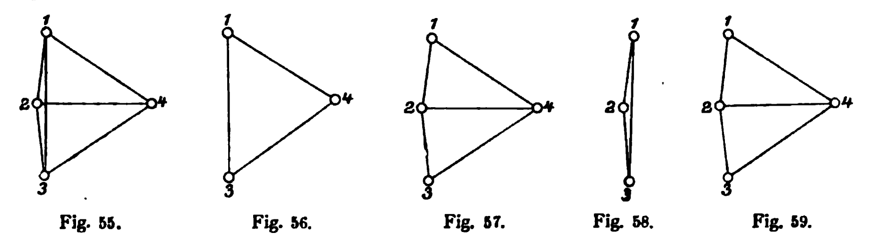
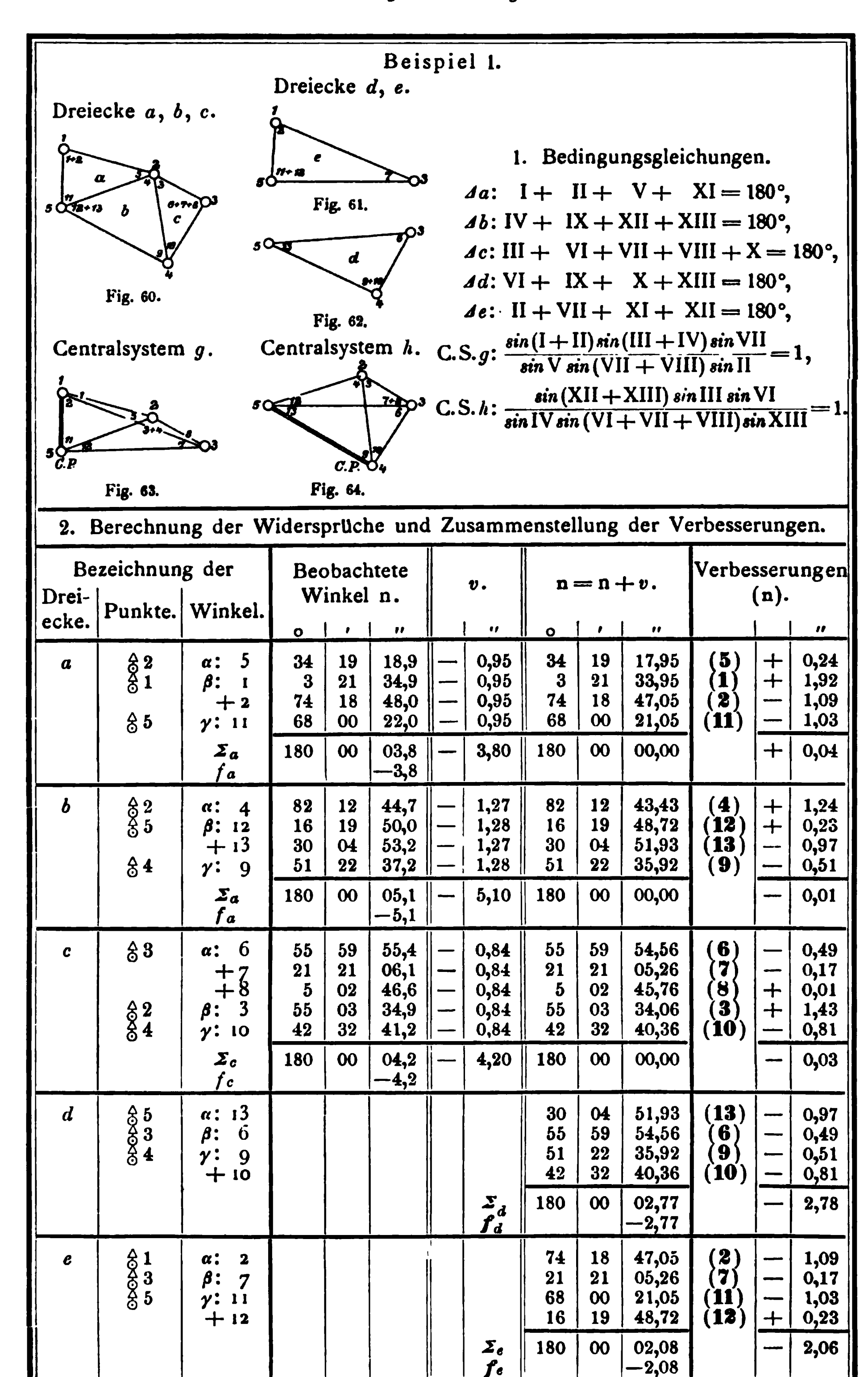


Fig. 55. Fig. 56. Fig. 57. Fig. 58. Fig. 59.

Wird in dem in Fig. 55 dargestellten Centralsysteme die Seite 3—4 aus der Seite 1—4 einmal mit den Winkeln des Dreiecks 134 und dann mit den Winkeln der Dreiecke 124 und 234 gerechnet, so werden zwei zuverlässige Werthe der Seite 3—4 erhalten, durch deren Vergleichung auch ein zuverlässiger, den Fehlern sämtlicher für die Bestimmung aller Dreiecksseiten **wichtigen** Winkel entsprechender Werth des Widerspruchs erlangt wird. Wird dagegen die Seite 2—3 aus der Seite 1—2 einmal mit den Winkeln des Dreiecks 123 und dann mit den Winkeln der Dreiecke 124 und 234 gerechnet, so ist der erste Werth der Dreiecksseite 2—3 durchaus unzuverlässig und ebenso ist auch der sich aus beiden Werthen der Dreiecksseite ergebende Widerspruch unzuverlässig. Derselbe bringt wohl die Fehler der für die Bestimmung der Dreiecksseiten unwichtigen sehr kleinen Winkel des Dreiecks scharf zum Ausdruck, dagegen aber die Fehler aller übrigen Winkel keineswegs.

Bei weiterer Durchführung der Rechnung für ein Dreiecksnetz ergeben sich dann auch Verbesserungen der Winkel, die wohl genügend scharf sind, um diejenigen Widersprüche so weit wie nöthig zu vernichten, die sich aus den sehr kleinen Winkeln ergeben haben, die aber meistens nicht genügend scharf sind, um diejenigen Widersprüche in dem erforderlichen Umfange zu vernichten, die sich aus den für die Bestimmung des Dreiecksnetzes wichtigen Winkeln ergeben. Die praktische Probe mit einem im allgemeinen durchaus gut geformten Dreiecksnetze, worin nur einmal ein Dreieck mit zwei Winkeln von nur wenigen Minuten vorkommt, wird das gesagte in vollem Umfange bestätigen. Dabei wird sich auch ergeben, dafs für die sehr kleinen Winkel verhältnismäfsig sehr grofse Koeffizienten der Verbesserungen in die umgeformten Bedingungsgleichungen eintreten, wodurch in den weitern Rechnungen die übrigen Koeffizienten im Zusammenwirken erdrückt werden und dafs daher selbst die Benutzung zehnstelliger Logarithmen bei Auflösung der Endgleichungen u. s. w. noch keine genügende Genauigkeit erreichen läfst.



Beispiel 1.

Dreiecke a, b, c.

Fig. 60.

Dreiecke d, e.

Fig. 61.

Fig. 62.

Centralsystem g.

Fig. 63.

Centralsystem h.

Fig. 64.

1. Bedingungsgleichungen.

Δa: I + II + V + XI = 180°,

Δb: IV + IX + XII + XIII = 180°,

Δc: III + VI + VII + VIII + X = 180°,

Δd: VI + IX + X + XIII = 180°,

Δe: II + VII + XI + XII = 180°,

$$\text{C.S.}g:\ \frac{\sin(\text{I}+\text{II})\sin(\text{III}+\text{IV})\sin\text{VII}}{\sin\text{V}\sin(\text{VII}+\text{VIII})\sin\text{II}}=1,$$

$$\text{C.S.}h:\ \frac{\sin(\text{XII}+\text{XIII})\sin\text{III}\sin\text{VI}}{\sin\text{IV}\sin(\text{VI}+\text{VII}+\text{VIII})\sin\text{XIII}}=1.$$

2. Berechnung der Widersprüche und Zusammenstellung der Verbesserungen.

Bezeichnung der Drei-ecke.	Punkte.	Winkel.	Beobachtete Winkel n. °	′	″	v.	″	n = n + v. °	′	″	Verbesserungen (n).		″
a	⊙ 2	α: 5	34	19	18,9	—	0,95	34	19	17,95	(5)	+	0,24
	⊙ 1	β: 1	3	21	34,9	—	0,95	3	21	33,95	(1)	+	1,92
		+ 2	74	18	48,0	—	0,95	74	18	47,05	(2)	—	1,09
	⊙ 5	γ: 11	68	00	22,0	—	0,95	68	00	21,05	(11)	—	1,03
		Σ_a	180	00	03,8	—	3,80	180	00	00,00		+	0,04
		f_a			—3,8								
b	⊙ 2	α: 4	82	12	44,7	—	1,27	82	12	43,43	(4)	+	1,24
	⊙ 5	β: 12	16	19	50,0	—	1,28	16	19	48,72	(12)	+	0,23
		+ 13	30	04	53,2	—	1,27	30	04	51,93	(13)	—	0,97
	⊙ 4	γ: 9	51	22	37,2	—	1,28	51	22	35,92	(9)	—	0,51
		Σ_a	180	00	05,1	—	5,10	180	00	00,00		—	0,01
		f_a			—5,1								
c	⊙ 3	α: 6	55	59	55,4	—	0,84	55	59	54,56	(6)	—	0,49
		+ 7	21	21	06,1	—	0,84	21	21	05,26	(7)	—	0,17
		+ 8	5	02	46,6	—	0,84	5	02	45,76	(8)	+	0,01
	⊙ 2	β: 3	55	03	34,9	—	0,84	55	03	34,06	(3)	+	1,43
	⊙ 4	γ: 10	42	32	41,2	—	0,84	42	32	40,36	(10)	—	0,81
		Σ_c	180	00	04,2	—	4,20	180	00	00,00		—	0,03
		f_c			—4,2								
d	⊙ 5	α: 13						30	04	51,93	(13)	—	0,97
	⊙ 3	β: 6						55	59	54,56	(6)	—	0,49
	⊙ 4	γ: 9						51	22	35,92	(9)	—	0,51
		+ 10						42	32	40,36	(10)	—	0,81
							Σ_d	180	00	02,77		—	2,78
							f_d			—2,77			
e	⊙ 1	α: 2						74	18	47,05	(2)	—	1,09
	⊙ 3	β: 7						21	21	05,26	(7)	—	0,17
	⊙ 5	γ: 11						68	00	21,05	(11)	—	1,03
		+ 12						16	19	48,72	(12)	+	0,23
							Σ_e	180	00	02,08		—	2,06
							f_e			—2,08			

2. Berechnung der Widersprüche und Zusammenstellung der Verbesserungen.

Bezeichnung der Dreiecke.	Punkte.	Winkel.	Winkel n. °	′	″	cpl log sin α. log sin β.	Verbesserungen g(n) und h(n) der log.		
						Centralsystem g.			
a	♁2	α: 5	34	19	17,95	0.248 8455	− 30,8((5) = + 0,24)	−	7,4
	♁1	β: 1 + 2	77	40	21,00	9.989 8694	+ 4,6((1 + 2) = + 0,83)	+	3,8
.	♁3	α: 7 + 8	26	23	51,02	0.352 0343	− 42,4((7 + 8) = − 0,16)	+	6,8
	♁2	β: 3 + 4	137	16	17,49	9.831 5657	− 22,8((3 + 4) = + 2,67)	−	60,9
e	♁1	α: 2	74	18	47,05	0.016 4849	− 5,9((2) = − 1,09)	+	6,4
	♁3	β: 7	21	21	05,26	9.561 2063	+ 53,9((7) = − 0,17)	−	9,2
					Σ_g	0.000 0061		−	60,5
					f_g	− 61			
						Centralsystem h.			
b	♁2	α: 4	82	12	43,43	0.004 0243	− 2,8((4) = + 1,24)	−	3,5
	♁5	β: 12 + 13	46	24	40,65	9.859 9231	+ 20,1((12 + 13) = − 0,74)	−	14,9
c	♁3	α: 6 + 7 + 8	82	23	45,58	0.003 8359	− 2,8((6 + 7 + 8) = − 0,65)	+	1,8
	♁2	β: 3	55	03	34,06	9.913 6798	+ 14,7((3) = + 1,43)	+	21,0
d	♁5	α: 13	30	04	51,93	0.299 9671	− 36,3((13) = − 0,97)	+	35,2
	♁3	β: 6	55	59	54,56	9.918 5665	+ 14,2((6) = − 0,49)	−	7,0
					Σ_h	9.999 9967		+	32,6
					f_h	+ 33			

3. Faktoren der Korrelatengleichungen.							4. Bildung der Faktoren der Endgleichungen.									
Nr.		p.	d.	e.	g.	h.	$\frac{dd}{p}$.	$\frac{de}{p}$.	$\frac{dg}{p}$.	$\frac{dh}{p}$.	$\frac{ee}{p}$.	$\frac{eg}{p}$.	$\frac{eh}{p}$.	$\frac{gg}{p}$.	$\frac{gh}{p}$.	$\frac{hh}{p}$.
5	a_5 = + 1	1	.	.	−30,8	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 948,6	.	.
1	a_1 = + 1	1	.	.	+ 4,6	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 21,2	.	.
2	a_2 = + 1	1	.	+1	− 1,3	.	.	.	.	.	+1	− 1,3	.	+ 1,7	.	.
11	a_{11} = + 1	1	.	+1	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	.	.	.
4	b_4 = + 1	1	.	.	−22,8	− 2,8	.	.	.	.	.	.	.	+ 519,8	+ 63,8	+ 7,8
12	b_{12} = + 1	1	.	+1	.	+20,1	.	.	.	.	+1	.	+20,1	.	.	+404,0
13	b_{13} = + 1	1	+1	.	.	−16,2	+1	.	.	−16,2	.	.	.	.	.	+262,4
9	b_9 = + 1	1	+1	.	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	c_6 = + 1	1	+1	.	.	+11,4	+1	.	.	+11,4	.	.	.	.	.	+130,0
7	c_7 = + 1	1	.	+1	+11,5	− 2,8	.	.	.	.	+1	+11,5	− 2,8	+ 132,2	− 32,2	+ 7,8
8	c_8 = + 1	1	.	.	−42,4	− 2,8	.	.	.	.	.	.	.	+1797,8	+118,7	+ 7,8
3	c_3 = + 1	1	.	.	−22,8	+14,7	.	.	.	.	.	.	.	+ 519,8	−335,2	+216,1
10	c_{10} = + 1	1	+1	.	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14		−4	.	+2	−27,5	.	.	.	.	.	−1	+13,8	.	− 189,1	.	.
15		−4	+2	+1	−22,8	+ 1,1	−1	−0,5	+11,4	− 0,6	−0,25	+ 5,7	− 0,3	− 130,0	+ 6,3	− 0,3
16		−5	+2	+1	−53,7	+20,5	−0,8	−0,4	+21,5	− 8,2	−0,20	+10,7	− 4,1	− 576,7	+220,2	− 84,0
							+2,2	−0,9	+32,9	−13,6	+2,55	+40,4	+12,9	+3045,3	+ 41,6	+951,6

5. Auflösung der

$\left[\frac{dd}{p}\right]$.	$\left[\frac{de}{p}\right]$.	$\left[\frac{dg}{p}\right]$.	$\left[\frac{dh}{p}\right]$.	$-f_d$.	$\left[\frac{ee}{p}\right]$.	$\left[\frac{eg}{p}\right]$.	$\left[\frac{eh}{p}\right]$.	$-f_e$.
+ 2,2	− 0,9	+ 32,9	− 13,6	+ 2,77	+ 2,550	+ 40,400	+ 12,900	+ 2,080
	+ 0,409	− 14,955	+ 6,182	− 1,259	− 0,368	+ 13,459	− 5,564	+ 1,133
				+ 0,174	+ 2,182	+ 53,859	+ 7,336	+ 3,213
				− 0,707		− 24,683	− 3,362	− 1,472
				− 1,118				− 0,094
								− 1,168
			$k_d =$	− 2,910			$k_e =$	− 2,734

6. Berechnung der Verbesserungen (n).

Nr.	$\frac{d}{p}k_d$	$+\frac{e}{p}k_e$	$+\frac{g}{p}k_g$	$+\frac{h}{p}k_h$	$=((n))$.	(n).		(n)(n).
5	.	.	− 1,46	.	− 1,46	$((5))+k_a$	+ 0,24	0,058
1	.	.	+ 0,22	.	+ 0,22	$((1))+k_a$	+ 1,92	3,686
2	.	− 2,73	− 0,06	.	− 2,79	$((2))+k_a$	− 1,09	1,188
11	.	− 2,73		.	− 2,73	$((11))+k_a$	− 1,03	1,061
4	.	.	− 1,08	− 0,08	− 1,16	$((4))+k_b$	+ 1,24	1,538
12	.	− 2,73		+ 0,56	− 2,17	$((12))+k_b$	+ 0,23	0,053
13	− 2,91	.		− 0,46	− 3,37	$((13))+k_b$	− 0,97	0,941
9	− 2,91	.		.	− 2,91	$((9))+k_b$	− 0,51	0,260
6	− 2,91	.	.	+ 0,32	− 2,59	$((6))+k_c$	− 0,49	0,240
7		− 2,73	+ 0,54	− 0,08	− 2,27	$((7))+k_c$	− 0,17	0,029
8		.	− 2,01	− 0,08	− 2,09	$((8))+k_c$	+ 0,01	0,000
3		.	− 1,08	+ 0,41	− 0,67	$((3))+k_c$	+ 1,43	2,045
10	− 2,91	.			− 2,91	$((10))+k_c$	− 0,81	0,656
14	.	+ 1,37	+ 0,33	.	+ 1,70	$=k_a$	$[p(n)(n)]$	11,755
15	+ 1,46	+ 0,68	+ 0,27	− 0,01	+ 2,40	$=k_b$	$\frac{f_a}{4}f_a$	3,610
16	+ 1,16	+ 0,55	+ 0,51	− 0,12	+ 2,10	$+k_c$	$\frac{f_b}{4}f_b$	6,502
	− 9,02	− 8,32	− 3,82	+ 0,46	− 20,70		$\frac{f_c}{5}f_c$	3,528
							$[p(n)(n)]$	25,395

7. Zusammenstellung

Bezeichnung der Dreiecke.	Punkte.	Winkel.	Ausgeglichene Winkel n + (n). °	′	″
a	♁2	α: V	34	19	18,19
	♁1	β: I	3	21	35,87
		+ II	74	18	45,96
	♁5	γ: XI	68	00	20,02
			180	00	00,04
b	♁2	α: IV	82	12	44,67
	♁5	β: XII	16	19	48,95
		+ XIII	30	04	50,96
	♁4	γ: IX	51	22	35,41
			179	59	59,99
c	♁3	α: VI	55	59	54,07
		+ VII	21	21	05,09
		+ VIII	5	02	45,77
	♁2	β: III	55	03	35,49
	♁4	γ: X	42	32	39,55
			179	59	59,97

$$m = \pm\sqrt{\frac{[p(n)(n)]}{r}} = \pm\sqrt{\frac{25,395}{7}} = \pm 1,9''$$

Endgleichungen.

	$\left[\frac{gg}{p}\right]$.		$\left[\frac{gh}{p}\right]$.		$-f_g$.		$\left[\frac{hh}{p}\right]$.		$-f_h$.		Probe.		
+	3 045,30	+	41,60	+	61,000	+	951,60	−	33,000				
−	492,00	+	203,38	−	41,424	−	84,07	+	17,124	−	3,488	−	8,061
−	1 329,42	−	181,08	−	79,307	−	24,66	−	10,802	−	4,731	−	5,687
+	1 223,88	+	63,90	−	59,731	−	3,34	+	3,119	−	2,915	+	2,885
		−	0,0522	+	0,0488	+	839,53	−	23,559	−	0,661	−	0,927
				−	0,0015					−	11,795	−	11,790
			k_g =	+	0,0473		k_h =	+	0,0281				

der ausgeglichenen Winkel und *log*.

Bezeichnung der Dreiecke.	Punkte.	Winkel.	Ausgeglichene Winkel n + (n). °	′	″
d	△5	α: XIII	30	04	50,96
	△3	β: VI	55	59	54,07
	△4	γ: IX	51	22	35,41
		+ X	42	32	39,55
			179	59	59,99
e	△1	α: II	74	18	45,96
	△3	β: VII	21	21	05,09
	△5	γ: XI	68	00	20,02
		+ XII	16	19	48,95
			180	00	00,02

Bezeichnung der Dreiecke.	Punkte.	Winkel.	Ausgeglichene Winkel n + (n). °	′	″	*cpl log sin α.* *log sin β.*
		Centralsystem *g*.				
a	△2	α: V	34	19	18,19	0.248 8448
	△1	β: I + II	77	40	21,83	9.989 8697
.	△3	α: VII + VIII	26	23	50,86	0.352 0350
	△2	β: III + IV	137	16	20,16	9.831 5596
e	△1	α: II	74	18	45,96	0.016 4856
	△3	β: VII	21	21	05,09	9.561 2053
						0.000 0000
		Centralsystem *h*.				
b	△2	α: IV	82	12	44,67	0.004 0240
	△5	β: XII + XIII	46	24	39,91	9.859 9216
c	△3	α: VI + VII + VIII	82	23	44,93	0.003 8361
	△2	β: III	55	03	35,49	9.913 6819
d	△5	α: XIII	30	04	50,96	0.299 9706
	△3	β: VI	55	59	54,07	9.918 5658
						0.000 0000

Beispiel 6.

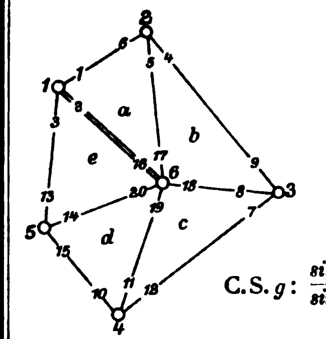


Fig. 65.

1. Bedingungsgleichungen.

$$\varDelta a:\ -\mathrm{V}+\mathrm{VI}-\mathrm{I}+\mathrm{II}-\mathrm{XVI}+\mathrm{XVII}=180^\circ,$$
$$\varDelta b:\ -\mathrm{VIII}+\mathrm{IX}-\mathrm{IV}+\mathrm{V}-\mathrm{XVII}+\mathrm{XVIII}=180^\circ,$$
$$\varDelta c:\ -\mathrm{XI}+\mathrm{XII}-\mathrm{VII}+\mathrm{VIII}-\mathrm{XVIII}+\mathrm{XIX}=180^\circ,$$
$$\varDelta d:\ -\mathrm{XIV}+\mathrm{XV}-\mathrm{X}+\mathrm{XI}-\mathrm{XIX}+\mathrm{XX}=180^\circ,$$
$$\varDelta e:\ -\mathrm{II}+\mathrm{III}-\mathrm{XIII}+\mathrm{XIV}-\mathrm{XX}+\mathrm{XVI}=180^\circ,$$

$$\mathrm{C.S.}\,g:\ \frac{\sin(-\mathrm{I}+\mathrm{II})\sin(-\mathrm{IV}+\mathrm{V})\sin(-\mathrm{VII}+\mathrm{VIII})\sin(-\mathrm{X}+\mathrm{XI})\sin(-\mathrm{XIII}+\mathrm{XIV})}{\sin(-\mathrm{V}+\mathrm{VI})\sin(-\mathrm{VIII}+\mathrm{IX})\sin(-\mathrm{XI}+\mathrm{XII})\sin(-\mathrm{XIV}+\mathrm{XV})\sin(-\mathrm{II}+\mathrm{III})}=1.$$

2. Berechnung der Widersprüche und Zusammenstellung der Verbesserungen.

Bezeichnung der Dreiecke.	Punkte.	Winkel.	Beobachtete Winkel n. °	′	″	Verbesserungen (n).		″	cpl log sin α. log sin β.	Verbesserungen g (n) der log.		
a	♁ 2	α: − 5 + 6	65	08	50,6	− (5) + (6)	−	0,47	0.042 205	− 1,0 (− (5) + (6))	+	0,5
	♁ 1	β: − 1 + 2	71	47	42,3	− (1) + (2)	−	0,89	9.977 699	+ 0,7 (− (1) + (2))	−	0,6
	♁ 6	γ: − 16 + 17	43	03	29,3	− (16) + (17)	−	0,82				
		Σ_a	180	00	02,2		−	2,18				
		f_a			−2,2							
b	♁ 3	α: − 8 + 9	46	31	26,1	− (8) + (9)	+	1,02	0.139 266	− 2,0 (− (8) + (9))	−	2,0
	♁ 2	β: − 4 + 5	33	40	11,2	− (4) + (5)	+	0,09	9.743 828	+ 3,1 (− (4) + (5))	+	0,3
	♁ 6	γ: − 17 + 18	99	48	21,0	− (17) + (18)	+	0,58				
		Σ_b	179	59	58,3		+	1,69				
		f_b			+1,7							
c	♁ 4	α: − 11 + 12	38	12	31,4	− (11) + (12)	+	1,33	0.208 640	− 2,6 (− (11) + (12))	−	3,5
	♁ 3	β: − 7 + 8	39	29	53,6	− (7) + (8)	−	0,36	9.803 494	+ 2,6 (− (7) + (8))	−	0,9
	♁ 6	γ: − 18 + 19	102	17	33,8	− (18) + (19)	+	0,25				
		Σ_c	179	59	58,8		+	1,22				
		f_c			+1,2							
d	♁ 5	α: − 14 + 15	58	11	22,0	− (14) + (15)	+	1,37	0.070 685	− 1,3 (− (14) + (15))	−	1,8
	♁ 4	β: − 10 + 11	67	14	23,9	− (10) + (11)	−	0,38	9.964 794	+ 0,9 (− (10) + (11))	−	0,3
	♁ 6	γ: − 19 + 20	54	34	12,6	− (19) + (20)	+	0,49				
		Σ_d	179	59	58,5		+	1,48				
		f_d			+1,5							
e	♁ 1	α: − 2 + 3	54	16	28,0	− (2) + (3)	+	0,28	0.090 539	− 1,5 (− (2) + (3))	−	0,4
	♁ 5	β: − 13 + 14	65	27	10,2	− (13) + (14)	−	1,31	9.958 860	+ 0,9 (− (13) + (14))	−	1,2
	♁ 6	γ: − 20 + 16	60	16	23,3	− (20) + (16)	−	0,50				
		Σ_e	180	00	01,5		−	1,53	0.000 010	$= \Sigma_g$	−	9,9
		f_e			−1,5				− 10	$= f_g$		

3. Faktoren der Korrelatengleichungen.							4. Bildung der Faktoren der Endgleichungen.																				
Nr.	*a.*	*b.*	*c.*	*d.*	*e.*	*g.*	*aa.*	*ab.*	*ac.*	*ad.*	*ae.*	*ag.*	*bb.*	*bc.*	*bd.*	*be.*	*bg.*	*cc.*	*cd.*	*ce.*	*cg.*	*dd.*	*de.*	*dg.*	*ee.*	*eg.*	*gg.*
1	−1	.	.	.	.	−0,7	+1	.	.	.	.	+0,7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 0,49
2	+1	.	.	.	−1	+2,2	+1	.	.	.	−1	+2,2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	−2,2	4,84
3	.	.	.	.	+1	−1,5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	− 1,5	2,25
4	.	−1	.	.	.	−3,1	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	.	+3,1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	9,61
5	−1	+1	.	.	.	+4,1	+1	−1	.	.	.	−4,1	+1	.	.	.	+4,1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16,81
6	+1	.	.	.	.	−1,0	+1	.	.	.	.	−1,0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1,00
7	.	.	−1	.	.	−2,6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	+2,6	.	.	.	.	.	6,76
8	.	−1	+1	.	.	+4,6	.	.	.	.	.	.	+1	−1	.	.	−4,6	+1	.	.	+4,6	.	.	.	.	.	21,16
9	.	+1	.	.	.	−2,0	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	.	−2,0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4,00
10	.	.	.	−1	.	−0,9	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	+0,9	.	.	0,81
11	.	.	−1	+1	.	+3,5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	−1	.	−3,5	+1	.	+3,5	.	.	12,25
12	.	.	+1	.	.	−2,6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	.	−2,6	.	.	.	.	.	6,76
13	.	.	.	.	−1	−0,9	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	+0,9	0,81
14	.	.	.	−1	+1	+2,2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	−1	−2,2	+1	+2,2	4,84
15	.	.	.	+1	.	−1,3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	−1,3	.	.	1,69
16	−1	.	.	.	+1	.	+1	.	.	.	−1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	.
17	+1	−1	.	.	.	.	+1	−1	.	.	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
18	.	+1	−1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	−1	.	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19	.	.	+1	−1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	−1	.	.	+1	.	.	.	.	.
20	.	.	.	+1	−1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	−1	.	+1	.	.
							+6	−2	.	.	−2	−2,2	+6	−2	.	.	+0,6	+6	−2	.	+1,1	+6	−2	+0,9	+6	−0,6	+94,08

5. Auflösung der

$[aa]$.	$[ab]$.	$[ac]$.	$[ad]$.	$[ae]$.	$[ag]$.	$-f_a$.	$[bb]$.	$[bc]$.	$[bd]$.	$[be]$.	$[bg]$.	$-f_b$.	$[cc]$.	$[cd]$.
+6	-2	.	.	-2	-2,2	+2,2	+6,000	-2,000	.	.	+0,600	-1,700	+6,000	-2,000
	+0,333	.	.	+0,333	+0,367	-0,367	-0,667	.	.	-0,667	-0,733	+0,733	.	.
						-0,047	+5,333	-2,000	.	-0,667	-0,133	-0,967	-0,750	.
						-0,098		+0,375	.	+0,125	+0,025	+0,181	+5,250	-2,000
						.					.	-0,003		+0,381
						.						-0,037		
						+0,100						.		
												+0,161		
					$k_a =$	-0,412					$k_b =$	+0,302		

6. Berechnung der Verbesserungen (n).

Nr.	ak_a	$+ bk_b$	$+ ck_c$	$+ dk_d$	$+ ek_e$	$+ gk_g$	$=$ (n).	(n)(n).
1	+0,41	.	.	.	.	+0,09	+0,50	0,250
2	−0,41	.	.	.	+0,30	−0,28	−0,39	0,152
3	.	.	.	.	−0,30	+0,19	−0,11	0,012
4	.	−0,30	.	.	.	+0,40	+0,10	0,010
5	+0,41	+0,30	.	.	.	−0,52	+0,19	0,036
6	−0,41	.	.	.	.	+0,13	−0,28	0,078
7	.	.	−0,43	.	.	+0,33	−0,10	0,010
8	.	−0,30	+0,43	.	.	−0,59	−0,46	0,212
9	.	+0,30	.	.	.	+0,26	+0,56	0,314
10	.	.	.	−0,31	.	+0,12	−0,19	0,036
11	.	.	−0,43	+0,31	.	−0,45	−0,57	0,325
12	.	.	+0,43	.	.	+0,33	+0,76	0,578
13	.	.	.	.	+0,30	+0,12	+0,42	0,176
14	.	.	.	−0,31	−0,30	−0,28	−0,89	0,792
15	.	.	.	+0,31	.	+0,17	+0,48	0,230
16	+0,41	.	.	.	−0,30	.	+0,11	0,012
17	−0,41	−0,30	.	.	.	.	−0,71	0,504
18	.	+0,30	−0,43	.	.	.	−0,13	0,017
19	.	.	+0,43	−0,31	.	.	+0,12	0,014
20	.	.	.	+0,31	+0,30	.	+0,61	0,372
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,02	4,130

$$m = \pm\sqrt{\frac{[(n)(n)]}{r}} = \pm\sqrt{\frac{4,130}{6}} = \pm 0,83''$$

7. Zusammenstellung

Nummer der Punkte.	Nummer der Richtungen.	Beobachtete Richtungen r. °	′	″
♁ 1	1	0	00	00,0
	2	71	47	42,3
	3	126	04	10,3
♁ 2	4	81	34	03,1
	5	115	14	14,3
	6	180	23	04,9
♁ 3	7	78	18	00,2
	8	117	47	53,8
	9	164	19	19,9
♁ 4	10	89	02	18,8
	11	156	16	42,7
	12	194	29	14,1
♁ 5	13	0	00	00,0
	14	65	27	10,2
	15	123	38	32,2
♁ 6	16	0	00	00,0
	17	43	03	29,3
	18	142	51	50,3
	19	245	09	24,1
	20	299	43	36,7
= [(n)(n)]				47,2

Endgleichungen.

$[ce]$.	$[cg]$.	$-f_c$.	$[dd]$.	$[de]$.	$[dg]$.	$-f_d$.	$[ee]$.	$[eg]$.	$-f_e$.	$[gg]$.	$-f_g$.	Probe.	
.	+1,100	−1,200	+6,000	−2,000	+0,900	−1,500	+6,000	−0,600	+1,500	+94,080	+10,000		
.	.	.	.	.	.	.	−0,667	−0,733	+0,733	− 0,807	+ 0,807	−0,807	−0,906
−0,250	−0,050	−0,362	.	.	.	.	−0,083	−0,017	−0,121	− 0,003	− 0,024	−0,175	−0,513
−0,250	+1,050	−1,562	−0,762	−0,095	+0,400	−0,595	−0,012	+0,050	−0,075	− 0,210	+ 0,312	−0,465	−0,516
+0,048	−0,200	+0,298	+5,238	−2,095	+1,300	−2,095	−0,838	+0,520	−0,838	− 0,323	+ 0,520	−0,838	−0,471
		+0,026		+0,400	−0,248	+0,400	+4,400	−0,780	+1,199	− 0,138	+ 0,212	−0,326	−0,442
		−0,014				+0,032		+0,177	−0,272	+92,599	+11,827	−1,511	−1,277
		+0,120				−0,118			−0,023			−4,122	−4,125
	$k_c =$	+0,430			$k_d =$	+0,314		$k_e =$	−0,295	$k_g =$	−0,1277		

der ausgeglichenen Richtungen, Winkel und *log*.

Ausgeglichene Richtungen $r+(n)$. °	′	″	Bezeichnung der Dreiecke.	Punkte.	Winkel.	Ausgeglichene Winkel. °	′	″	*cpl log sin α.* *log sin β.*
0	00	00,5	*a*	♁2	α: − V + VI	65	08	50,1	0.042 206
71	47	41,9		♁1	β: − I + II	71	47	41,4	9.977 698
126	04	10,2		♁6	γ: − XVI + XVII	43	03	28,5	
81	34	03,2				180	00	00,0	
115	14	14,5	*b*	♁3	α: − VIII + IX	46	31	27,2	0.139 264
180	23	04,6		♁2	β: − IV + V	33	40	11,3	9.743 828
78	18	00,1		♁6	γ: − XVII + XVIII	99	48	21,6	
117	47	53,3				180	00	00,1	
164	19	20,5	*c*	♁4	α: − XI + XII	38	12	32,8	0.208 637
89	02	18,6		♁3	β: − VII + VIII	39	29	53,2	9.803 493
156	16	42,1		♁6	γ: − XVIII + XIX	102	17	34,0	
194	29	14,9				180	00	00,0	
0	00	00,4	*d*	♁5	α: − XIV + XV	58	11	23,4	0.070 684
65	27	09,3		♁4	β: − X + XI	67	14	23,5	9.964 793
123	38	32,7		♁6	γ: − XIX + XX	54	34	13,1	
0	00	00,1				180	00	00,0	
43	03	28,6	*e*	♁1	α: − II + III	54	16	28,3	0.090 539
142	51	50,2		♁5	β: − XIII + XIV	65	27	08,9	9.958 859
245	09	24,2		♁6	γ: − XX + XVI	60	16	22,7	
299	43	37,3				179	59	59,9	0.000 001
		47,2							

4. Kapitel. Anwendung des Verfahrens auf die Berechnung von Liniennetzen.

§ 58. Entwicklung der Formeln und Durchführung der Rechnungen.

1. In Liniennetzen, deren einzelne Strecken gemessen sind, sind zur einfachen, nicht versicherten gegenseitigen Festlegung der ersten drei Punkte auch drei Strecken erforderlich. Zum einfachen, nicht versicherten Anschlufs eines jeden weitern Punktes sind 2 weitere Strecken erforderlich. Demnach sind zur einfachen, nicht versicherten gegenseitigen Festlegung von n_p Punkten $3+2(n_p-3)$ gemessene Strecken erforderlich und wenn das Liniennetz n_s gemessene Strecken umfafst, so sind $n_s-3-2(n_p-3)=n_s-2n_p+3$ Strecken überschüssig und ebenso viele Bedingungen zu erfüllen.

In der Regel wird verlangt, dafs die einzelnen Strecken der im Felde ausgerichteten Linien des Netzes, wovon andere Linien des Netzes abgehen, auch nach der Ausgleichung wieder in gleicher Richtung liegen, also wieder eine gerade Linie bilden sollen. Dann genügt zur einfachen, nicht versicherten Bestimmung der Richtung einer jeden geraden Linie eine Strecke, während sich aus der angeführten Zwangsbedingung für alle weitern Strecken der geraden Linien je eine überschüssige Bestimmung ihrer Richtung und damit auch je eine zu erfüllende Bedingung ergiebt. Wenn demnach n_g gerade Linien mit n_{sg} Strecken, die auch nach der Ausgleichung wieder eine Gerade bilden sollen, vorhanden sind, so treten zu den im übrigen zu erfüllenden Bedingungen noch $n_{sg}-n_g$ Bedingungen hinzu, so dafs im ganzen $n_s-2n_p+3+n_{sg}-n_g$ Bedingungen zu erfüllen sind.

Wir erhalten damit die Regel:

(185) Wenn in einem Liniennetze zur Bestimmung von n_p Punkten n_s Strecken gemessen sind und n_{sg} von diesen Strecken in n_g geraden Linien liegen, die gerade bleiben sollen, so ist die Anzahl r der zu erfüllenden Bedingungen:

$$r=n_s-2n_p+3+n_{sg}-n_g.$$

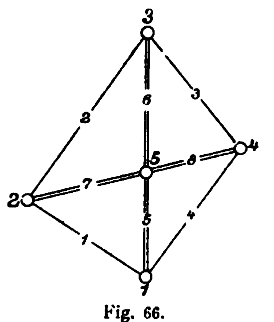


Fig. 66.

Beispiel: Zur Bestimmung der gegenseitigen Lage der $n_p=5$ Punkte 1 bis 5 sind die $n_s=8$ Strecken 1 bis 8 gemessen worden. Die $n_{sg}=4$ Strecken 5 bis 8 der $n_g=2$ geraden Linien 1—3 und 2—4 sollen auch nach der Ausgleichung wieder gerade Linien bilden. Dann ist die Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen:

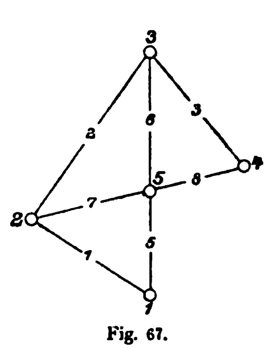
$$(185)\quad r=n_s-2n_p+3+n_{sg}-n_g$$
$$=8-2\cdot5+3+4-2=3.$$

2. Die Aufsuchung der zu erfüllenden Bedingungen erfolgt wieder am einfachsten und sichersten, indem zuerst die zur einfachen, nicht versicherten Bestimmung der Punkte genügenden Strecken aufgezeichnet werden und dann festgestellt wird, welche Bedingungen sich durch Hinzunahme der übrigen Strecken und der Zwangsbedingungen der Geradlinigkeit der davon betroffenen Strecken ergeben.

Beispiel: Zur einfachen, nicht versicherten Bestimmung der gegenseitigen Lage der Punkte 1 bis 5 genügen die Längen der in Figur 67 dargestellten Strecken 1 bis 3 und 5 bis 8.

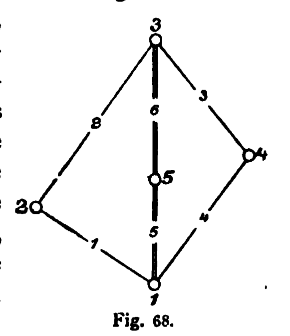
Die gegenseitige Lage der Punkte kann festgestellt werden, indem entweder die Polarkoordinaten*) oder die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte in einem oder wenn nöthig in mehreren zusammenhängenden Systemen bestimmt werden.

Indem wir letztere Bestimmungsart wählen und annehmen, dafs die Koordinaten der Punkte 1 bis 5 aus den Längen der in Figur 67 dargestellten Strecken ı bis 3 und 5 bis 8 berechnet sind, erhalten wir durch Hinzunahme der Strecke 4 die Bedingung, dafs die Quadratsumme der Koordinatenunterschiede der Punkte 1 und 4 gleich sein mufs dem Quadrat der Länge der Strecke 4. Ferner erhalten wir aus der Zwangsbedingung, dafs die Strecken der Linien 1—3 und 2—4 Gerade bilden sollen, die beiden Bedingungen, dafs die durch die Koordinatenunterschiede ausgedrückten Tangenten oder Cotangenten der einzelnen Strecken dieser Linien einander gleich sein müssen.


Fig. 67.

Die sich aus der Zwangsbedingung der Geradlinigkeit ergebenden Bedingungen führen, wie wir sehen werden, zu weniger einfachen Rechnungen, wie die übrigen Bedingungen. Defshalb kann eine Vereinfachung der gesamten Rechnungen erzielt werden, indem eine gerade Linie mit möglichst vielen Strecken als Abscissenachse des Koordinatensystems gewählt und die Zwangsbedingung der Geradlinigkeit für diese Linie vorab dadurch erfüllt wird, dafs die Ordinaten sämtlicher an dieser Linie liegenden Punkte gleich Null gesetzt werden. Dann treten an Stelle der aus der Zwangsbedingung der Geradlinigkeit folgenden und durch die getroffene Festsetzung in Wegfall kommenden Bedingungen ebenso viele andere, aber zu einfacheren Rechnungen führende Bedingungen.

Wenn wir demnach in unserm Beispiele die Linie 1—3 als Abscissenachse nehmen und festsetzen, dafs die Ordinaten der an dieser Linie liegenden Punkte 1, 5, 3 gleich Null sein sollen, so genügen zur einfachen, nicht versicherten Berechnung der rechtwinkligen Koordinaten der Punkte 1 bis 5 die Längen der in nebenstehender Figur dargestellten Strecken ı bis 6 und es ergeben sich zuerst die beiden Bedingungen, dafs die Quadratsumme der Koordinatenunterschiede der Punkte 2, 5 und 5, 4 je gleich sein mufs dem Quadrat der Länge der Strecken 7 und 8, und dann noch die eine Bedingung, dafs die durch die Koordinatenunterschiede der Punkte 2, 5 und 5, 4 ausgedrückten Tangenten oder Cotangenten der Linien 2—5 und 5—4 einander gleich sein müssen.


Fig. 68.

3. Die weitern Entwicklungen gestalten sich in allen Fällen gleichartig, wir führen defshalb von hier ab lediglich das Beispiel weiter. Wir nehmen die Linie 1—3 als Abscissenachse und den Punkt 1 als Nullpunkt der Koordinaten, auch setzen wir fest, dafs die wahrscheinlichsten Werthe der Ordinaten y_5 und y_3 der Punkte 5 und 3 gleich Null sein sollen, so dafs also

$$(1^*) \qquad y_1 = 0, \quad y_5 = 0, \quad y_3 = 0$$

wird.

*) Vergl. Gaufs, Die trig. u. polyg. Rechnungen u. s. w. 2. Auflage, 1. Teil, Seite 538 u. f.

Dann ergeben sich die wahrscheinlichsten Werthe x_1, x_5, x_3 der Abscissen dieser Punkte aus den wahrscheinlichsten Werthen V und VI der Längen der Strecken 1—5 und 5—3 nach:

Fig. 69.

(2*) $$x_1 = 0, \quad x_5 = \text{V}, \quad x_3 = \text{V} + \text{VI}.$$

Ferner ergeben sich die wahrscheinlichsten Werthe $x_2\, y_2$, $x_4\, y_4$ der Koordinaten der Punkte 2 und 4 aus den wahrscheinlichsten Werthen I, II, III, IV und V + VI der Strecken 1—2, 2—3, 3—4, 4—1 und 1—3, indem

(3*) $$z_2 = (\text{V}+\text{VI}) - x_2, \qquad z_4 = (\text{V}+\text{VI}) - x_4$$

gesetzt wird, nach folgenden Formeln:

(4*) $$\begin{cases} \mathbf{\tfrac{1}{2}}(x_2 + z_2) = \mathbf{\tfrac{1}{2}}(\text{V}+\text{VI}),\text{*)} \\ \mathbf{\tfrac{1}{2}}(x_2 - z_2) = \dfrac{(\text{I}+\text{II})(\text{I}-\text{II})}{\mathbf{2}(\text{V}+\text{VI})}, \end{cases} \quad \begin{aligned} x_2 &= \mathbf{\tfrac{1}{2}}(x_2+z_2) + \mathbf{\tfrac{1}{2}}(x_2 - z_2), \\ z_2 &= \mathbf{\tfrac{1}{2}}(x_2+z_2) - \mathbf{\tfrac{1}{2}}(x_2 - z_2), \end{aligned} \quad \begin{aligned} y_2 &= \sqrt{\text{I}^2 - x_2^2} \\ &= \sqrt{\text{II}^2 - z_2^2}; \end{aligned}$$

(5*) $$\begin{cases} \mathbf{\tfrac{1}{2}}(z_4 + x_4) = \tfrac{1}{2}(\text{V}+\text{VI}), \\ \mathbf{\tfrac{1}{2}}(z_4 - x_4) = \dfrac{(\text{III}+\text{IV})(\text{III}-\text{IV})}{\mathbf{2}(\text{V}+\text{VI})}, \end{cases} \quad \begin{aligned} z_4 &= \mathbf{\tfrac{1}{2}}(z_4+x_4) + \mathbf{\tfrac{1}{2}}(z_4 - x_4), \\ x_4 &= \mathbf{\tfrac{1}{2}}(z_4+x_4) - \mathbf{\tfrac{1}{2}}(z_4 - x_4), \end{aligned} \quad \begin{aligned} y_4 &= \sqrt{\text{III}^2 - z_4^2} \\ &= \sqrt{\text{IV}^2 - x_4^2}. \end{aligned}$$

Hiernach ergeben sich die folgenden Bedingungsgleichungen:

(6*) $$\begin{cases} \text{a)}\ (\text{V} - x_2)^2 + y_2^2 = \text{VII}^2, & \text{oder: } (\text{V} - x_2)^2 + y_2^2 - \text{VII}^2 = S_a = 0, \\ \text{b)}\ (x_4 - \text{V})^2 + y_4^2 = \text{VIII}^2, & \text{oder: } (x_4 - \text{V})^2 + y_4^2 - \text{VIII}^2 = S_b = 0, \\ \text{c)}\ \dfrac{\text{V} - x_2}{y_2} = \dfrac{x_4 - \text{V}}{y_4}, & \text{oder: } \dfrac{y_4\,(\text{V} - x_2)}{y_2\,(x_4 - \text{V})} = S_c = \mathbf{1}. \end{cases}$$

4. Behufs Bestimmung der Beobachtungsergebnisse der Sollbeträge Σ_a, Σ_b, Σ_c berechnen wir zuerst die Koordinaten $\mathfrak{x}\ \mathfrak{y}$ der Punkte 1 bis 5 aus den vorliegenden Beobachtungsergebnissen 1 bis 6 nach den Formeln:

(7*) $$\mathfrak{y}_1 = 0, \qquad \mathfrak{y}_5 = 0, \qquad \mathfrak{y}_3 = 0,$$

(8*) $$\mathfrak{x}_1 = 0, \qquad \mathfrak{x}_5 = 5, \qquad \mathfrak{x}_3 = 5 + 6,$$

(9*) $$\mathfrak{z}_2 = (5+6) - \mathfrak{x}_2, \qquad \mathfrak{z}_4 = (5+6) - \mathfrak{x}_4.$$

(10*) $$\begin{cases} \mathbf{\tfrac{1}{2}}(\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{z}_2) = \mathbf{\tfrac{1}{2}}(5+6), \\ \mathbf{\tfrac{1}{2}}(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{z}_2) = \dfrac{(1+2)(1-2)}{\mathbf{2}(5+6)}, \end{cases} \quad \begin{aligned} \mathfrak{x}_2 &= \mathbf{\tfrac{1}{2}}(\mathfrak{x}_2+\mathfrak{z}_2) + \mathbf{\tfrac{1}{2}}(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{z}_2), \\ \mathfrak{z}_2 &= \mathbf{\tfrac{1}{2}}(\mathfrak{x}_2+\mathfrak{z}_2) - \mathbf{\tfrac{1}{2}}(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{z}_2), \end{aligned} \quad \begin{aligned} \mathfrak{y}_2 &= \sqrt{1^2 - \mathfrak{x}_2^2} \\ &= \sqrt{2^2 - \mathfrak{z}_2^2}; \end{aligned}$$

(11*) $$\begin{cases} \mathbf{\tfrac{1}{2}}(\mathfrak{z}_4 + \mathfrak{x}_4) = \mathbf{\tfrac{1}{2}}(5+6), \\ \mathbf{\tfrac{1}{2}}(\mathfrak{z}_4 - \mathfrak{x}_4) = \dfrac{(3+4)(3-4)}{\mathbf{2}(5+6)}, \end{cases} \quad \begin{aligned} \mathfrak{z}_4 &= \mathbf{\tfrac{1}{2}}(\mathfrak{z}_4+\mathfrak{x}_4) + \mathbf{\tfrac{1}{2}}(\mathfrak{z}_4 - \mathfrak{x}_4), \\ \mathfrak{x}_4 &= \mathbf{\tfrac{1}{2}}(\mathfrak{z}_4+\mathfrak{x}_4) - \mathbf{\tfrac{1}{2}}(\mathfrak{z}_4 - \mathfrak{x}_4), \end{aligned} \quad \begin{aligned} \mathfrak{y}_4 &= \sqrt{3^2 - \mathfrak{z}_4^2} \\ &= \sqrt{4^2 - \mathfrak{x}_4^2}. \end{aligned}$$

Hiermit und mit den Beobachtungsergebnissen 7 und 8 der Strecken 2—5 und 5—4 erhalten wir für die Beobachtungsergebnisse der Sollbeträge und für die Widersprüche f_a, f_b, f_c zwischen diesen und den Sollbeträgen:

(12*) $$\begin{cases} (5 - \mathfrak{x}_2)^2 + \mathfrak{y}_2^2 - 7^2 = \Sigma_a, \\ (\mathfrak{x}_4 - 5)^2 + \mathfrak{y}_4^2 - 8^2 = \Sigma_b, \\ \dfrac{\mathfrak{y}_4}{\mathfrak{y}_2} \cdot \dfrac{5 - \mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_4 - 5} = \Sigma_c; \end{cases} \qquad (13^*) \quad \begin{cases} f_a = -\Sigma_a, \\ f_b = -\Sigma_b, \\ f_c = \mathbf{1} - \Sigma_c. \end{cases}$$

---

*) In den Formeln sind die Zahlen, die **keine** Beobachtungsergebnisse bezeichnen, fett gedruckt.

5. Aus den Beobachtungsergebnissen 1 bis 8 und aus den daraus abgeleiteten Koordinaten $\mathfrak{x}\ \mathfrak{y}$ der Punkte 1 bis 5 ergeben sich die wahrscheinlichsten Werthe I bis VIII der Streckenlängen und die wahrscheinlichsten Werthe $x\ y$ der Koordinaten durch Beifügung der Verbesserungen (1) bis (8) und $(\mathfrak{x})\ (\mathfrak{y})$ nach:

$$(14^*)\left\{\begin{array}{r|r|l|l}
\mathrm{I} = 1 + (1), & \mathrm{V} = 5 + (5), & x_1 = 0, & y_1 = 0, \\
\mathrm{II} = 2 + (2), & \mathrm{VI} = 6 + (6), & x_2 = \mathfrak{x}_2 + (\mathfrak{x}_2), & y_2 = \mathfrak{y}_2 + (\mathfrak{y}_2), \\
\mathrm{III} = 3 + (3), & \mathrm{VII} = 7 + (7), & x_3 = (5+6) + ((5)+(6)), & y_3 = 0, \\
\mathrm{IV} = 4 + (4), & \mathrm{VIII} = 8 + (8), & x_4 = \mathfrak{x}_4 + (\mathfrak{x}_4), & y_4 = \mathfrak{y}_4 + (\mathfrak{y}_4), \\
\hline
z_3 = \mathfrak{z}_2 + (\mathfrak{z}_2), & z_4 = \mathfrak{z}_4 + (\mathfrak{z}_4), & x_5 = 5 + (5), & y_5 = 0.
\end{array}\right.$$

6. Die zur Aufstellung der umgeformten Bedingungsgleichungen erforderlichen Differenzialquotienten ergeben sich wie folgt:

$$(10^*)\quad \mathfrak{x}_2 = \frac{1}{2}(5+6) + \frac{1^2 - 2^2}{2(5+6)}. \qquad\qquad (10^*)\quad \mathfrak{z}_2 = \frac{1}{2}(5+6) - \frac{1^2 - 2^2}{2(5+6)}.$$

$$(15^*)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathfrak{x}_2}{\partial 1} = +\frac{1}{5+6}, \quad \frac{\partial \mathfrak{x}_2}{\partial 2} = -\frac{2}{5+6}, \\
&\frac{\partial \mathfrak{x}_2}{\partial 5} = \frac{\partial \mathfrak{x}_2}{\partial 6} = +\frac{\mathfrak{z}_2}{5+6}.
\end{aligned}\right. \qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathfrak{z}_2}{\partial 1} = -\frac{1}{5+6}, \quad \frac{\partial \mathfrak{z}_2}{\partial 2} = +\frac{2}{5+6}, \\
&\frac{\partial \mathfrak{z}_2}{\partial 5} = \frac{\partial \mathfrak{z}_2}{\partial 6} = +\frac{\mathfrak{x}_2}{5+6}.
\end{aligned}$$

$$(11^*)\quad \mathfrak{z}_4 = \frac{1}{2}(5+6) + \frac{3^2 - 4^2}{2(5+6)}. \qquad\qquad (11^*)\quad \mathfrak{x}_4 = \frac{1}{2}(5+6) - \frac{3^2 - 4^2}{2(5+6)}.$$

$$(16^*)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathfrak{z}_4}{\partial 3} = +\frac{3}{5+6}, \quad \frac{\partial \mathfrak{z}_4}{\partial 4} = -\frac{4}{5+6}, \\
&\frac{\partial \mathfrak{z}_4}{\partial 5} = \frac{\partial \mathfrak{z}_4}{\partial 6} = +\frac{\mathfrak{x}_4}{5+6}.
\end{aligned}\right. \qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathfrak{x}_4}{\partial 3} = -\frac{3}{5+6}, \quad \frac{\partial \mathfrak{x}_4}{\partial 4} = +\frac{4}{5+6}, \\
&\frac{\partial \mathfrak{x}_4}{\partial 5} = \frac{\partial \mathfrak{x}_4}{\partial 6} = +\frac{\mathfrak{z}_4}{5+6}.
\end{aligned}$$

$$(10^*)\qquad \mathfrak{y}_2 = (1^2 - \mathfrak{x}_2^2)^{\frac{1}{2}} = (2^2 - \mathfrak{z}_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

$$(17^*)\quad \frac{\partial \mathfrak{y}_2}{\partial 1} = +\frac{\mathfrak{z}_2}{\mathfrak{y}_2}\cdot\frac{1}{5+6}, \quad \frac{\partial \mathfrak{y}_2}{\partial 2} = +\frac{\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{y}_2}\cdot\frac{2}{5+6}, \quad \frac{\partial \mathfrak{y}_2}{\partial 5} = \frac{\partial \mathfrak{y}_2}{\partial 6} = -\frac{\mathfrak{x}_2\mathfrak{z}_2}{\mathfrak{y}_2(5+6)}.$$

$$(11^*)\qquad \mathfrak{y}_4 = (3^2 - \mathfrak{z}_4^2)^{\frac{1}{2}} = (4^2 - \mathfrak{x}_4^2)^{\frac{1}{2}}.$$

$$(18^*)\quad \frac{\partial \mathfrak{y}_4}{\partial 3} = +\frac{\mathfrak{x}_4}{\mathfrak{y}_4}\cdot\frac{3}{5+6}, \quad \frac{\partial \mathfrak{y}_4}{\partial 4} = +\frac{\mathfrak{z}_4}{\mathfrak{y}_4}\cdot\frac{4}{5+6}, \quad \frac{\partial \mathfrak{y}_4}{\partial 5} = \frac{\partial \mathfrak{y}_4}{\partial 6} = -\frac{\mathfrak{x}_4\mathfrak{z}_4}{\mathfrak{y}_4(5+6)}.$$

$$(12^*)\ F_a(1,2,\ldots 8) = (5-\mathfrak{x}_2)^2 + \mathfrak{y}_2^2 - 7^2. \qquad (12^*)\ F_b(1,2,\ldots 8) = (\mathfrak{x}_4 - 5)^2 + \mathfrak{y}_4^2 - 8^2.$$

$$(19^*)\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial F_a}{\partial 1} &= +2\,\frac{1\cdot 6}{5+6}, \\
\frac{\partial F_a}{\partial 2} &= +2\,\frac{2\cdot 5}{5+6}, \\
\frac{\partial F_a}{\partial 5} &= -2\,\frac{6\cdot \mathfrak{x}_2}{5+6}, \\
\frac{\partial F_a}{\partial 6} &= -2\,\frac{5\cdot \mathfrak{z}_2}{5+6}, \\
\frac{\partial F_a}{\partial 7} &= -2\cdot 7.
\end{aligned}\right. \qquad
(20^*)\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial F_b}{\partial 3} &= +2\,\frac{3\cdot 5}{5+6}, \\
\frac{\partial F_b}{\partial 4} &= +2\,\frac{4\cdot 6}{5+6}, \\
\frac{\partial F_b}{\partial 5} &= -2\,\frac{6\cdot \mathfrak{x}_4}{5+6}, \\
\frac{\partial F_b}{\partial 6} &= -2\,\frac{5\cdot \mathfrak{z}_4}{5+6}, \\
\frac{\partial F_b}{\partial 8} &= -2\cdot 8.
\end{aligned}\right.$$

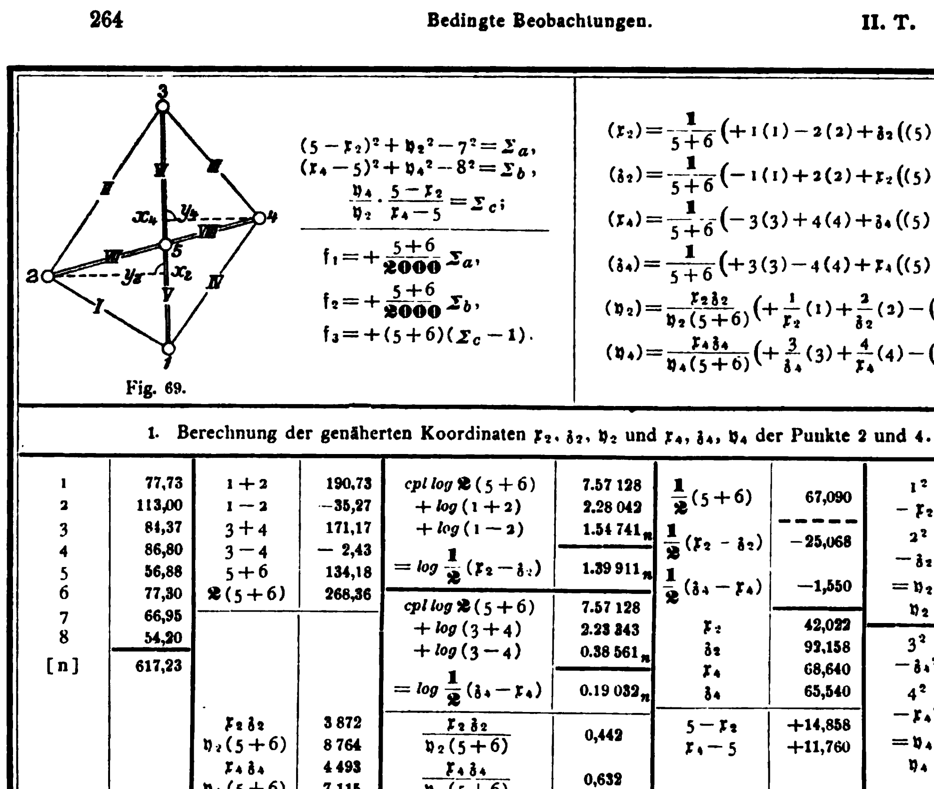


Fig. 69.

$$(5-\mathfrak{x}_2)^2+\mathfrak{y}_2^2-7^2=\Sigma_a,$$
$$(\mathfrak{x}_4-5)^2+\mathfrak{y}_4^2-8^2=\Sigma_b,$$
$$\frac{\mathfrak{y}_4}{\mathfrak{y}_2}\cdot\frac{5-\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_4-5}=\Sigma_c;$$

$$\mathfrak{f}_1=+\frac{5+6}{2000}\Sigma_a,$$
$$\mathfrak{f}_2=+\frac{5+6}{2000}\Sigma_b,$$
$$\mathfrak{f}_3=+(5+6)(\Sigma_c-1).$$

$$(\mathfrak{x}_2)=\frac{1}{5+6}\big(+1(1)-2(2)+\mathfrak{z}_2((5)+(6))\big),$$
$$(\mathfrak{z}_2)=\frac{1}{5+6}\big(-1(1)+2(2)+\mathfrak{x}_2((5)+(6))\big),$$
$$(\mathfrak{x}_4)=\frac{1}{5+6}\big(-3(3)+4(4)+\mathfrak{z}_4((5)+(6))\big),$$
$$(\mathfrak{z}_4)=\frac{1}{5+6}\big(+3(3)-4(4)+\mathfrak{x}_4((5)+(6))\big),$$
$$(\mathfrak{y}_2)=\frac{\mathfrak{x}_2\mathfrak{z}_2}{\mathfrak{y}_2(5+6)}\Big(+\frac{1}{\mathfrak{x}_2}(1)+\frac{2}{\mathfrak{z}_2}(2)-((5)+(6))\Big),$$
$$(\mathfrak{y}_4)=\frac{\mathfrak{x}_4\mathfrak{z}_4}{\mathfrak{y}_4(5+6)}\Big(+\frac{3}{\mathfrak{z}_4}(3)+\frac{4}{\mathfrak{x}_4}(4)-((5)+(6))\Big).$$

1. Berechnung der genäherten Koordinaten $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{z}_2$, $\mathfrak{y}_2$ und $\mathfrak{x}_4$, $\mathfrak{z}_4$, $\mathfrak{y}_4$ der Punkte 2 und 4.

1	77,73	$1+2$	190,73	$cpl\ log\ \mathbf{2}(5+6)$	7.57 128	$\frac{1}{\mathbf{2}}(5+6)$	67,090	1^2	60 41,95
2	113,00	$1-2$	−35,27	$+\ log\ (1+2)$	2.28 042			$-\mathfrak{x}_2^2$	17 65,85
3	84,37	$3+4$	171,17	$+\ log\ (1-2)$	1.54 741$_n$	$\frac{1}{\mathbf{2}}(\mathfrak{x}_2-\mathfrak{z}_2)$	−25,068	2^2	1 27 69,00
4	86,80	$3-4$	− 2,43					$-\mathfrak{z}_2^2$	84 93,10
5	56,88	$5+6$	134,18	$=log\ \frac{1}{\mathbf{2}}(\mathfrak{x}_2-\mathfrak{z}_2)$	1.39 911$_n$	$\frac{1}{\mathbf{2}}(\mathfrak{z}_4-\mathfrak{x}_4)$	−1,550	$=\mathfrak{y}_2^2$	42 76,00
6	77,30	$\mathbf{2}(5+6)$	268,36	$cpl\ log\ \mathbf{2}(5+6)$	7.57 128			$\mathfrak{y}_2$	65,391
7	66,95			$+\ log\ (3+4)$	2.23 343	$\mathfrak{x}_2$	42,022	3^2	71 18,30
8	54,20			$+\ log\ (3-4)$	0.38 561$_n$	$\mathfrak{z}_2$	92,158	$-\mathfrak{z}_4^2$	42 95,49
[n]	617,23			$=log\ \frac{1}{\mathbf{2}}(\mathfrak{z}_4-\mathfrak{x}_4)$	0.19 032$_n$	$\mathfrak{x}_4$	68,640	4^2	75 34,34
						$\mathfrak{z}_4$	65,540	$-\mathfrak{x}_4^2$	47 11.45
		$\mathfrak{x}_2\mathfrak{z}_2$	3 872	$\frac{\mathfrak{x}_2\mathfrak{z}_2}{\mathfrak{y}_2(5+6)}$	0,442	$5-\mathfrak{x}_2$	+14,858	$=\mathfrak{y}_4^2$	28 22,80
		$\mathfrak{y}_2(5+6)$	8 764			$\mathfrak{x}_4-5$	+11,760	$\mathfrak{y}_4$	53,130
		$\mathfrak{x}_4\mathfrak{z}_4$	4 493	$\frac{\mathfrak{x}_4\mathfrak{z}_4}{\mathfrak{y}_4(5+6)}$	0,632				
		$\mathfrak{y}_4(5+6)$	7 115						

2. Berechnung der Widersprüche und der Faktoren der Bedingungsgleichungen.

$(5-\mathfrak{x}_2)^2$	2 20,76	$(\mathfrak{x}_4-5)^2$	1 38,30	$log\ \mathfrak{y}_4$	1.72 534	$-\frac{1}{5-\mathfrak{x}_2}$	−0,0673	$+\frac{1}{5-\mathfrak{x}_2}$	+0,0673
$+\mathfrak{y}_2^2$	42 76,00	$+\mathfrak{y}_4^2$	28 22,80	$+\ cpl\ log\ \mathfrak{y}_2$	8.18 448				
	44 96,76		29 61,10	$+\ log\ (5-\mathfrak{x}_2)$	1.17 196	$-\frac{\mathfrak{z}_2}{\mathfrak{y}_2^2}$	−0,0215	$-\frac{\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{y}_2^2}$	−0,0098
-7^2	44 82,30	-8^2	29 37,64	$+\ cpl\ log\ (\mathfrak{x}_4-5)$	8.92 959				
$=\Sigma_a$	+14,46	$=\Sigma_c$	+23,46	$=log\ \Sigma_c$	0.01 137	$=\gamma_1$	−0,0888	$=\gamma_2$	+0,0575
$\mathfrak{f}_1$	+0,970	$\mathfrak{f}_2$	+1,574	Σ_c	1.026 52	$+\frac{1}{\mathfrak{x}_4-5}$	+0,0850	$-\frac{1}{\mathfrak{x}_4-5}$	−0,0850
				Σ_c-1	+0,026 52	$+\frac{\mathfrak{x}_4}{\mathfrak{y}_4^2}$	+0,0243	$+\frac{\mathfrak{z}_4}{\mathfrak{y}_4^2}$	+0,0232
				$\mathfrak{f}_3$	+3,558	$=\gamma_3$	+0,1093	$=\gamma_4$	−0,0618
						$-\mathfrak{x}_2\gamma_1$	+3,73	$-\mathfrak{z}_2\gamma_2$	−5,30
						$-\mathfrak{x}_4\gamma_4$	+4,24	$-\mathfrak{z}_4\gamma_3$	−7,16
						$=c_5$	+7,97	$=c_6$	−12,46

2. Bildung der Faktoren der Bedingungsgleichungen.

Nr.	*a.*			*b.*			*c.*		
1	$+1\cdot 6$	+	6,01			.	$+1\cdot\gamma_1$	—	6,90
2	$+2\cdot 5$	+	6,43			.	$+2\cdot\gamma_2$	+	6,50
3			.	$+3\cdot 5$	+	4,80	$+3\cdot\gamma_3$	+	9,22
4			.	$+4\cdot 6$	+	6,71	$+4\cdot\gamma_4$	—	5,36
5	$-6\cdot\mathfrak{x}_2$	—	3,25	$-6\cdot\mathfrak{x}_4$	—	5,30	c_5	+	7,97
6	$-5\cdot\mathfrak{z}_2$	—	5,25	$-5\cdot\mathfrak{z}_4$	—	3,73	c_6	—	12,46
7	$-7\cdot(5+6)$	—	8,97			.			.
8			.	$-8\cdot(5+6)$	—	7,26			.

Sämtliche Werthe von *a* und *b* sind nach (22*) und (23*) durch 1000 dividirt angesetzt.

3. Bildung der Faktoren

p.	$\frac{a}{p}$.		$\frac{b}{p}$.		$\frac{c}{p}$.		$\frac{aa}{p}$.		$\frac{ab}{p}$.	
1,29	+	4,66		.	—	5,35	+	28,01		.
0,88	+	7,31		.	+	7,39	+	47,00		.
1,18		.	+	4,07	+	7,81		.		.
1,15		.	+	5,83	—	4,66		.		.
1,76	—	1,85	—	3,01	+	4,53	+	6,01	+	9,80
1,29	—	4,07	—	2,89	—	9,66	+	21,37	+	15,18
1,49	—	6,02		.		.	+	54,00		.
1,85		.	—	3,92		.		.		.
	+	11,97	+	9,90	+	19,73	+	156,39	+	24,98
	—	11,94	—	9,82	—	19,67				

4. Auflösung der Endgleichungen.

$\mathfrak{a}_1$	+	156,4
$\mathfrak{b}_1$	+	25,0
$\mathfrak{c}_1$	+	51,3
$\mathfrak{f}_1$	+	0,970
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}$	−	0,160
$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}$	−	0,328

$-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}$	−	0,0062
$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}k_c$	+	0,0032
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}k_b$	+	0,0019
k_a	−	0,0011

$\mathfrak{b}_2$	+	113,8
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1$	−	4,0
$\mathfrak{B}_2$	+	109,8

$\mathfrak{c}_2$	+	18,3
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1$	−	8,2
$\mathfrak{C}_2$	+	10,1
$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}$	−	0,0918

$\mathfrak{f}_2$	+	1,574
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	−	0,155
$\mathfrak{F}_2$	+	1,419
$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$	−	0,0129
$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}k_c$	+	0,0009
k_b	−	0,0120

$\mathfrak{c}_3$	+	338,4
$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1$	−	16,8
$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{C}_2$	−	0,9
$\mathfrak{C}_3$	+	320,7

$\mathfrak{f}_3$	+	3,558
$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	−	0,318
$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	−	0,130
$\mathfrak{F}_3$	+	3.110
$k_c = -\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}$	−	0,00969

Probe.

$-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	−	0,006 01	$\mathfrak{f}_1 k_a$	−	0,001 07
$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	−	0,018 32	$\mathfrak{f}_2 k_b$	−	0,018 84
$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	−	0,030 14	$\mathfrak{f}_3 k_c$	−	0,034 50
	−	0,054 47		−	0,054 41

6. Verbesserungen und wahrscheinlichste Werthe der Koordinaten.

+1(1)	+ 3,65
−2(2)	+ 9,04
$+\mathfrak{z}_2((5)+(6))$	+11,71
	+24,40
$(\mathfrak{x}_2)$	+ 0,182
$\mathfrak{x}_2$	42,022
x_2	42,204
$V - x_2$	14,670

−1(1)	−3,65
+2(2)	−9,04
$+\mathfrak{x}_2((5)+(6))$	+5,33
	−7,36
$(\mathfrak{z}_2)$	− 0,055
$\mathfrak{z}_2$	92,158
z_2	92,103
$x_2 + z_2$	134,307
$= x_3$	

−3(3)	+10,55
+4(4)	− 2,17
$+\mathfrak{z}_4((5)+(6))$	+ 8,32
	+16,70
$(\mathfrak{x}_4)$	+ 0,125
$\mathfrak{x}_4$	68,640
x_4	68,765
$x_5 = V$	56,874
$x_4 - V$	11,891

+3(3)	−10,55
−4(4)	+ 2,17
$+\mathfrak{x}_4((5)+(6))$	+ 8,71
	+ 0,33
$(\mathfrak{z}_4)$	+ 0,002
$\mathfrak{z}_4$	65,540
z_4	65,542
$x_4 + z_4$	134,307
$= x_3$	

$\frac{1}{\mathfrak{x}_2}$	1,85
$\frac{2}{\mathfrak{z}_2}$	1,23
$+\frac{1}{\mathfrak{x}_2}(1)$	+ 0,087
$+\frac{2}{\mathfrak{z}_2}(2)$	− 0,098
−((5)+(6))	− 0,127
	− 0,138
$(\mathfrak{y}_2)$	− 0,061
$\mathfrak{y}_2$	65,391
y_2	65,330

$\frac{3}{\mathfrak{z}_4}$	1,29
$\frac{4}{\mathfrak{x}_4}$	1,27
$+\frac{3}{\mathfrak{z}_4}(3)$	− 0,161
$+\frac{4}{\mathfrak{x}_4}(4)$	− 0,032
−((5)+(6))	− 0,127
	− 0,320
$(\mathfrak{y}_4)$	− 0,202
$\mathfrak{y}_4$	53,130
y_4	52,928

7. Probe.

y_2^2	42 68,01
x_2^2	17 81,18
z_2^2	84 82,96
$(V - x_2)^2$	2 15,21

I²	60 49,19
II²	127 50,97
VII²	44 83,22
I	77,777
II	112,922
VII	66,957

y_4^2	28 01,37
z_4^2	42 95,75
x_4^2	47 28,62
$(x_4 - V)^2$	1 41,39

III²	70 97,12
IV²	75 29,99
VIII²	29 42,76
III	84,244
IV	86,776
VIII	54,247

$\log y_4$	1.72 868
$+ \operatorname{cpl} \log y_2$	8.18 489
$+ \log (V - x_2)$	1.16 643
$= \log (x_4 - V)$	1.07 500
$(x_4 - V)$	11,885

der Endgleichungen.

$\frac{ac}{p}$.	$\frac{bb}{p}$.	$\frac{bc}{p}$.	$\frac{cc}{p}$.
− 32,15	.	.	+ 36,92
+ 47,52	.	.	+ 48,04
.	+ 19,54	+ 37,53	+ 72,01
.	+ 39,12	− 31,25	+ 24,98
− 14,74	+ 15,95	− 23,99	+ 36,10
+ 50,71	+ 10,78	+ 36,01	+ 120,36
.	.	.	.
.	+ 28,46	.	.
+ 98,23	+ 113,85	+ 73,54	+ 338,41
− 46,89		− 55,24	
+ 51,34		+ 18,30	

5. Verbesserungen (n) und wahrscheinlichste Werthe N der Streckenlängen.

$\frac{a}{p}k_a$ +	$\frac{b}{p}k_b$ +	$\frac{c}{p}k_c$ =	(n).	N = n + (n).	(n)(n).	p(n)(n).
− 0,005	.	+ 0,052	+ 0,047	77,777	0,0022	0,0028
− 0,008	.	− 0,072	− 0,080	112,920	0,0064	0,0056
.	− 0,049	− 0,076	− 0,125	84,245	0,0156	0,0184
.	− 0,070	+ 0,045	− 0,025	86,775	0,0006	0,0007
+ 0,002	+ 0,036	− 0,044	− 0,006	56,874	0,0000	0,0000
+ 0,004	+ 0,035	+ 0,094	+ 0,133	77,433	0,0177	0,0228
+ 0,007	.	.	+ 0,007	66,957	0,0000	0,0000
.	+ 0,047	.	+ 0,047	54,247	0,0022	0,0041
+ 0,013	+ 0,118	+ 0,191	+ 0,234	617,228		0,0544
− 0,013	− 0,119	− 0,192	− 0,236			
0,000	− 0,001	− 0,001	− 0,002			

$$(12^*)\qquad F_c(1,\,2,\,\dots 8) = \frac{\mathfrak{y}_4\,(5-\mathfrak{x}_2)}{\mathfrak{y}_2\,(\mathfrak{x}_4-5)}.$$

$$(21^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F_c}{\partial 1} = \dfrac{1}{5+6}\left(-\dfrac{\mathbf{1}}{5-\mathfrak{x}_2} - \dfrac{\mathfrak{z}_2}{\mathfrak{y}_2^2}\right), \\[2ex] \dfrac{\partial F_c}{\partial 2} = \dfrac{2}{5+6}\left(+\dfrac{\mathbf{1}}{5-\mathfrak{x}_2} - \dfrac{\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{y}_2^2}\right), \\[2ex] \dfrac{\partial F_c}{\partial 3} = \dfrac{3}{5+6}\left(+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathfrak{x}_4-5} + \dfrac{\mathfrak{x}_4}{\mathfrak{y}_4^2}\right), \\[2ex] \dfrac{\partial F_c}{\partial 4} = \dfrac{4}{5+6}\left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathfrak{x}_4-5} + \dfrac{\mathfrak{z}_4}{\mathfrak{y}_4^2}\right), \\[2ex] \dfrac{\partial F_c}{\partial 5} = \dfrac{\mathbf{1}}{5+6}\left(-\mathfrak{x}_2\left(-\dfrac{\mathbf{1}}{5-\mathfrak{x}_2} - \dfrac{\mathfrak{z}_2}{\mathfrak{y}_2^2}\right) - \mathfrak{x}_4\left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathfrak{x}_4-5} + \dfrac{\mathfrak{z}_4}{\mathfrak{y}_4^2}\right)\right), \\[2ex] \dfrac{\partial F_c}{\partial 6} = \dfrac{\mathbf{1}}{5+6}\left(-\mathfrak{z}_2\left(+\dfrac{\mathbf{1}}{5-\mathfrak{x}_2} - \dfrac{\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{y}_2^2}\right) - \mathfrak{z}_4\left(+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathfrak{x}_4-5} + \dfrac{\mathfrak{x}_4}{\mathfrak{y}_4^2}\right)\right). \end{cases}$$

Zur Vereinfachung der Rechnungen und zur Erlangung ungefähr gleich grofser Zahlenwerthe für die Faktoren in allen umgeformten Bedingungsgleichungen multipliziren wir die Differenzialquotienten (19*) und (20*), sowie die Widersprüche f_a und f_b mit $\frac{5+6}{\mathbf{2000}}$ und die Differenzialquotienten (21*), sowie den Widerspruch f_c mit $5+6$. Danach erhalten wir mit Einführung einiger Zwischenbezeichnungen die folgenden einfachen Ausdrücke für die Faktoren der umgeformten Bedingungsgleichungen:

$$(22^*)\qquad \begin{cases} a_1 = +\,\mathbf{0{,}001}\cdot 1\cdot 6, \\ a_2 = +\,\mathbf{0{,}001}\cdot 2\cdot 5, \\ a_5 = -\,\mathbf{0{,}001}\cdot 6\cdot \mathfrak{x}_2, \\ a_6 = -\,\mathbf{0{,}001}\cdot 5\cdot \mathfrak{z}_2, \\ a_7 = -\,\mathbf{0{,}001}\cdot 7\cdot (5+6), \end{cases} \qquad (23^*)\qquad \begin{cases} b_3 = +\,\mathbf{0{,}001}\cdot 3\cdot 5, \\ b_4 = +\,\mathbf{0{,}001}\cdot 4\cdot 6, \\ b_5 = -\,\mathbf{0{,}001}\cdot 6\cdot \mathfrak{x}_4, \\ b_6 = -\,\mathbf{0{,}001}\cdot 5\cdot \mathfrak{z}_4, \\ b_8 = -\,\mathbf{0{,}001}\cdot 8\cdot (5+6), \end{cases}$$

$$(24^*)\qquad \begin{cases} \gamma_1 = -\dfrac{\mathbf{1}}{5-\mathfrak{x}_2} - \dfrac{\mathfrak{z}_2}{\mathfrak{y}_2^2}, \\[2ex] \gamma_2 = +\dfrac{\mathbf{1}}{5-\mathfrak{x}_2} - \dfrac{\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{y}_2^2}, \\[2ex] \gamma_3 = +\dfrac{\mathbf{1}}{\mathfrak{x}_4-5} + \dfrac{\mathfrak{x}_4}{\mathfrak{y}_4^2}, \\[2ex] \gamma_4 = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathfrak{x}_4-5} + \dfrac{\mathfrak{z}_4}{\mathfrak{y}_4^2}, \end{cases} \qquad (25^*)\qquad \begin{cases} c_1 = +\,1\cdot\gamma_1, \\ c_2 = +\,2\cdot\gamma_2, \\ c_3 = +\,3\cdot\gamma_3, \\ c_4 = +\,4\cdot\gamma_4, \\ c_5 = -\,\mathfrak{x}_2\gamma_1 - \mathfrak{x}_4\gamma_4, \\ c_6 = -\,\mathfrak{z}_2\gamma_2 - \mathfrak{z}_4\gamma_3. \end{cases}$$

7. Hiernach sind die umgeformten Bedingungsgleichungen:

$$(26^*)\qquad \begin{cases} a_1(1) + a_2(2) + a_5(5) + a_6(6) + a_7(7) = \dfrac{5+6}{\mathbf{2000}} f_a, \\[2ex] b_3(3) + b_4(4) + b_5(5) + b_6(6) + b_8(8) = \dfrac{5+6}{\mathbf{2000}} f_b, \\[1ex] c_1(1) + c_2(2) + c_3(3) + c_4(4) + c_5(5) + c_6(6) = (5+6) f_c, \end{cases}$$

und die Korrelatengleichungen:

$$(27^*)\qquad \begin{cases} (1) = \dfrac{a_1}{p_1}k_a + \dfrac{c_1}{p_1}k_c, \\[2ex] (2) = \dfrac{a_2}{p_2}k_a + \dfrac{c_2}{p_2}k_c, \\[2ex] (3) = \dfrac{b_3}{p_3}k_b + \dfrac{c_3}{p_3}k_c, \\[2ex] (4) = \dfrac{b_4}{p_4}k_b + \dfrac{c_4}{p_4}k_c, \end{cases} \qquad \begin{aligned} (5) &= \dfrac{a_5}{p_5}k_a + \dfrac{b_5}{p_5}k_b + \dfrac{c_5}{p_5}k_c, \\[2ex] (6) &= \dfrac{a_6}{p_6}k_a + \dfrac{b_6}{p_6}k_b + \dfrac{c_6}{p_6}k_c, \\[2ex] (7) &= \dfrac{a_7}{p_7}k_a, \\[2ex] (8) &= \dfrac{b_8}{p_8}k_b. \end{aligned}$$

Setzen wir dann noch:

$$(28^*)\quad \begin{cases} \mathfrak{f}_1 = -\frac{5+6}{2000} f_a = +\frac{5+6}{2000} \Sigma_a, \\ \mathfrak{f}_2 = -\frac{5+6}{2000} f_b = +\frac{5+6}{2000} \Sigma_b, \\ \mathfrak{f}_3 = +(5+6) f_c = +(5+6)(\Sigma_c - 1), \end{cases}$$

so ergeben sich folgende Endgleichungen:

$$(29^*)\quad \begin{cases} \left[\frac{aa}{p}\right] k_a + \left[\frac{ab}{p}\right] k_b + \left[\frac{ac}{p}\right] k_c + \mathfrak{f}_1 = 0, \\ \left[\frac{ab}{p}\right] k_a + \left[\frac{bb}{p}\right] k_b + \left[\frac{bc}{p}\right] k_c + \mathfrak{f}_2 = 0, \\ \left[\frac{ac}{p}\right] k_a + \left[\frac{bc}{p}\right] k_b + \left[\frac{cc}{p}\right] k_c + \mathfrak{f}_3 = 0. \end{cases}$$

Die Verbesserungen $(\mathfrak{x})$, $(\mathfrak{y})$, $(\mathfrak{z})$ ergeben sich aus den Differenzialquotienten (15*) bis (18*) und den Verbesserungen (1), (2), ...(8) nach:

$$(30^*)\quad \begin{cases} (\mathfrak{x}_2) = \frac{1}{5+6}\left(+1(1) - 2(2) + \mathfrak{z}_2((5)+(6))\right), \\ (\mathfrak{z}_2) = \frac{1}{5+6}\left(-1(1) + 2(2) + \mathfrak{x}_2((5)+(6))\right), \\ (\mathfrak{x}_4) = \frac{1}{5+6}\left(-3(3) + 4(4) + \mathfrak{z}_4((5)+(6))\right), \\ (\mathfrak{z}_4) = \frac{1}{5+6}\left(+3(3) - 4(4) + \mathfrak{x}_4((5)+(6))\right), \\ (\mathfrak{y}_2) = \frac{\mathfrak{x}_2\mathfrak{z}_2}{\mathfrak{y}_2(5+6)}\left(+\frac{1}{\mathfrak{x}_2}(1) + \frac{2}{\mathfrak{z}_2}(2) - ((5)+(6))\right), \\ (\mathfrak{y}_4) = \frac{\mathfrak{x}_4\mathfrak{z}_4}{\mathfrak{y}_4(5+6)}\left(+\frac{3}{\mathfrak{z}_4}(3) + \frac{4}{\mathfrak{x}_4}(4) - ((5)+(6))\right). \end{cases}$$

8. Nach den vorentwickelten Formeln ist die Rechnung auf Seite 264 und 265 durchgeführt.

VI. Abschnitt.

Bedingte vermittelnde Beobachtungen.

§ 59. Aufstellung der allgemeinen Formeln.

1. Wenn n Beobachtungsergebnisse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots. \lambda_n$ zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe $x, y, z, \ldots.$ von q Gröfsen vorliegen und diese wahrscheinlichsten Werthe x, y, z zugleich r Bedingungen erfüllen sollen, so können zuerst nach dem im IV. Abschnitte dargestellten Verfahren für die Zusätze $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}, \ldots.$ zu den Näherungswerthen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots.$ der zu bestimmenden Gröfsen die folgenden n umgeformten Fehlergleichungen nach den Formeln (**116**) und (**117**) aufgestellt werden:

$$(\mathbf{186})\quad \begin{cases} v_1 = a_1\, d\mathfrak{x} + b_1\, d\mathfrak{y} + c_1\, d\mathfrak{z} + \cdots + f_1, \\ v_2 = a_2\, d\mathfrak{x} + b_2\, d\mathfrak{y} + c_2\, d\mathfrak{z} + \cdots + f_2, \\ v_3 = a_3\, d\mathfrak{x} + b_3\, d\mathfrak{y} + c_3\, d\mathfrak{z} + \cdots + f_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v_n = a_n\, d\mathfrak{x} + b_n\, d\mathfrak{y} + c_n\, d\mathfrak{z} + \cdots + f_n. \end{cases}$$

Ferner können nach dem im V. Abschnitte dargestellten Verfahren, indem in die Bedingungsgleichungen (**150**) die wahrscheinlichsten Werthe $x, y, z, \ldots$ und in die Gleichungen (**151**) die Näherungswerthe $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$ eingeführt werden, die folgenden r umgeformten Bedingungsgleichungen nach Formel (**155**) aufgestellt werden:

$$(\mathbf{187}) \quad \begin{cases} A_1\, d\mathfrak{x} + A_2\, d\mathfrak{y} + A_3\, d\mathfrak{z} + \cdots - f_A = 0, \\ B_1\, d\mathfrak{x} + B_2\, d\mathfrak{y} + B_3\, d\mathfrak{z} + \cdots - f_B = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Nach den in den §§ 22 und 43 gegebenen Erläuterungen mufs dann die Anzahl n der vorliegenden Beobachtungsergebnisse gröfser sein als die Anzahl q der zu bestimmenden Gröfsen, und diese Anzahl q mufs gröfser sein, als die Anzahl r der zu erfüllenden Bedingungen; es mufs also $n > q > r$ sein.

2. Nach unsern allgemeinen Grundsätzen (§ 13) müssen wir nun die wahrscheinlichsten Werthe $x, y, z, \ldots$, oder die Zusätze $d\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{z}, \ldots$ zu den Näherungswerthen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$ der zu bestimmenden Gröfsen derart bestimmen, dafs die Quadratsumme der auf die Gewichtseinheit reduzirten wahrscheinlichsten Werthe der Beobachtungsfehler

$$(1^*) \quad [pvv] = p_1 v_1 v_1 + p_2 v_2 v_2 + p_3 v_3 v_3 + \cdots p_n v_n v_n$$

ein Minimum wird und dafs zugleich die Bedingungsgleichungen erfüllt werden.

Dies erreichen wir in folgender Weise:

Wir setzen in (1*) für $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$ die Ausdrücke nach den Formeln (**186**) und addiren dazu die mit $-2k_A, -2k_B, \ldots$ multiplizirten Bedingungsgleichungen (**187**), deren Summe gleich Null ist, womit wir erhalten:

$$\begin{aligned}(2^*) \quad [pvv] = [paa]\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{x} &+ 2[pab]\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} + 2[pac]\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{z} + \cdots 2[paf]\, d\mathfrak{x} \\ &+ [pbb]\, d\mathfrak{y}\, d\mathfrak{y} + 2[pbc]\, d\mathfrak{y}\, d\mathfrak{z} + \cdots 2[pbf]\, d\mathfrak{y} \\ &+ [pcc]\, d\mathfrak{z}\, d\mathfrak{z} + \cdots 2[pcf]\, d\mathfrak{z} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &+ [pff] \\ - 2A_1 k_A d\mathfrak{x} &- 2A_2 k_A d\mathfrak{y} - 2A_3 k_A d\mathfrak{z} - \cdots + 2k_A f_A \\ - 2B_1 k_B d\mathfrak{x} &- 2B_2 k_B d\mathfrak{y} - 2B_3 k_B d\mathfrak{z} - \cdots + 2k_B f_B \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Dann differenziren wir $[pvv]$ nach $d\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{z}, \ldots$, setzen die Differenzialquotienten gleich Null, dividiren durch 2 und fügen die mit -1 multiplizirten Bedingungsgleichungen (**187**) hinzu, womit wir erhalten:

$$(\mathbf{188a}) \quad \begin{cases} [paa]\, d\mathfrak{x} + [pab]\, d\mathfrak{y} + [pac]\, d\mathfrak{z} + \cdots - A_1 k_A - B_1 k_B - \cdots + [paf] = 0, \\ [pab]\, d\mathfrak{x} + [pbb]\, d\mathfrak{y} + [pbc]\, d\mathfrak{z} + \cdots - A_2 k_A - B_2 k_B - \cdots + [pbf] = 0, \\ [pac]\, d\mathfrak{x} + [pbc]\, d\mathfrak{y} + [pcc]\, d\mathfrak{z} + \cdots - A_3 k_A - B_3 k_B - \cdots + [pcf] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(\mathbf{188b}) \quad \begin{cases} -A_1\, d\mathfrak{x} - A_2\, d\mathfrak{y} - A_3\, d\mathfrak{z} - \cdots\cdots + f_A = 0, \\ -B_1\, d\mathfrak{x} - B_2\, d\mathfrak{y} - B_3\, d\mathfrak{z} - \cdots\cdots + f_B = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die Anzahl dieser Gleichungen (**188**a) und (**188**b), die wir wiederum als Endgleichungen bezeichnen, ist gleich der Anzahl der zu bestimmenden Gröfsen $d\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{z}, \ldots$ und der Korrelaten $k_A, k_B, \ldots$, so dafs wir die Zahlenwerthe dieser sämtlichen Gröfsen durch Auflösung der Endgleichungen nach dem im § 27 behandelten Verfahren erhalten können. Diese Zahlenwerthe sind dann auch die, wofür $[pvv]$ ein Minimum wird und die zugleich die Bedingungsgleichungen erfüllen.

Die wahrscheinlichsten Werthe $x, y, z, \ldots$ der zu bestimmenden Gröfsen ergeben sich dann aus den Näherungswerthen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$ und den Aenderungen $d\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{z}, \ldots$ nach:

$$(189) \qquad \begin{cases} x = \mathfrak{x} + d\mathfrak{x}, \\ y = \mathfrak{y} + d\mathfrak{y}, \\ z = \mathfrak{z} + d\mathfrak{z}, \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

3. Für die Quadratsumme $[pvv]$ kann ein einfacher Ausdruck gewonnen werden: Schreiben wir die Gleichung (2*) wie folgt:

$$\begin{aligned}
[pvv] = & [paa]d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{x} + [pab]d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} + [pac]d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{z} + \cdots \\
& + [pab]d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{x} + [pbb]d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{y} + [pbc]d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{z} + \cdots \\
& + [pac]d\mathfrak{z}\,d\mathfrak{x} + [pbc]d\mathfrak{z}\,d\mathfrak{y} + [pcc]d\mathfrak{z}\,d\mathfrak{z} + \cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& - A_1 k_A\, d\mathfrak{x} - A_2 k_A\, d\mathfrak{y} - A_3 k_A\, d\mathfrak{z} - \cdots \\
& - B_1 k_B\, d\mathfrak{x} - B_2 k_B\, d\mathfrak{y} - B_3 k_B\, d\mathfrak{z} - \cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + [paf]\, d\mathfrak{x} + [pbf]\, d\mathfrak{y} + [pcf]\, d\mathfrak{z} + \cdots \\
& - A_1 d\mathfrak{x}\; k_A - B_1 d\mathfrak{x}\; k_B - \cdots \\
& - A_2 d\mathfrak{y}\; k_A - B_2 d\mathfrak{y}\; k_B - \cdots \\
& - A_3 d\mathfrak{z}\; k_A - B_3 d\mathfrak{z}\; k_B - \cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + f_A\; k_A + f_B\; k_B + \cdots \\
& + [paf]\, d\mathfrak{x} + [pbf]\, d\mathfrak{y} + [pcf]\, d\mathfrak{z} + \cdots + [pff] \\
& + k_A\; f_A + k_B\; f_B + \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

und vergleichen die untereinanderstehenden Summanden mit (188a) und (188b), so folgt, dafs ist:

$$(190) \quad \begin{aligned} [pvv] = & [pff] + [paf]d\mathfrak{x} + [pbf]d\mathfrak{y} + [pcf]d\mathfrak{z} + \cdots \\ & + k_A f_A + k_B f_B + \cdots \end{aligned}$$

4. Die Anzahl der überschüssigen Bestimmungen ist gleich der Anzahl $n + r$ der vorliegenden Bestimmungen weniger der Anzahl q der zu bestimmenden Gröfsen, so dafs sich der mittlere Fehler $\mathfrak{m}$ der Gewichtseinheit ergiebt nach:

$$(191) \qquad \mathfrak{m} = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n - q + r}}.$$

§ 60. Getrennte Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der zu bestimmenden Gröfsen nach dem Verfahren für vermittelnde Beobachtungen und der diesen Werthen noch beizufügenden Verbesserungen nach dem Verfahren für bedingte Beobachtungen.

1. In den Fällen, wo das Verfahren für bedingte vermittelnde Beobachtungen Anwendung findet, ist es in der Regel zweckmäfsig, in der Weise vorzugehen, dafs zuerst, ohne Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen, nach dem im IV. Abschnitte dargelegten Verfahren für vermittelnde Beobachtungen diejenigen Zusätze $d\mathfrak{x}_0$, $d\mathfrak{y}_0$, $d\mathfrak{z}_0, \ldots$ zu den Näherungswerthen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$ der zu bestimmenden Gröfsen ermittelt werden, wofür die Quadratsumme $[pv_0v_0]$ der bei diesem Verfahren übrigbleibenden, auf die Gewichtseinheit reduzirten Fehler zu einem Minimum wird, und dafs danach diejenigen Zusätze (1), (2), (3), ... ermittelt werden, die weiter erforderlich sind, damit die wahrscheinlichsten Werthe der zu bestimmenden Gröfsen auch den Bedingungsgleichungen genügen und wofür zu-

gleich die Quadratsumme $[pvv]$ der aus der Gesamtausgleichung folgenden wahrscheinlichsten Werthe der auf die Gewichtseinheit reduzirten Beobachtungsfehler ein Minimum wird. Dann erhalten wir die Aenderungen $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... nach:

$$(192)\qquad \begin{cases} d\mathfrak{x} = d\mathfrak{x}_0 + (1), \\ d\mathfrak{y} = d\mathfrak{y}_0 + (2), \\ d\mathfrak{z} = d\mathfrak{z}_0 + (3), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

2. Bei diesem Verfahren ergeben sich die umgeformten Fehlergleichungen:

$$(193)\qquad \begin{cases} v_{01} = a_1\, d\mathfrak{x}_0 + b_1\, d\mathfrak{y}_0 + c_1\, d\mathfrak{z}_0 + \cdots f_1, \\ v_{02} = a_2\, d\mathfrak{x}_0 + b_2\, d\mathfrak{y}_0 + c_2\, d\mathfrak{z}_0 + \cdots f_2, \\ v_{03} = a_3\, d\mathfrak{x}_0 + b_3\, d\mathfrak{y}_0 + c_3\, d\mathfrak{z}_0 + \cdots f_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ v_{0n} = a_n\, d\mathfrak{x}_0 + b_n\, d\mathfrak{y}_0 + c_n\, d\mathfrak{z}_0 + \cdots f_n, \end{cases}$$

und die Endgleichungen für $d\mathfrak{x}_0$, $d\mathfrak{y}_0$, $d\mathfrak{z}_0$, ...:

$$(194)\qquad \begin{cases} [paa]\, d\mathfrak{x}_0 + [pab]\, d\mathfrak{y}_0 + [pac]\, d\mathfrak{z}_0 + \cdots [paf] = 0, \\ [pab]\, d\mathfrak{x}_0 + [pbb]\, d\mathfrak{y}_0 + [pbc]\, d\mathfrak{z}_0 + \cdots [pbf] = 0, \\ [pac]\, d\mathfrak{x}_0 + [pbc]\, d\mathfrak{y}_0 + [pcc]\, d\mathfrak{z}_0 + \cdots [pcf] = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

wonach wir

$$(195)\qquad \begin{cases} x_0 = \mathfrak{x} + d\mathfrak{x}_0, \\ y_0 = \mathfrak{y} + d\mathfrak{y}_0, \\ z_0 = \mathfrak{z} + d\mathfrak{z}_0, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

erhalten.

Bei Auflösung dieser Endgleichungen ergiebt sich nach den Formeln **(127)** und **(129)**:

$$(196)\qquad \begin{aligned} [p v_0 v_0] &= [pff] - \frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 - \frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 - \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3 - \cdots \\ &= [pff] + \mathfrak{f}_1\, d\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{f}_2\, d\mathfrak{y}_0 + \mathfrak{f}_3\, d\mathfrak{z}_0 + \cdots, \end{aligned}$$

und damit nach Formel **(125)** der lediglich aus dem Verfahren für vermittelnde Beobachtungen folgende mittlere Fehler $\mathfrak{m}_1$ der Gewichtseinheit nach:

$$(197)\qquad \mathfrak{m}_1 = \pm\sqrt{\frac{[p v_0 v_0]}{n-q}}.$$

3. Die Bedingungsgleichungen, woraus die umgeformten Bedingungsgleichungen **(187)** folgen, sind:

$$(198)\qquad \begin{cases} F_A(x, y, z, \ldots) = S_A, \\ F_B(x, y, z, \ldots) = S_B, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Nun benutzen wir bei Berechnung der Widersprüche nach den Formeln **(151)** und **(152)** nicht die Näherungswerthe $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ... der zu bestimmenden Gröfsen, sondern die bereits durch die Aenderungen $d\mathfrak{x}_0$, $d\mathfrak{y}_0$, $d\mathfrak{z}_0$, ... verbesserten Werthe $x_0 = \mathfrak{x} + d\mathfrak{x}_0$, $y_0 = \mathfrak{y} + d\mathfrak{y}_0$, $z_0 = \mathfrak{z} + d\mathfrak{z}_0$, ..., rechnen also nach den Formeln:

$$(199)\qquad \begin{cases} F_A(x_0, y_0, z_0, \ldots) = \Sigma_a, \\ F_B(x_0, y_0, z_0, \ldots) = \Sigma_b, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

$$(200)\qquad \begin{cases} f_a = S_A - \Sigma_a, \\ f_b = S_B - \Sigma_b, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Die wahrscheinlichsten Werthe $x, y, z, \ldots.$ der zu bestimmenden Gröfsen erhalten wir dann nach:

$$(202)\qquad \begin{cases} x = x_0 + (1), \\ y = y_0 + (2), \\ z = z_0 + (3), \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die sich nach den Formeln (**199**) und (**200**) ergebenden Widersprüche müssen allein durch die noch anzubringenden Verbesserungen (1), (2), (3), ... vernichtet werden und somit müssen, wenn wir für die Differenzialquotienten von $F_A(x_0, y_0, z_0, \ldots.)$, $F_B(x_0, y_0, z_0, \ldots.)$, ... nach $x_0, y_0, z_0, \ldots.$ die Bezeichnungen:

$$(201)\qquad \begin{cases} A_1 = \dfrac{\partial F_A}{\partial x_0}, & A_2 = \dfrac{\partial F_A}{\partial y_0}, & A_3 = \dfrac{\partial F_A}{\partial z_0}, & \ldots., \\ B_1 = \dfrac{\partial F_B}{\partial x_0}, & B_2 = \dfrac{\partial F_B}{\partial y_0}, & B_3 = \dfrac{\partial F_B}{\partial z_0}, & \ldots., \\ \ldots\ldots., & \ldots\ldots., & \ldots\ldots., & \ldots.. \end{cases}$$

nehmen, die umgeformten Bedingungsgleichungen sein:

$$(203)\qquad \begin{cases} A_1(1) + A_2(2) + A_3(3) + \cdots = f_a, \\ B_1(1) + B_2(2) + B_3(3) + \cdots = f_b, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

4. Setzen wir in die Endgleichungen (**188** a) für $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... nach den Formeln (**192**) die Ausdrücke $d\mathfrak{x}_0 + (1)$, $d\mathfrak{y}_0 + (2)$, $d\mathfrak{z}_0 + (3)$, ... und subtrahiren von den sich dadurch ergebenden Gleichungen die Gleichungen (**194**), so erhalten wir mit Hinzuziehung der Gleichungen (**203**) die folgenden Gleichungen zur Bestimmung der Verbesserungen (1), (2), (3), ...:

$$(1a^*)\qquad \begin{cases} [paa](1) + [pab](2) + [pac](3) + \cdots - A_1 k_A - B_1 k_B - \cdots = 0, \\ [pab](1) + [pbb](2) + [pbc](3) + \cdots - A_2 k_A - B_2 k_B - \cdots = 0, \\ [pac](1) + [pbc](2) + [pcc](3) + \cdots - A_3 k_A - B_3 k_B - \cdots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

$$(1b^*)\qquad \begin{cases} A_1(1) + A_2(2) + A_3(3) + \cdots\cdots\cdots = f_a, \\ B_1(1) + B_2(2) + B_3(3) + \cdots\cdots\cdots = f_b, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

5. Diese Gleichungen lösen wir auf wie folgt:

Wir drücken die Verbesserungen (1), (2), (3), ... durch die Korrelaten $k_A, k_B, \ldots.$ aus mittelst der Koeffizienten $Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, \ldots.$; $Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}, \ldots.$; $Q_{31}, Q_{32}, Q_{33}, \ldots.$; ...., und diese Koeffizienten setzen wir derart fest, dafs sie den folgenden Gleichungen genügen:

$$(204a)\qquad \begin{cases} [paa]Q_{11} + [pab]Q_{12} + [pac]Q_{13} + \cdots = 1, \\ [pab]Q_{11} + [pbb]Q_{12} + [pbc]Q_{13} + \cdots = 0, \\ [pac]Q_{11} + [pbc]Q_{12} + [pcc]Q_{13} + \cdots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{cases}$$

$$(204b)\qquad \begin{cases} [paa]Q_{21} + [pab]Q_{22} + [pac]Q_{23} + \cdots = 0, \\ [pab]Q_{21} + [pbb]Q_{22} + [pbc]Q_{23} + \cdots = 1, \\ [pac]Q_{21} + [pbc]Q_{22} + [pcc]Q_{23} + \cdots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{cases}$$

$$(204c)\qquad \begin{cases} [paa]Q_{31} + [pab]Q_{32} + [pac]Q_{33} + \cdots = 0, \\ [pab]Q_{31} + [pbb]Q_{32} + [pbc]Q_{33} + \cdots = 0, \\ [pac]Q_{31} + [pbc]Q_{32} + [pcc]Q_{33} + \cdots = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{cases}$$

u. s. w.

Nun multipliziren wir zuerst die Gleichungen (1a*) mit den Koeffizienten Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, ..., addiren danach alle Gleichungen und beachten die Gleichungen (**204** a), womit folgt:

$$\text{(2a*)}\qquad \begin{aligned}(1) = &+ A_1 Q_{11}\, k_A + B_1 Q_{11}\, k_B + \cdots\\ &+ A_2 Q_{12}\, k_A + B_2 Q_{12}\, k_B + \cdots\\ &+ A_3 Q_{13}\, k_A + B_3 Q_{13}\, k_B + \cdots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Sodann multipliziren wir die Gleichungen (1a*) mit den Koeffizienten Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}, ..., addiren danach alle Gleichungen und beachten die Gleichungen (**204** b), womit folgt:

$$\text{(2b*)}\qquad \begin{aligned}(2) = &+ A_1 Q_{21}\, k_A + B_1 Q_{21}\, k_B + \cdots\\ &+ A_2 Q_{22}\, k_A + B_2 Q_{22}\, k_B + \cdots\\ &+ A_3 Q_{23}\, k_A + B_3 Q_{23}\, k_B + \cdots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Ferner multipliziren wir die Gleichungen (1a*) mit den Koeffizienten Q_{31}, Q_{32}, Q_{33}, ..., addiren danach alle Gleichungen und beachten die Gleichungen (**204** c), womit folgt:

$$\text{(2c*)}\qquad \begin{aligned}(3) = &+ A_1 Q_{31}\, k_A + B_1 Q_{31}\, k_B + \cdots\\ &+ A_2 Q_{32}\, k_A + B_2 Q_{32}\, k_B + \cdots\\ &+ A_3 Q_{33}\, k_A + B_3 Q_{33}\, k_B + \cdots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

u. s. w.

Wird dann zur Vereinfachung der Ausdrücke für (1), (2), (3), ... noch gesetzt:

$$\text{(205a)}\qquad \begin{cases}(\mathfrak{A}_1) = + A_1 Q_{11} + A_2 Q_{12} + A_3 Q_{13} + \cdots,\\ (\mathfrak{A}_2) = + A_1 Q_{21} + A_2 Q_{22} + A_3 Q_{23} + \cdots,\\ (\mathfrak{A}_3) = + A_1 Q_{31} + A_2 Q_{32} + A_3 Q_{33} + \cdots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,\end{cases}$$

$$\text{(205b)}\qquad \begin{cases}(\mathfrak{B}_1) = + B_1 Q_{11} + B_2 Q_{12} + B_3 Q_{13} + \cdots,\\ (\mathfrak{B}_2) = + B_1 Q_{21} + B_2 Q_{22} + B_3 Q_{23} + \cdots,\\ (\mathfrak{B}_3) = + B_1 Q_{31} + B_2 Q_{32} + B_3 Q_{33} + \cdots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,\end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

so wird aus den Gleichungen (2a*), (2b*), (2c*), ...:

$$\text{(206)}\qquad \begin{cases}(1) = (\mathfrak{A}_1)\, k_A + (\mathfrak{B}_1)\, k_B + \cdots,\\ (2) = (\mathfrak{A}_2)\, k_A + (\mathfrak{B}_2)\, k_B + \cdots,\\ (3) = (\mathfrak{A}_3)\, k_A + (\mathfrak{B}_3)\, k_B + \cdots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

Diese Gleichungen haben die Form der Korrelatengleichungen (**156**) und wir bezeichnen sie auch als Korrelatengleichungen.

Eine zweite Form dieser Gleichung ergiebt sich durch Einführung der Hülfsgröfsen

$$\text{(207)}\qquad \begin{cases}[1] = + A_1 k_A + B_1 k_B + \cdots,\\ [2] = + A_2 k_A + B_2 k_B + \cdots,\\ [3] = + A_3 k_A + A_3 k_B + \cdots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,\end{cases}$$

wofür nach (1a*) auch gilt:

$$\text{(3*)}\qquad \begin{cases}[1] = [paa](1) + [pab](2) + [pac](3) + \cdots,\\ [2] = [pab](1) + [pbb](2) + [pbc](3) + \cdots,\\ [3] = [pac](1) + [pbc](2) + [pcc](3) + \cdots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

Mit diesen Hülfsgröfsen folgt für (1), (2), (3), ... aus (2a*), (2b*), (2c*), ...:

$$\textbf{(208)}\quad \begin{cases} (1) = [1]\,Q_{11} + [2]\,Q_{12} + [3]\,Q_{13} + \cdots, \\ (2) = [1]\,Q_{21} + [2]\,Q_{22} + [3]\,Q_{23} + \cdots, \\ (3) = [1]\,Q_{31} + [2]\,Q_{32} + [3]\,Q_{33} + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

6. Durch Einsetzen der in den Korrelatengleichungen (**206**) für (1), (2), (3), ... erhaltenen Ausdrücke in die Bedingungsgleichungen (1b*) erhalten wir die reduzirten Endgleichungen:

$$\textbf{(209)}\quad \begin{cases} [A(\mathfrak{A})]\,k_A + [A(\mathfrak{B})]\,k_B + \cdots = f_a, \\ [B(\mathfrak{A})]\,k_A + [B(\mathfrak{B})]\,k_B + \cdots = f_b, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Wie nach den Gleichungen (**205**) ohne weiteres zu übersehen ist, ist:

$$[A(\mathfrak{B})] = [B(\mathfrak{A})], \ldots,$$
$$\cdots$$

Wird nun gesetzt:

$$\textbf{(210)}\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_1 = [A(\mathfrak{A})], & \mathfrak{b}_1 = [A(\mathfrak{B})] = [B(\mathfrak{A})], & \cdots, & \mathfrak{f}_1 = -f_a, \\ & \mathfrak{b}_2 = [B(\mathfrak{B})], & \cdots, & \mathfrak{f}_2 = -f_b, \\ & & \cdots\cdots & \cdots, \end{cases}$$

so gehen die Endgleichungen über in:

$$\textbf{(211)}\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_1 k_A + \mathfrak{b}_1 k_B + \cdots \mathfrak{f}_1 = 0, \\ \mathfrak{b}_1 k_A + \mathfrak{b}_2 k_B + \cdots \mathfrak{f}_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

welche Gleichungen, nach dem im § 27 dargelegten Verfahren aufgelöst, uns die Zahlenwerthe der Korrelaten k_A, k_B, ... und somit auch nach den Korrelatengleichungen (**206**) die Zahlenwerthe der gesuchten Verbesserungen (1), (2), (3), ... liefern, wobei sich die Probe ergiebt, dafs

$$\textbf{(212)}\quad \begin{aligned} [kf] &= -[k\mathfrak{f}] \\ &= \frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 + \frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 + \cdots \\ &= (1)[1] + (2)[2] + (3)[3] + \cdots \end{aligned}$$

sein mufs. Die Gleichheit der ersten beiden Summen folgt aus den Formeln (**127**) und (**129**), und dafs diesen Summen auch die letzte Summe gleich sein mufs, ergiebt sich aus der Uebereinstimmung der Ausdrücke, die sich nach den Formeln (2*) und (**207**) für $(1)[1] + (2)[2] + (3)[3] + \cdots$ und nach den Formeln (**205**) und (**209**) für $[kf]$ ergeben.

Aus $[kf]$ ergiebt sich, wie nach Formel (**164**) ein lediglich aus der Netzausgleichung folgender zweiter Werth $\mathfrak{m}_2$ des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit nach:

$$\textbf{(213)}\quad \mathfrak{m}_2 = \pm\sqrt{\frac{[kf]}{r}}.$$

7. Die Quadratsumme $[pvv]$ der auf die Gewichtseinheit reduzirten wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler ist nach Formel (**190**):

$$\begin{aligned} [pvv] = [pff] + [paf]\,d\mathfrak{x} + [pbf]\,d\mathfrak{y} + [pcf]\,d\mathfrak{z} + \cdots \\ + k_A f_A + k_B f_B + \cdots \end{aligned}$$

Nun ist nach den Bedingungsgleichungen (**187**):

$$f_A = A_1\,d\mathfrak{x} + A_2\,d\mathfrak{y} + A_3\,d\mathfrak{z} + \cdots,$$
$$f_B = B_1\,d\mathfrak{x} + B_2\,d\mathfrak{y} + B_3\,d\mathfrak{z} + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Wird dies in (**190**) eingesetzt, und werden zugleich für $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... nach (**192**) $d\mathfrak{x}_0 + (1)$, $d\mathfrak{y}_0 + (2)$, $d\mathfrak{z}_0 + (3)$, ... gesetzt, so wird:

$$\begin{aligned}[pvv] = [pff] &+ [paf]\,d\mathfrak{x}_0 + [pbf]\,d\mathfrak{y}_0 + [pcf]\,d\mathfrak{z}_0 + \cdots \\ &+ [paf](1) + [pbf](2) + [pcf](3) + \cdots \\ &+ A_1 k_A d\mathfrak{x}_0 + A_2 k_A d\mathfrak{y}_0 + A_3 k_A d\mathfrak{z}_0 + \cdots \\ &+ B_1 k_B d\mathfrak{x}_0 + B_2 k_B d\mathfrak{y}_0 + B_3 k_B d\mathfrak{z}_0 + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ A_1 k_A (1) + A_2 k_A (2) + A_3 k_A (3) + \cdots \\ &+ B_1 k_B (1) + B_2 k_B (2) + B_3 k_B (3) + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Werden hierin für $[paf]$, $[pbf]$, $[pcf]$, $\cdots$ auf der zweiten Zeile die sich aus den Endgleichungen (**194**) ergebenden Werthe und für $A_1(1) + A_2(2) + A_3(3) + \cdots$, $B_1(1) + B_2(2) + B_3(3) + \cdots$, $\cdots$ nach den Bedingungsgleichungen (**203**) die Widersprüche f_a, f_b, ... eingeführt, so wird:

$$\begin{aligned}[pvv] = [pff] &+ [paf]\,d\mathfrak{x}_0 + [pbf]\,d\mathfrak{y}_0 + [pcf]\,d\mathfrak{z}_0 + \cdots \\ &- [paa](1)\,d\mathfrak{x}_0 - [pab](1)\,d\mathfrak{y}_0 - [pac](1)\,d\mathfrak{z}_0 - \cdots \\ &- [pab](2)\,d\mathfrak{x}_0 - [pbb](2)\,d\mathfrak{y}_0 - [pbc](2)\,d\mathfrak{z}_0 - \cdots \\ &- [pac](3)\,d\mathfrak{x}_0 - [pbc](3)\,d\mathfrak{y}_0 - [pcc](3)\,d\mathfrak{z}_0 - \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ A_1 k_A d\mathfrak{x}_0 + A_2 k_A d\mathfrak{y}_0 + A_3 k_A d\mathfrak{z}_0 + \cdots \\ &+ B_1 k_B d\mathfrak{x}_0 + B_2 k_B d\mathfrak{y}_0 + B_3 k_B d\mathfrak{z}_0 + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ k_A f_a + k_B f_b + \cdots\end{aligned}$$

Durch Vergleichung der untereinanderstehenden Summanden mit den Gleichungen (1a*) folgt hieraus:

$$(4^*)\qquad \begin{aligned}[pvv] = [pff] &+ [paf]\,d\mathfrak{x}_0 + [pbf]\,d\mathfrak{y}_0 + [pcf]\,d\mathfrak{z}_0 + \cdots \\ &+ k_A f_a + k_B f_b + \cdots\end{aligned}$$

Der auf der ersten Zeile stehende Teil dieses Ausdrucks ist nach den Formeln (**127**) und (**129**) gleich der Quadratsumme $[pv_0v_0]$, die sich bei Auflösung der Endgleichungen (**194**) ergiebt, und der auf der zweiten Zeile stehende Teil $[kf]$ des Ausdrucks ist der durch die Netzausgleichung hinzukommende Beitrag zur Fehlerquadratsumme, so dafs also

$$(\mathbf{214})\qquad [pvv] = [pv_0v_0] + [kf]$$

ist, womit sich der mittlere Fehler $\mathfrak{m}$ der Gewichtseinheit aus der Gesamtausgleichung ergiebt nach:

$$(\mathbf{215})\qquad \mathfrak{m} = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-q+r}} = \pm\sqrt{\frac{[pv_0v_0] + [kf]}{n-q+r}}.$$

8. Ueberblicken wir das entwickelte Verfahren nochmals, so ergiebt sich der folgende Rechnungsgang:

a) Aus den vorliegenden Beobachtungsergebnissen werden ohne Rücksicht auf die zu erfüllenden Bedingungen nach dem im IV. Abschnitte dargelegten

Verfahren für vermittelnde Beobachtungen unter Berücksichtigung der Formeln (**192**) bis (**197**) die Zahlenwerthe von $d\mathfrak{x}_0$, $d\mathfrak{y}_0$, $d\mathfrak{z}_0$, ..., x_0, y_0, z_0, ..., $[pv_0v_0]$ und $\mathfrak{m}_1$ berechnet.

b) Hierbei werden die aus den Gleichungen (**204**) folgenden Zahlenwerthe der Koeffizienten Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, ...; Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}, ...; Q_{31}, Q_{32}, Q_{33}, ...; .... berechnet*), und falls die Hülfsgröfsen [1], [2], [3], ... benutzt werden sollen, die Gleichungen (**208**) mit den erhaltenen Zahlenwerthen angesetzt.

c) Dann werden die Bedingungsgleichungen nach dem im V. Abschnitte dargelegten Verfahren aufgestellt und umgeformt, wobei nach den Formeln (**198**) bis (**202**) die erhaltenen Zahlenwerthe von x_0, y_0, z_0, ... als Beobachtungsergebnisse eingeführt werden.

d) Hiernach werden die Koeffizienten $(\mathfrak{A}_1)$, $(\mathfrak{A}_2)$, $(\mathfrak{A}_3)$, ...; $(\mathfrak{B}_1)$, $(\mathfrak{B}_2)$, $(\mathfrak{B}_3)$, ...; .... nach den Formeln (**205**) gebildet und die Korrelatengleichungen (**206**) angesetzt, oder es werden die Gleichungen (**207**) für die Hülfsgröfsen [1], [2], [3], ... angesetzt und die Korrelatengleichungen (**206**) durch Substitution der für [1], [2], [3], ... erhaltenen Ausdrücke in die Gleichungen (**208**) gewonnen.

e) Mit den Zahlenwerthen der Differenzialquotienten A_1, A_2, A_3, ...; B_1, B_2, B_3, ...; .... und der Koeffizienten $(\mathfrak{A}_1)$, $(\mathfrak{A}_2)$, $(\mathfrak{A}_3)$, ...; $(\mathfrak{B}_1)$, $(\mathfrak{B}_2)$, $(\mathfrak{B}_3)$, ...; .... ergeben sich dann die Faktoren $[A(\mathfrak{A})]$, $[A(\mathfrak{B})] = [B(\mathfrak{A})]$, ...; $[B(\mathfrak{B})]$, ...; .... der Endgleichungen, die nach dem im § 27 dargelegten Verfahren aufgelöst, die Zahlenwerthe der Korrelaten k_A, k_B, ... liefern, womit nach den Formeln (**206**) die Verbesserungen (1), (2), (3), ... und nach den Formeln (**202**) die wahrscheinlichsten Werthe x, y, z, ... der zu bestimmenden Gröfsen erhalten werden.

Hierbei werden auch die Zahlenwerthe von $[kf]$ und $\mathfrak{m}_2$, sowie endlich von $[pvv] = [pv_0v_0] + [kf]$ und $\mathfrak{m}$ erhalten.

9. Das vorstehend behandelte Verfahren wird in der Regel bei der Ausgleichung von Hauptdreiecksnetzen angewandt. Aus den Ergebnissen der Stationsbeobachtungen werden nach dem Verfahren für vermittelnde Beobachtungen die wahrscheinlichsten Werthe x_0, y_0, z_0, ... der Richtungen abgeleitet, und diese werden dann in die Bedingungsgleichungen eingeführt.

In den Publikationen der Preufsischen Landesaufnahme und im wesentlichen hiermit übereinstimmend in allen ähnlichen Publikationen werden im Anschlufs an die Ergebnisse der Stationsbeobachtungen die daraus folgenden Endgleichungen (**194**), die reduzirten Endgleichungen, die Näherungswerthe $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ... (Annahme)**), die denselben beizufügenden Aenderungen $d\mathfrak{x}_0$, $d\mathfrak{y}_0$, $d\mathfrak{z}_0$, ... $(A, B, C, ...)$, die Werthe $x_0 = \mathfrak{x} + d\mathfrak{x}_0$, $y_0 = \mathfrak{y} + d\mathfrak{y}_0$, $z_0 = \mathfrak{z} + d\mathfrak{z}_0$, ... (Nach Anbringung der Reduktionen auf das Centrum der Stationen: Ergebnis mit Einschlufs sämtlicher Reduktionen), die Gleichungen (**208**), $[pv_0v_0]$ $((VV))$ und $n - q$ (Divisor) alles in Zahlenwerthen mitgeteilt. Hiernach folgen die Bedingungsgleichungen (**198**) und die umgeformten Bedingungsgleichungen (**203**), letztere mit den Zahlenwerthen der Faktoren und der Widersprüche, sodann die Gleichungen (**207**) (Ausdrücke der Gröfsen [1], [2], [3], ... durch die Faktoren oder

*) Wie dies zweckmäfsig geschehen kann, ist im folgenden § 62 dargelegt.
**) Das in Klammern beigefügte sind die von den unsrigen abweichenden Bezeichnungen der Landesaufnahme.

Korrelate I, II, III, ...), die Korrelatengleichungen (**206**) (Darstellung der Verbesserungen (1), (2), (3), ... durch die Faktoren oder Korrelate I, II, III, ...), die Endgleichungen (**209**), die bei Auflösung der letztern sich ergebenden reduzirten Endgleichungen, die Korrelaten k_A, k_B, k_C, ... (Faktoren oder Korrelate I, II, III, ...), $[kf]$ ((𝔅𝔅)), die Verbesserungen (1), (2), (3), ..., $[pvv] = [[pv_0v_0]] + [kf]$ (Summe der mit den Gewichten multiplizirten Fehlerquadrate), $[n-q]+r$ (Beitrag zum Divisor), $m^2 = \frac{[pvv]}{[n-q]+r}$ $(\varepsilon\varepsilon)$, m (ε).

§ 61. Anwendung des Verfahrens auf die Berechnung von Dreiecksnetzen.

1. Um ein einfaches, übersichtliches Beispiel für die Anwendung des entwickelten Verfahrens zu erhalten, nehmen wir aus den Hauptdreiecken der Landesaufnahme den in Figur 70 dargestellten Teil der Elbkette heraus und behandeln diesen Teil als selbstständiges Dreiecksnetz.

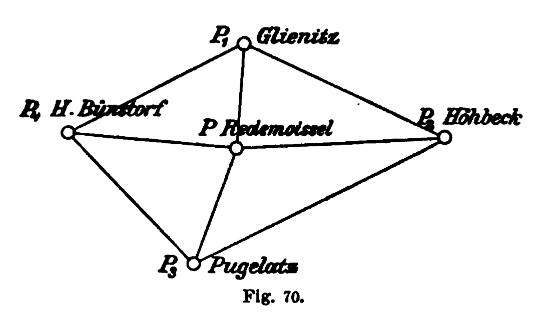


Fig. 70.

Für den Punkt P = Redemoissel haben wir bereits im § 32 aus den auf diesem Punkte beobachteten Winkeln die wahrscheinlichsten Werthe R_1, R_2, R_3, R_4 der Richtungen nach den Punkten P_1 = Glienitz, P_2 = Höhbeck, P_3 = Pugelatz, P_4 = Hohen-Bünstorf nach dem Verfahren für vermittelnde Beobachtungen abgeleitet. Bei den über dem Centrum des Punktes P ausgeführten Winkelbeobachtungen sind die Lichter von excentrisch stehenden Heliotropen eingestellt worden, so dafs die im § 32 erhaltenen wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen noch auf das Centrum der Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 zu reduziren sind wie folgt:

Zielpunkte.	Richtungen R.*)			Reduktion auf das Centrum.	Reduzirte Richtungen.		
	°	'	"	"	°	'	"
P_1	359	59	59,971	− 8,320**)	359	59	51,651
P_2	82	48	00,610	+ 0,755	82	48	01,365
P_3	195	42	46,079	+ 11,163	195	42	57,242
P_4	269	07	58,340	+ 7,262	269	08	05,602
			45,000	+ 10,860			55,860

*) Vergleiche § 32, Seite 132.

**) Nach: Die Königlich Preufsische Landes-Triangulation, Hauptdreiecke, Vierter Teil, zweite Abteilung, Seite 87.

Diese reduzirten Richtungen führen wir als die nach den Formeln (**192**) bis (**195**) erhaltenen Richtungen R_{01}, R_{02}, R_{03}, R_{04} in die weitern Rechnungen ein.

Ferner übernehmen wir aus der Veröffentlichung der Landes-Aufnahme noch:

$$[p v_0 v_0] = 76{,}10, \quad n - q = 33, \tag{196}$$

wonach ist:

$$\mathfrak{m}_1 = \pm \sqrt{\frac{[p v_0 v_0]}{n-q}} = \pm 1{,}52''.^{*)} \tag{197}$$

Die übrigen in die Rechnungen einzuführenden Richtungen u. s. w. sind:

Zielpunkte.	P_1: Glienitz. (S. 86.)**)				Zielpunkte.	P_3: Pugelatz. (S. 90.)			
P_2	R_{05}	0	00	00,000	P_4	R_{011}	296	17	57,200
P	R_{06}	68	22	57,457	P	R_{012}	0	00	00,000
P_4	R_{07}	125	12	31,950	P_2	R_{013}	42	29	18,595
	$[p v_0 v_0] = 15{,}22$, $n - q = 22$, $\mathfrak{m}_1 = 0{,}83''$.					$[p v_0 v_0] = 42{,}72$ $n - q = 22$, $\mathfrak{m}_1 = 1{,}98''$.			
	P_2: Höhbeck. (S. 92.)					P_4: H. Bünstorf. (S. 83.)			
P_3	R_{08}	190	37	08,596	P_1	R_{014}	55	06	49,095
P	R_{09}	215	12	55,478	P	R_{015}	87	25	30,469
P_1	R_{010}	244	01	50,220	P_3	R_{016}	130	18	20,303
	$[p v_0 v_0] = 29{,}48$, $n - q = 22$, $\mathfrak{m}_1 = 1{,}16''$.					$[p v_0 v_0] = 26{,}23$, $n - q = 22$, $\mathfrak{m}_1 = 1{,}09''$.			

2. Zur weitern Fortführung der Berechnung müssen wir nun die Bedingungsgleichungen (**198**) aufstellen. Die Gesamtanzahl r der zu erfüllenden Bedingungen ist in dem vorliegenden Dreiecksnetze, worin zur gegenseitigen Festlegung von $n_p = 5$ Punkten $n_r = 16$ Richtungen auf $n_{st} = 5$ Standpunkten bestimmt worden sind, nach Regel (**177**):

$$r = n_r - 2\,n_p - n_{st} + 4 = 16 - 2 \cdot 5 - 5 + 4 = 5.$$

Diese Bedingungen zerfallen in Bedingungen II. Klasse und Bedingungen III. Klasse und zwar, da hier $n_{st} = 5$ Standpunkte durch $n_l = 8$ Linien verbunden sind, an deren beiden Enden die Winkel bestimmt sind, nach Regel (**181**) in

$$r_{II} = n_l - n_{st} + 1 = 8 - 5 + 1 = 4$$

Bedingungen II. Klasse und, da hier ferner $n_p = 5$ Dreieckspunkte durch $n_s = 8$ Dreiecksseiten verbunden sind, nach Regel (**183**) in

---

*) Wir benutzen hier nicht die im § 32, Seite 133 erhaltenen Werthe $[p v_0 v_0] = p[vv] = 3{,}192$, $n - q = 3$, $\mathfrak{m}_1 = 1{,}03''$, sondern die einen besseren Anhalt für die Beurteilung der Messungsergebnisse gebenden, aus den Unterschieden zwischen den wahrscheinlichsten Werthen der Winkel und den einzelnen Satzmitteln abgeleiteten Werthe der Landes-Aufnahme.

**) Die beigesetzten Seitenzahlen weisen auf die Seiten des angeführten Bandes der Hauptdreiecke hin, wovon die Richtungen entnommen sind.

$$r_{III} = n_s - 2\,n_p + 3 = 8 - 2\cdot 5 + 3 = 1$$

Bedingung III. Klasse.

Nach Figur 71, worin die Nummern der Richtungen enthalten sind, ergeben sich die den 5 Bedingungen entsprechenden Bedingungsgleichungen (**198**) in einfachster Weise wie folgt:

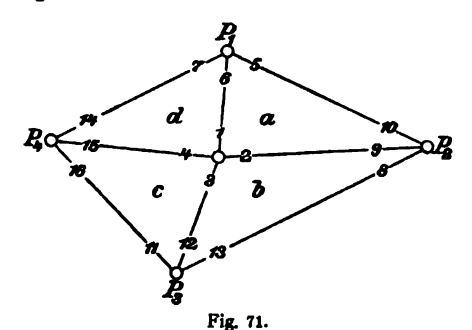


Fig. 71.

$$(198)\left\{\begin{array}{rl}\Delta a: & -R_9 + R_{10} - R_5 + R_6 - R_1 + R_2 = S_A = 180°\,00'\,01{,}669'',^{*)}\\ \Delta b: & -R_{12} + R_{13} - R_8 + R_9 - R_3 + R_2 = S_B = 180\;\;00\;\;01{,}841\;,\\ \Delta c: & -R_{15} + R_{16} - R_{11} + R_{12} - R_3 + R_4 = S_C = 180\;\;00\;\;01{,}556\;,\\ \Delta d: & -R_6 + R_7 - R_{14} + R_{15} - R_4 + R_1 = S_D = 180\;\;00\;\;01{,}365\;,\\ \text{C. S. } e: & -\log\sin(-R_9 + R_{10}) + \log\sin(-R_5 + R_6) - \log\sin(-R_{12} + R_{13})\\ & +\log\sin(-R_8 + R_9) - \log\sin(-R_{15} + R_{16}) + \log\sin(-R_{11} + R_{12})\\ & -\log\sin(-R_6 + R_7) + \log\sin(-R_{14} + R_{15}) = S_E = 0.\end{array}\right.$$

3. Werden in diese Gleichungen die Werthe R_{01}, R_{02}, R_{03}, ... der Richtungen eingeführt, die nach dem Verfahren für vermittelnde Beobachtungen aus den Beobachtungsergebnissen gewonnen sind, so ergiebt sich für die diesen Richtungswerthen entsprechenden Beträge Σ_a, Σ_b, Σ_c, ...:

$$(199)\left\{\begin{array}{l}-R_{09} + R_{010} - R_{05} + R_{06} - R_{01} + R_{02} = \Sigma_a,\\ -R_{012} + R_{013} - R_{08} + R_{09} - R_{02} + R_{03} = \Sigma_b,\\ -R_{015} + R_{016} - R_{011} + R_{012} - R_{03} + R_{04} = \Sigma_c,\\ -R_{06} + R_{07} - R_{014} + R_{015} - R_{04} + R_{01} = \Sigma_d,\\ -\log\sin(-R_{09} + R_{010}) + \log\sin(-R_{05} + R_{06}) - \log\sin(-R_{012} + R_{013})\\ +\log\sin(-R_{08} + R_{09}) - \log\sin(-R_{015} + R_{016}) + \log\sin(-R_{011} + R_{012})\\ -\log\sin(-R_{06} + R_{07}) + \log\sin(-R_{014} + R_{015}) = \Sigma_e,\end{array}\right.$$

wonach für die Abweichungen f_a, f_b, f_c, ... zwischen den Sollbeträgen S_A, S_B, S_C, ... und den Beträgen Σ_a, Σ_b, Σ_c, ... folgt:

$$(200)\left\{\begin{array}{l}f_a = S_A - \Sigma_a,\\ f_b = S_B - \Sigma_b,\\ f_c = S_C - \Sigma_c,\\ f_d = S_D - \Sigma_d,\\ f_e = S_E - \Sigma_e.\end{array}\right.$$

4. Differenziren wir die Gleichungen (**199**) nach R_{01}, R_{02}, R_{03}, ..., so erhalten wir folgende Differenzialquotienten:

*) Die Sollbeträge 180° + sphärischer Excefs sind entnommen von Seite 130 und 131 des angeführten Bandes der Hauptdreiecke.

$$
(201) \begin{cases}
A_1 = -1, \; A_2 = +1, \; A_5 = -1, \; A_6 = +1, \; A_9 = -1, \; A_{10} = +1, \\
B_2 = -1, \; B_3 = +1, \; B_8 = -1, \; B_9 = +1, \; B_{12} = -1, \; B_{13} = +1, \\
C_3 = -1, \; C_4 = +1, \; C_{11} = -1, \; C_{12} = +1, \; C_{15} = -1, \; C_{16} = +1, \\
D_1 = +1, \; D_4 = -1, \; D_6 = -1, \; D_7 = +1, \; D_{14} = -1, \; D_{15} = +1, \\
E_5 = -M \, cotg\,(-R_{05} + R_{06}), \\
E_6 = +M \, cotg\,(-R_{05} + R_{06}) + M \, cotg\,(-R_{06} + {}_{07}), \\
E_7 = -M \, cotg\,(-R_{06} + R_{07}), \quad E_8 = -M \, cotg\,(-R_{08} + R_{09}), \\
E_9 = +M \, cotg\,(-R_{08} + R_{09}) + M \, cotg\,(-R_{09} + R_{010}), \\
E_{10} = -M \, cotg\,(-R_{09} + R_{010}), \quad E_{11} = -M \, cotg\,(-R_{011} + R_{012}), \\
E_{12} = +M \, cotg\,(-R_{011} + R_{012}) + M \, cotg\,(-R_{013} + R_{013}), \\
E_{13} = -M \, cotg\,(-R_{012} + R_{013}), \quad E_{14} = -M \, cotg\,(-R_{014} + R_{015}), \\
E_{15} = +M \, cotg\,(-R_{014} + R_{015}) + M \, cotg\,(-R_{015} + R_{016}), \\
E_{16} = -M \, cotg\,(-R_{015} + R_{016}).
\end{cases}
$$

5. Aus den nach dem Verfahren für vermittelnde Beobachtungen erhaltenen Werthen R_{01}, R_{02}, R_{03}, ... R_{016} der Richtungen werden die wahrscheinlichsten Werthe R_1, R_2, R_3, ... R_{16} der Richtungen erhalten durch Beifügung der Verbesserungen (1), (2), (3), ... (16), so dafs wird:

$$
(202) \begin{cases}
R_1 = R_{01} + (1), \\
R_2 = R_{02} + (2), \\
R_3 = R_{03} + (3), \\
\dots\dots\dots\dots, \\
R_{16} = R_{016} + (16).
\end{cases}
$$

6. Behufs Bildung der umgeformten Bedingungsgleichungen (**203**) setzen wir hier zuerst die Zahlenwerthe an, die den Differenzialquotienten E_5, E_6, E_7, ... E_{16} entsprechend in die fünfte umgeformte Bedingungsgleichung einzuführen sind:*)

$$M \frac{1}{\varrho''} cotg\,(-R_{05} + R_{06}) = +0{,}083, \qquad M \frac{1}{\varrho''} cotg\,(-R_{011} + R_{012}) = +0{,}104,$$

$$M \frac{1}{\varrho''} cotg\,(-R_{06} + R_{07}) = +0{,}138, \qquad M \frac{1}{\varrho''} cotg\,(-R_{012} + R_{013}) = +0{,}230,$$

$$M \frac{1}{\varrho''} cotg\,(-R_{08} + R_{09}) = +0{,}460, \qquad M \frac{1}{\varrho''} cotg\,(-R_{014} + R_{015}) = +0{,}333,$$

$$M \frac{1}{\varrho''} cotg\,(-R_{09} + R_{010}) = +0{,}383, \qquad M \frac{1}{\varrho''} cotg\,(-R_{015} + R_{016}) = +0{,}227.$$

Die Zahlenwerthe sind mit 100 000 multiplizirt angesetzt, wonach wir den Widerspruch f_e in Einheiten der fünften Dezimalstelle der Logarithmen zu nehmen haben.

Mit diesen Zahlenwerthen und mit den unter Nr. 4 erhaltenen Zahlenwerthen der Differenzialquotienten A, B, C, D ergeben sich die folgenden umgeformten Fehlergleichungen:

$$
(203) \begin{cases}
-(1) + (2) - (5) + (6) - (9) + (10) = f_a, \\
-(2) + (3) - (8) + (9) - (12) + (13) = f_b, \\
-(3) + (4) - (11) + (12) - (15) + (16) = f_c, \\
+(1) - (4) - (6) + (7) - (14) + (15) = f_d, \\
-0{,}083\,(5) + 0{,}221\,(6) - 0{,}138\,(7) - 0{,}460\,(8) + 0{,}843\,(9) - 0{,}383\,(10) \\
-0{,}104\,(11) + 0{,}334\,(12) - 0{,}230\,(13) - 0{,}333\,(14) + 0{,}560\,(15) - 0{,}227\,(16) = f_e.
\end{cases}
$$

*) Vergleiche § 47, Seite 205.

7. Nach § 32, Nr. 9, Seite 131 sind die Endgleichungen (**194**), woraus sich die Aenderungen $d\mathfrak{r}_{01}$, $d\mathfrak{r}_{02}$, $d\mathfrak{r}_{03}$, $d\mathfrak{r}_{04}$ für die Näherungswerthe der Richtungen auf dem Punkte P ergeben,:

$$\begin{aligned}
([paa] = \nu p)\, d\mathfrak{r}_{01} + ([paf] = -p(s_1 - \sigma_1)) &= 0, \\
([pbb] = \nu p)\, d\mathfrak{r}_{02} + ([pbf] = -p(s_2 - \sigma_2)) &= 0, \\
([pcc] \;= \nu p)\, d\mathfrak{r}_{03} + ([pcf] = -p(s_3 - \sigma_3)) &= 0, \\
([pdd] = \nu p)\, d\mathfrak{r}_{04} + ([pdf] = -p(s_4 - \sigma_4)) &= 0.
\end{aligned}$$

Die Endgleichungen (**194**), woraus sich die Aenderungen $d\mathfrak{r}_{05}, d\mathfrak{r}_{06}, \ldots . d\mathfrak{r}_{016}$ für die Näherungswerthe der Richtungen auf den Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 ergeben, stehen mit diesen Endgleichungen in keiner Verbindung, so dafs wir zunächst zur Bestimmung der Koeffizienten Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, Q_{14}; Q_{22}, Q_{23}, Q_{24}; Q_{33}, Q_{34}; Q_{44} die folgenden Gleichungen (**204**) erhalten:

$$\begin{array}{l|l|l|l}
\nu p Q_{11} = 1, & \nu p Q_{21} = 0, & \nu p Q_{31} = 0, & \nu p Q_{41} = 0, \\
\nu p Q_{12} = 0, & \nu p Q_{22} = 1, & \nu p Q_{32} = 0, & \nu p Q_{42} = 0, \\
\nu p Q_{13} = 0, & \nu p Q_{23} = 0, & \nu p Q_{33} = 1, & \nu p Q_{43} = 0, \\
\nu p Q_{14} = 0, & \nu p Q_{24} = 0, & \nu p Q_{34} = 0, & \nu p Q_{44} = 1.
\end{array}$$

Hieraus folgt, dafs

$$Q_{11} = \frac{1}{\nu p}, \quad \Big| \quad Q_{22} = \frac{1}{\nu p}, \quad \Big| \quad Q_{33} = \frac{1}{\nu p}, \quad \Big| \quad Q_{44} = \frac{1}{\nu p}$$

ist, während alle übrigen Koeffizienten gleich Null sind. Hierin ist $\nu = 4$, $p = 6$, also $\frac{1}{\nu p} = \frac{1}{24} = 0{,}0417$.

Wenn wir nun annehmen, dafs auf den Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 die Winkel zur Bestimmung der je $\nu = 3$ Richtungen ebenso beobachtet seien, wie auf dem Punkte P und zur Erreichung des gleichen Gewichtes für alle Richtungen die Winkel so oft beobachtet seien, dafs $p = 8$ ist*), so erhalten wir weiter auch

$$Q_{55} = Q_{66} = Q_{77} = \cdots . Q_{1616} = \frac{1}{\nu p} = \frac{1}{24} = 0{,}0417$$

und für alle übrigen Koeffizienten Null.**)

8. Hiernach ergeben sich mit den unter Nr. 6 in den umgeformten Fehlergleichungen gegebenen Zahlenwerthen der Differenzialquotienten A, B, ... E die folgenden Koeffizienten $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$, ... $(\mathfrak{E})$:

(**205**)

$(\mathfrak{A}_1) = -0{,}0417,$	$(\mathfrak{B}_2) = -0{,}0417,$	$(\mathfrak{C}_3) = -0{,}0417,$	$(\mathfrak{D}_1) = +0{,}0417,$
$(\mathfrak{A}_2) = +0{,}0417,$	$(\mathfrak{B}_3) = +0{,}0417,$	$(\mathfrak{C}_4) = +0{,}0417,$	$(\mathfrak{D}_4) = -0{,}0417,$
$(\mathfrak{A}_5) = -0{,}0417,$	$(\mathfrak{B}_8) = -0{,}0417,$	$(\mathfrak{C}_{11}) = -0{,}0417,$	$(\mathfrak{D}_6) = -0{,}0417,$
$(\mathfrak{A}_6) = +0{,}0417,$	$(\mathfrak{B}_0) = +0{,}0417,$	$(\mathfrak{C}_{12}) = +0{,}0417,$	$(\mathfrak{D}_7) = +0{,}0417,$
$(\mathfrak{A}_9) = -0{,}0417,$	$(\mathfrak{B}_{12}) = -0{,}0417,$	$(\mathfrak{C}_{15}) = -0{,}0417,$	$(\mathfrak{D}_{14}) = -0{,}0417,$
$(\mathfrak{A}_{10}) = +0{,}0417,$	$(\mathfrak{B}_{13}) = +0{,}0417,$	$(\mathfrak{C}_{16}) = +0{,}0417,$	$(\mathfrak{D}_{15}) = +0{,}0417,$

$(\mathfrak{E}_5) = -0{,}003\,46,$	$(\mathfrak{E}_0) = +0{,}035\,15,$	$(\mathfrak{E}_{13}) = -0{,}009\,59,$
$(\mathfrak{E}_6) = +0{,}009\,22,$	$(\mathfrak{E}_{10}) = -0{,}015\,97,$	$(\mathfrak{E}_{14}) = -0{,}013\,89,$
$(\mathfrak{E}_7) = -0{,}005\,75,$	$(\mathfrak{E}_{11}) = -0{,}004\,34,$	$(\mathfrak{E}_{15}) = +0{,}023\,35,$
$(\mathfrak{E}_8) = -0{,}019\,18,$	$(\mathfrak{E}_{12}) = +0{,}013\,93,$	$(\mathfrak{E}_{16}) = -0{,}009\,47,$

und die Korrelatengleichungen:***)

---

*) In Wirklichkeit sind die Winkel anders beobachtet worden, insofern als auf den Punkten nicht nur die je 3 Richtungen, die wir in unserm Beispiele benutzen, bestimmt worden sind.

**) In den Veröffentlichungen der Landesaufnahme sind die Zahlenwerthe der Koeffizienten Q in den im Winkelregister bei jedem Standpunkte angesetzten Gewichtsgleichungen enthalten.

***) Bei der Landesaufnahme: „Darstellung der Verbesserungen (1), (2), (3), ... durch die Korrelate I, II, III, ...

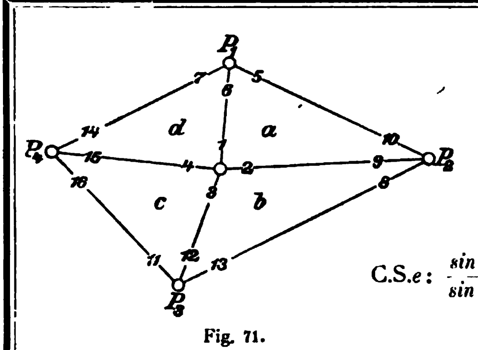


Fig. 71.

1. Bedingungsgleichungen.

$$\Delta a:\ -R_9+R_{10}-R_5+R_6-R_1+R_2=180^\circ+\varepsilon,$$
$$\Delta b:\ -R_{12}+R_{13}-R_8+R_9-R_2+R_3=180^\circ+\varepsilon,$$
$$\Delta c:\ -R_{15}+R_{16}-R_{11}+R_{12}-R_3+R_4=180^\circ+\varepsilon,$$
$$\Delta d:\ -R_6+R_7-R_{14}+R_{15}-R_4+R_1=180^\circ+\varepsilon,$$
$$\text{C.S.}e:\ \frac{\sin(-R_5+R_6)\sin(-R_8+R_9)\sin(-R_{11}+R_{12})\sin(-R_{14}+R_{15})}{\sin(-R_9+R_{10})\sin(-R_{12}+R_{13})\sin(-R_{15}+R_{16})\sin(-R_6+R_7)}=1.$$

2. Berechnung der Widersprüche und Zusammenstellung der Verbesserungen.

Bezeichnung der: Dreiecke.	Punkte.	Winkel.	Winkel. °	′	″	Verbesserungen der Winkel.		″	$cpl\ log\ sin\ \alpha$. $log\ sin\ \beta$.	Verbesserungen der *log*.		
1.	2.	3.	4.			5.			6.	7.		
a	P_2	$\alpha: -R_{09}+R_{010}$	28	48	54,74	−(9)+(10)	−	0,233	0.316 9653	−0,383(−(9)+(10))	+	0,089
	P_1	$\beta: -R_{05}+R_{06}$	68	22	57,46	−(5)+(6)	+	0,060	9.968 3264	+0,083(−(5)+(6))	+	0,005
	P	$\gamma: -R_{01}+R_{02}$	82	48	09,71	−(1)+(2)	−	0,067				
		Σ_a	180	00	01,91		−	0,240				
		S_A	180	00	01,67							
		f_a		−	0,24							
b	P_3	$\alpha: -R_{012}+R_{013}$	42	29	18,60	−(12)+(13)	+	0,047	0.170 4118	−0,230(−(12)+(13))	−	0,011
	P_2	$\beta: -R_{08}+R_{09}$	24	35	46,88	−(8)+(9)	+	0,325	9.619 3261	+0,460(−(8)+(9))	+	0,150
	P	$\gamma: -R_{02}+R_{03}$	112	54	55,88	−(2)+(3)	+	0,109				
		Σ_b	180	00	01,36		+	0,481				
		S_B	180	00	01,84							
		f_b		+	0,48							
c	P_4	$\alpha: -R_{015}+R_{016}$	42	52	49,83	−(15)+(16)	+	0,226	0.167 1900	−0,227(−(15)+(16))	−	0,051
	P_3	$\beta: -R_{011}+R_{012}$	63	42	02,80	−(11)+(12)	+	0,155	9.952 5466	+0,104(−(11)+(12))	+	0,016
	P	$\gamma: -R_{03}+R_{04}$	73	25	08,36	−(3)+(4)	+	0,187				
		Σ_c	180	00	00,99		+	0,568				
		S_C	180	00	01,56							
		f_c		+	0,57							
d	P_1	$\alpha: -R_{06}+R_{07}$	56	49	34,49	−(6)+(7)	−	0,147	0.077 2667	−0,138(−(6)+(7))	+	0,020
	P_4	$\beta: -R_{014}+R_{015}$	32	18	41,37	−(14)+(15)	−	0,173	9.727 9655	+0,333(−(14)+(15))	−	0,058
	P	$\gamma: -R_{04}+R_{01}$	90	51	46,05	−(4)+(1)	−	0,229				
		Σ_d	180	00	01,91		−	0,549	9.999 9984	$=\Sigma_e$	+	0,160
		S_D	180	00	01,36				0.000 0000	$=S_E$		
		f_d		−	0,55				+0,16	$=f_e$		

(206)

$$
\left\{
\begin{aligned}
(1) &= -0{,}0417\,k_A + 0{,}0417\,k_D,\\
(2) &= +0{,}0417\,k_A - 0{,}0417\,k_B,\\
(3) &= +0{,}0417\,k_B - 0{,}0417\,k_C,\\
(4) &= +0{,}0417\,k_C - 0{,}0417\,k_D,\\
(5) &= -0{,}0417\,k_A - 0{,}003\,46\,k_E,\\
(6) &= +0{,}0417\,k_A - 0{,}0417\,k_D + 0{,}009\,22\,k_E,\\
(7) &= +0{,}0417\,k_D - 0{,}005\,75\,k_E,\\
(8) &= -0{,}0417\,k_B - 0{,}019\,18\,k_E,\\
(9) &= -0{,}0417\,k_A + 0{,}0417\,k_B + 0{,}035\,15\,k_E,\\
(10) &= +0{,}0417\,k_A - 0{,}015\,97\,k_E,\\
(11) &= -0{,}0417\,k_C - 0{,}004\,34\,k_E,\\
(12) &= -0{,}0417\,k_B + 0{,}0417\,k_C + 0{,}013\,93\,k_E,\\
(13) &= +0{,}0417\,k_B - 0{,}009\,59\,k_E,\\
(14) &= -0{,}0417\,k_D - 0{,}013\,89\,k_E,\\
(15) &= -0{,}0417\,k_C + 0{,}0417\,k_D + 0{,}023\,35\,k_E,\\
(16) &= +0{,}0417\,k_C - 0{,}009\,47\,k_E.
\end{aligned}
\right.
$$

3. Bildung der Faktoren

Nr.	*A*.	*B*.	*C*.	*D*.	*E*.	(𝔄).*)	(𝔅).*)	(ℭ).*)	(𝔇).*)	(𝔈).*)	*A*(𝔄).	*A*(𝔅).	*A*(ℭ).
1	−1	.	.	+1	.	−4,17	.	.	+4,17	.	+ 4,17	.	.
2	+1	−1	.	.	.	+4,17	−4,17	.	.	.	+ 4,17	−4,17	.
3	.	+1	−1	.	.	.	+4,17	−4,17	.	.	.	.	.
4	.	.	+1	−1	.	.	.	+4,17	−4,17	.	.	.	.
5	−1	.	.	.	−0,083	−4,17	.	.	.	−0,346	+ 4,17	.	.
6	+1	.	.	−1	+0,221	+4,17	.	.	−4,17	+0,922	+ 4,17	.	.
7	.	.	.	+1	−0,138	.	.	.	+4,17	−0,575	.	.	.
8	.	−1	.	.	−0,460	.	−4,17	.	.	−1,918	.	.	.
9	−1	+1	.	.	+0,843	−4,17	+4,17	.	.	+3,515	+ 4,17	−4,17	.
10	+1	.	.	.	−0,383	+4,17	.	.	.	−1,597	+ 4,17	.	.
11	.	.	−1	.	−0,104	.	.	−4,17	.	−0,434	.	.	.
12	.	−1	+1	.	+0,334	.	−4,17	+4,17	.	+1,393	.	.	.
13	.	+1	.	.	−0,230	.	+4,17	.	.	−0,959	.	.	.
14	.	.	.	−1	−0,338	.	.	.	−4,17	−1,389	.	.	.
15	.	.	−1	+1	+0,560	.	.	−4,17	+4,17	+2,335	.	.	.
16	.	.	+1	.	−0,227	.	.	+4,17	.	−0,947	.	.	.
											+25,02	−8,34	.

4. Auflösung der

[*A*(𝔄)].	[*A*(𝔅)]	[*A*(ℭ)].	[*A*(𝔇)].	[*A*(𝔈)].	$-f_a$.*)	[*B*(𝔅)].	[*B*(ℭ)].	[*B*(𝔇)].	[*B*(𝔈)].	$-f_b$.*)
+ 25,02	− 8,34	.	− 8,34	− 3,844	+ 24,0	+ 25,02	− 8,34	.	+ 3,081	− 48,0
	+ 0,333	.	+ 0,333	+ 0,1536	− 0,959	− 2,78	.	− 2,78	− 1,281	+ 8,0
					+ 0,297	+ 22,24	− 8,34	− 2,78	+ 1,800	− 40,0
					− 0,536		+ 0,375	+ 0,125	− 0,0809	+ 1,799
					.					− 0,156
					+ 0,814					− 0,201
										+ 1,001
				k_A	− 0,384				k_B	+ 2,443

*) Die Koeffizienten (𝔄), (𝔅), ... (𝔈) und die Widersprüche f_a, f_b, ... f_e sind hier mit 100 multiplizirt angesetzt.

Dieselben Korrelatengleichungen erhalten wir, wenn wir nach den Formeln (**207**) die Ausdrücke

$$[1] = -k_A + k_D, \qquad [9] = -k_A + k_B + 0{,}843\,k_E,$$
$$[2] = +k_A - k_B, \qquad [10] = +k_A - 0{,}383\,k_E,$$
$$[3] = +k_B - k_C, \qquad [11] = -k_C - 0{,}104\,k_E,$$
$$[4] = +k_C - k_D, \qquad [12] = -k_B + k_C + 0{,}334\,k_E,$$
$$[5] = -k_A - 0{,}083\,k_E, \qquad [13] = +k_B - 0{,}230\,k_E,$$
$$[6] = +k_A - k_D + 0{,}221\,k_E, \qquad [14] = -k_D - 0{,}333\,k_E,$$
$$[7] = +k_D - 0{,}138\,k_E, \qquad [15] = -k_C + k_D + 0{,}560\,k_E,$$
$$[8] = -k_B - 0{,}460\,k_E, \qquad [16] = +k_C - 0{,}227\,k_E$$

bilden*) und diese zusammen mit den unter Nr. 7 erhaltenen Zahlenwerthen der Koeffizienten Q in die Gleichungen (**208**) einsetzen.

9. Die weitern Rechnungen können ohne weiteres nach den allgemeinen Formeln (**209**) bis (**215**) ausgeführt werden. Wir lassen daher hier sogleich die gesamte Zahlenrechnung folgen: (Siehe die Tabellen auf Seite 281 bis 284.)

der Endgleichungen.

$A(\mathfrak{D})$.	$A(\mathfrak{E})$.	$B(\mathfrak{B})$.	$B(\mathfrak{C})$.	$B(\mathfrak{D})$.	$B(\mathfrak{E})$.	$C(\mathfrak{C})$.	$C(\mathfrak{D})$.	$C(\mathfrak{E})$.	$D(\mathfrak{D})$.	$D(\mathfrak{E})$.	$E(\mathfrak{E})$.
−4,17	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 4,17	.	.
.	.	+ 4,17	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	+ 4,17	−4,17	.	.	+ 4,17	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	+ 4,17	−4,17	.	+ 4,17	.	.
.	+0,346	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+0,0287
−4,17	+0,922	.	.	.	.	.	.	.	+ 4,17	−0,922	+0,2038
.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 4,17	−0,575	+0,0794
.	.	+ 4,17	.	.	+1,918	.	.	.	.	.	+0,8823
.	−3,515	+ 4,17	.	.	+3,515	.	.	.	.	.	+2,9631
.	−1,597	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+0,6117
.	.	.	.	.	.	+ 4,17	.	+0,434	.	.	+0,0451
.	.	+ 4,17	−4,17	.	−1,393	+ 4,17	.	+1,393	.	.	+0,4653
.	.	+ 4,17	.	.	−0,959	.	.	.	.	.	+0,2206
.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 4,17	+1,389	+0,4625
.	.	.	.	.	.	+ 4,17	−4,17	−2,335	+ 4,17	+2,335	+1,3076
.	.	.	.	.	.	+ 4,17	.	−0,947	.	.	+0,2150
−8,34	−3,844	+25,02	−8,34	.	+3,081	+25,02	−8,34	−1,455	+25,02	+2,227	+7,4851

Endgleichungen.

$[C(\mathfrak{C})]$.	$[C(\mathfrak{D})]$.	$[C(\mathfrak{E})]$.	$-f_c$.*)	$[D(\mathfrak{D})]$.	$[D(\mathfrak{E})]$.	$-f_d$.*)	$[E(\mathfrak{E})]$.	$-f_e$.*)	Probe.	
+ 25,02	− 8,34	− 1,455	− 57,0	+ 25,02	+ 2,227	+ 55,0	+ 7,485	− 16,00		
.	.	.	.	− 2,78	− 1,281	+ 8,0	− 0,591	+ 3,69	+ 0,230	+ 0,092
− 3,13	− 1,05	+ 0,675	− 15,0	− 0,35	+ 0,225	− 5,0	− 0,146	+ 3,24	+ 0,719	+ 1,173
+ 21,89	− 9,39	− 0,780	− 72,0	− 4,03	− 0,335	− 30,9	− 0,028	− 2,57	+ 2,368	+ 1,521
	+ 0,429	+ 0,0356	+ 3,289	+ 17,86	+ 0,836	+ 27,1	− 0,039	− 1,27	+ 0,411	+ 0,884
			+ 0,069		− 0,0468	− 1,517	+ 6,681	− 12,91	+ 0,249	+ 0,309
			− 0,689			− 0,090			+ 3,977	+ 3,979
		k_C	+ 2,669		k_D	− 1,607	k_E	+ 1,932		

*) Bei der Landesaufnahme: Ausdrücke der Gröfsen [1], [2], [3], ... durch die Korrelate I, II, III, ...

5. Berechnung der Verbesserungen (n).

Nr.	$(\mathfrak{A}) k_A$	$+ (\mathfrak{B}) k_B$	$+ (\mathfrak{C}) k_C$	$+ (\mathfrak{D}) k_D$	$+ (\mathfrak{E}) k_E$	$= (n)$.	[n].	(n) [n].
1	+ 0,016	.	.	— 0,067	.	— 0,051	— 1,22	0,062
2	— 0,016	— 0,102	.	.	.	— 0,118	— 2,83	0,334
3	.	+ 0,102	— 0,111	.	.	— 0,009	— 0,23	0,002
4	.	.	+ 0,111	+ 0,067	.	+ 0,178	+ 4,28	0,762
5	+ 0,016	.	.	.	— 0,007	+ 0,009	+ 0,22	0,002
6	— 0,016	.	.	+ 0,067	+ 0,018	+ 0,069	+ 1,65	0,114
7	.	.	.	— 0,067	— 0,011	— 0,078	— 1,87	0,146
8	.	— 0,102	.	.	— 0,037	— 0,139	— 3,33	0,463
9	+ 0,016	+ 0,102	.	.	+ 0,068	+ 0,186	+ 4,46	0,830
10	— 0,016	.	.	.	— 0,031	— 0,047	— 1,12	0,053
11	.	.	— 0,111	.	— 0,008	— 0,119	— 2,87	0,342
12	.	— 0,102	+ 0,111	.	+ 0,027	+ 0,036	+ 0,87	0,031
13	.	+ 0,102	.	.	— 0,019	+ 0,083	+ 2,00	0,166
14	.	.	.	+ 0,067	— 0,027	+ 0,040	+ 0,96	0,038
15	.	.	— 0,111	— 0,067	+ 0,045	— 0,133	— 3,19	0,424
16	.	.	+ 0,111	.	— 0,018	+ 0,093	+ 2,23	0,207
	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	+ 0,01	3,976

7. Mittlere Fehler.

	Quadrat-summe.	Divisor.	Mittleres Fehlerquadrat.	Mittlerer Fehler. ″
P	76,10	33	2,31	1,52
P_1	15,22	22	0,69	0,83
P_2	29,48	22	1,34	1,16
P_3	42,72	22	1,94	1,39
P_4	26,23	22	1,19	1,09
Netz	3,98	5	0,80	0,89
	193,73	126	1,54	1,24

6. Zusammenstellung der ausgeglichenen Winkel und Logarithmen.

Bezeichnung der Dreiecke.	Punkte.	Winkel.	Ausgeglichene Winkel. °	′	″	*cpl log sin α.* *log sin β.*
1.	2.	3.	4.			5.
a	P_2	$\alpha: -R_9 + R_{10}$	28	48	54,51	0.316 9662
	P_1	$\beta: -R_5 + R_6$	68	22	57,52	9.968 3264
	P	$\gamma: -R_1 + R_2$	82	48	09,64	
			180	00	01,67	
b	P_3	$\alpha: -R_{12} + R_{13}$	42	29	18,65	0.170 4117
	P_2	$\beta: -R_8 + R_9$	24	35	47,20	9.619 3275
	P	$\gamma: -R_2 + R_3$	112	54	55,99	
			180	00	01,84	
c	P_4	$\alpha: -R_{15} + R_{16}$	42	52	50,06	0.167 1895
	P_3	$\beta: -R_{11} + R_{12}$	63	42	02,95	9.952 5468
	P	$\gamma: -R_3 + R_4$	73	25	08,55	
			180	00	01,56	
d	P_1	$\alpha: -R_6 + R_7$	56	49	34,34	0.077 2669
	P_4	$\beta: -R_{14} + R_{15}$	32	18	41,20	9.727 9649
	P	$\gamma: -R_4 + R_1$	90	51	45,82	
			180	00	01,36	9.999 9999

10. Wenn, wie im vorliegenden Beispiele, alle nicht quadratischen Faktoren der Endgleichungen (**194**) gleich Null sind, so werden nach den Gleichungen (**204**) auch alle die Koeffizienten Q_{12}, Q_{13}, ..., Q_{21}, Q_{23}, ..., Q_{31}, Q_{32}, ... gleich Null, während $Q_{11} = \frac{1}{[paa]}$, $Q_{22} = \frac{1}{[pbb]}$, $Q_{33} = \frac{1}{[pcc]}$, ... wird, womit sich dann nach den Formeln (**205**) für die Koeffizienten $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$, ... ergiebt:

$$(\mathfrak{A}_1) = \frac{A_1}{[paa]}, \quad (\mathfrak{A}_2) = \frac{A_2}{[pbb]}, \quad (\mathfrak{A}_3) = \frac{A_3}{[pcc]}, \ldots,$$
$$(\mathfrak{B}_1) = \frac{B_1}{[paa]}, \quad (\mathfrak{B}_2) = \frac{B_2}{[pbb]}, \quad (\mathfrak{B}_3) = \frac{B_3}{[pcc]}, \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

während die Korrelatengleichungen (**206**), wenn wir noch die Bezeichnungen $P_1 = [paa]$, $P_2 = [pbb]$, $P_3 = [pcc]$, ... einführen, übergehen in:

$$(1) = \frac{A_1}{P_1} k_A + \frac{B_1}{P_1} k_B + \ldots,$$
$$(2) = \frac{A_2}{P_2} k_A + \frac{B_2}{P_2} k_B + \ldots,$$
$$(3) = \frac{A_3}{P_3} k_A + \frac{B_3}{P_3} k_B + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

und die Endgleichungen (**209**) in:

$$\left[\frac{AA}{P}\right] k_A + \left[\frac{AB}{P}\right] k_B + \ldots = f_a,$$
$$\left[\frac{AB}{P}\right] k_A + \left[\frac{BB}{P}\right] k_B + \ldots = f_b,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Diese Korrelaten- und Endgleichungen stimmen überein mit den im V. Abschnitte aufgestellten Korrelatengleichungen (**156**) und Endgleichungen (**157**), woraus folgt, daſs wir in dem vorbezeichneten Falle den zweiten Teil der Ausgleichung auch ohne weiteres ganz nach dem im V. Abschnitte behandelten Verfahren für bedingte Beobachtungen durchführen können, wenn wir die nach dem Verfahren für vermittelnde Beobachtungen erhaltenen Werthe x_0, y_0, z_0, ... als unabhängige Beobachtungsergebnisse mit den Gewichten P_1, P_2, P_3, ... einführen.

VII. Abschnitt.

Gewichte und mittlere Fehler der wahrscheinlichsten Werthe der zu bestimmenden Gröſsen und von Funktionen derselben.

1. Kapitel. Für vermittelnde Beobachtungen.

§ 62. Gewichte und mittlere Fehler der wahrscheinlichsten Werthe der zu bestimmenden Gröſsen.

1. Die Gewichte P_x, P_y, P_z, ... der wahrscheinlichsten Werthe x, y, z, ... der zu bestimmenden Gröſsen ergeben sich mit den bekannten Gewichten p_1, p_2, p_3, ... p_n der Beobachtungsergebnisse λ_1, λ_2, λ_3, ... λ_n nach den Formeln (**40**) bis (**45**), sobald wir die wahrscheinlichsten Werthe x, y, z, ... als Funktionen der unabhängigen Beobachtungsergebnisse λ_1, λ_2, λ_3, ... λ_n dargestellt haben. Aus den Formeln (**111**)

$$x = \mathfrak{x} + d\mathfrak{x},$$
$$y = \mathfrak{y} + d\mathfrak{y},$$
$$z = \mathfrak{z} + d\mathfrak{z},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

folgt nun, dafs die Gewichte der wahrscheinlichsten Werthe $x, y, z, \ldots$ gleich den Gewichten der Aenderungen $d\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{z}, \ldots$ der Näherungswerthe $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$ sind; denn die Gewichte $p_\mathfrak{x}, p_\mathfrak{y}, p_\mathfrak{z}, \ldots$ der fest bestimmten Näherungswerthe sind $= \infty$ und demnach ist $\frac{1}{p_\mathfrak{x}} = \frac{1}{p_\mathfrak{y}} = \frac{1}{p_\mathfrak{z}} \cdots = 0$, womit nach Formel (**41**) folgt, dafs

$$\frac{1}{P_x} = \frac{1}{P_{d\mathfrak{x}}}, \quad \frac{1}{P_y} = \frac{1}{P_{d\mathfrak{y}}}, \quad \frac{1}{P_z} = \frac{1}{P_{d\mathfrak{z}}}, \quad \cdots\cdots$$

ist. Ebenso sind auch die Gewichte der Beobachtungsergebnisse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ gleich den Gewichten der Abweichungen $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ zwischen den Beobachtungsergebnissen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ und ihren Näherungswerthen $l_1, l_2, l_3, \ldots l_n$, da letztere aus den Näherungswerthen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$ der zu bestimmenden Gröfsen immer mit solcher Genauigkeit berechnet werden können, dafs ihnen auch das Gewicht ∞ zugeschrieben werden kann. Demnach können wir auch die Gewichte $P_x, P_y, P_z, \ldots$ der wahrscheinlichsten Werthe $x, y, z, \ldots$ nach den Formeln (**40**) bis (**45**) erhalten, wenn wir die Aenderungen $d\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{z}, \ldots$ als Funktionen der Abweichungen $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ darstellen.

2. Um die Aenderungen $d\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{z}, \ldots$ als Funktionen der Abweichungen $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ darzustellen, lösen wir zuerst die Endgleichungen

$$(\mathbf{216}) \quad \begin{cases} [paa]\,d\mathfrak{x} + [pab]\,d\mathfrak{y} + [pac]\,d\mathfrak{z} + \cdots [paf] = 0, \\ [pab]\,d\mathfrak{x} + [pbb]\,d\mathfrak{y} + [pbc]\,d\mathfrak{z} + \cdots [pbf] = 0, \\ [pac]\,d\mathfrak{x} + [pbc]\,d\mathfrak{y} + [pcc]\,d\mathfrak{z} + \cdots [pcf] = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

allgemein nach $d\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{z}, \ldots$ auf und zwar mit Hülfe der Koeffizienten $Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, \ldots; Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}, \ldots; Q_{31}, Q_{32}, Q_{33}, \ldots; \ldots$, die wir wiederum, wie im § 60 derart festsetzen, dafs sie den folgenden Gleichungen genügen:

$$(\mathbf{217}\,\mathrm{a}) \quad \begin{cases} [paa]\,Q_{11} + [pab]\,Q_{12} + [pac]\,Q_{13} + \cdots = 1, \\ [pab]\,Q_{11} + [pbb]\,Q_{12} + [pbc]\,Q_{13} + \cdots = 0, \\ [pac]\,Q_{11} + [pbc]\,Q_{12} + [pcc]\,Q_{13} + \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \end{cases}$$

$$(\mathbf{217}\,\mathrm{b}) \quad \begin{cases} [paa]\,Q_{21} + [pab]\,Q_{22} + [pac]\,Q_{23} + \cdots = 0, \\ [pab]\,Q_{21} + [pbb]\,Q_{22} + [pbc]\,Q_{23} + \cdots = 1, \\ [pac]\,Q_{21} + [pbc]\,Q_{22} + [pcc]\,Q_{23} + \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \end{cases}$$

$$(\mathbf{217}\,\mathrm{c}) \quad \begin{cases} [paa]\,Q_{31} + [pab]\,Q_{32} + [pac]\,Q_{33} + \cdots = 0, \\ [pab]\,Q_{31} + [pbb]\,Q_{32} + [pbc]\,Q_{33} + \cdots = 0, \\ [pac]\,Q_{31} + [pbc]\,Q_{32} + [pcc]\,Q_{33} + \cdots = 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Wir multipliziren die Endgleichungen (**216**) zuerst mit den Koeffizienten $Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, \ldots$, addiren danach alle Gleichungen und erhalten unter Beachtung der Gleichungen (**217** a):

$$(1\,\mathrm{a}^*) \qquad d\mathfrak{x} = -[paf]\,Q_{11} - [pbf]\,Q_{12} - [pcf]\,Q_{13} - \cdots$$

Sodann multipliziren wir die Endgleichungen (**216**) mit den Koeffizienten $Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}, \ldots$, addiren danach alle Gleichungen und erhalten unter Beachtung der Gleichungen (**217** b):

$$(1\,\mathrm{b}^*) \qquad d\mathfrak{y} = -[paf]\,Q_{21} - [pbf]\,Q_{22} - [pcf]\,Q_{23} - \cdots$$

Ferner multipliziren wir die Endgleichungen (216) auch mit den Koeffizienten Q_{31}, Q_{32}, Q_{33}, ..., addiren danach alle Gleichungen und erhalten unter Beachtung der Gleichungen (217c):

(1c*) $$d\mathfrak{z} = -[paf]\,Q_{31} - [pbf]\,Q_{32} - [pcf]\,Q_{33} - \cdots\cdot$$

u. s. w.

3. Die Gleichungen (1*) können wir auch schreiben wie folgt:

(1a*)
$$\begin{aligned} d\mathfrak{x} = & -p_1 a_1 f_1 Q_{11} - p_1 b_1 f_1 Q_{12} - p_1 c_1 f_1 Q_{13} - \cdots\cdot \\ & -p_2 a_2 f_2 Q_{11} - p_2 b_2 f_2 Q_{12} - p_2 c_2 f_2 Q_{13} - \cdots\cdot \\ & -p_3 a_3 f_3 Q_{11} - p_3 b_3 f_3 Q_{12} - p_3 c_3 f_3 Q_{13} - \cdots\cdot \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & -p_n a_n f_n Q_{11} - p_n b_n f_n Q_{12} - p_n c_n f_n Q_{13} - \cdots\cdot, \end{aligned}$$

(1b*)
$$\begin{aligned} d\mathfrak{y} = & -p_1 a_1 f_1 Q_{21} - p_1 b_1 f_1 Q_{22} - p_1 c_1 f_1 Q_{23} - \cdots\cdot \\ & -p_2 a_2 f_2 Q_{21} - p_2 b_2 f_2 Q_{22} - p_2 c_2 f_2 Q_{23} - \cdots\cdot \\ & -p_3 a_3 f_3 Q_{21} - p_3 b_3 f_3 Q_{22} - p_3 c_3 f_3 Q_{23} - \cdots\cdot \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & -p_n a_n f_n Q_{21} - p_n b_n f_n Q_{22} - p_n c_n f_n Q_{23} - \cdots\cdot, \end{aligned}$$

(1c*)
$$\begin{aligned} d\mathfrak{z} = & -p_1 a_1 f_1 Q_{31} - p_1 b_1 f_1 Q_{32} - p_1 c_1 f_1 Q_{33} - \cdots\cdot \\ & -p_2 a_2 f_2 Q_{31} - p_2 b_2 f_2 Q_{32} - p_2 c_2 f_2 Q_{33} - \cdots\cdot \\ & -p_3 a_3 f_3 Q_{31} - p_3 b_3 f_3 Q_{32} - p_3 c_3 f_3 Q_{33} - \cdots\cdot \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & -p_n a_n f_n Q_{31} - p_n b_n f_n Q_{32} - p_n c_n f_n Q_{33} - \cdots\cdot, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Setzen wir nun:

(2a*)
$$\left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{p_1}\,a_1 Q_{11} + \sqrt{p_1}\,b_1 Q_{12} + \sqrt{p_1}\,c_1 Q_{13} + \cdots\cdot, \\ \alpha_2 &= \sqrt{p_2}\,a_2 Q_{11} + \sqrt{p_2}\,b_2 Q_{12} + \sqrt{p_2}\,c_2 Q_{13} + \cdots\cdot, \\ \alpha_3 &= \sqrt{p_3}\,a_3 Q_{11} + \sqrt{p_3}\,b_3 Q_{12} + \sqrt{p_3}\,c_3 Q_{13} + \cdots\cdot, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \alpha_n &= \sqrt{p_n}\,a_n Q_{11} + \sqrt{p_n}\,b_n Q_{12} + \sqrt{p_n}\,c_n Q_{13} + \cdots\cdot; \end{aligned}\right.$$

(2b*)
$$\left\{\begin{aligned} \beta_1 &= \sqrt{p_1}\,a_1 Q_{21} + \sqrt{p_1}\,b_1 Q_{22} + \sqrt{p_1}\,c_1 Q_{23} + \cdots\cdot, \\ \beta_2 &= \sqrt{p_2}\,a_2 Q_{21} + \sqrt{p_2}\,b_2 Q_{22} + \sqrt{p_2}\,c_2 Q_{23} + \cdots\cdot, \\ \beta_3 &= \sqrt{p_3}\,a_3 Q_{21} + \sqrt{p_3}\,b_3 Q_{22} + \sqrt{p_3}\,c_3 Q_{23} + \cdots\cdot, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \beta_n &= \sqrt{p_n}\,a_n Q_{21} + \sqrt{p_n}\,b_n Q_{22} + \sqrt{p_n}\,c_n Q_{23} + \cdots\cdot; \end{aligned}\right.$$

(2c*)
$$\left\{\begin{aligned} \gamma_1 &= \sqrt{p_1}\,a_1 Q_{31} + \sqrt{p_1}\,b_1 Q_{32} + \sqrt{p_1}\,c_1 Q_{33} + \cdots\cdot, \\ \gamma_2 &= \sqrt{p_2}\,a_2 Q_{31} + \sqrt{p_2}\,b_2 Q_{32} + \sqrt{p_2}\,c_2 Q_{33} + \cdots\cdot, \\ \gamma_3 &= \sqrt{p_3}\,a_3 Q_{31} + \sqrt{p_3}\,b_3 Q_{32} + \sqrt{p_3}\,c_3 Q_{33} + \cdots\cdot, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \gamma_n &= \sqrt{p_n}\,a_n Q_{31} + \sqrt{p_n}\,b_n Q_{32} + \sqrt{p_n}\,c_n Q_{33} + \cdots\cdot, \end{aligned}\right.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

so gehen die Formeln (1*) über in:

(3*)
$$\left\{\begin{aligned} d\mathfrak{x} &= \alpha_1 \sqrt{p_1} f_1 + \alpha_2 \sqrt{p_2} f_2 + \alpha_3 \sqrt{p_3} f_3 + \cdots\cdot \alpha_n \sqrt{p_n} f_n = [\alpha \sqrt{p} f], \\ d\mathfrak{y} &= \beta_1 \sqrt{p_1} f_1 + \beta_2 \sqrt{p_2} f_2 + \beta_3 \sqrt{p_3} f_3 + \cdots\cdot \beta_n \sqrt{p_n} f_n = [\beta \sqrt{p} f], \\ d\mathfrak{z} &= \gamma_1 \sqrt{p_1} f_1 + \gamma_2 \sqrt{p_2} f_2 + \gamma_3 \sqrt{p_3} f_3 + \cdots\cdot \gamma_n \sqrt{p_n} f_n = [\gamma \sqrt{p} f], \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}\right.$$

womit die Aenderungen $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... als lineare Funktionen der Abweichungen f_1, f_2, f_3, ... f_n, deren Gewichte p_1, p_2, p_3, ... p_n sind, dargestellt sind.

4. Unter Beachtung der Ausführungen unter Nr. 1 ergiebt sich hiernach und nach Formel (**43**) für die Gewichte P_x, P_y, P_z, ... der wahrscheinlichsten Werthe x, y, z, ... der zu bestimmenden Gröfsen:

$$(4^*)\quad \begin{cases} \frac{1}{P_x} = \alpha_1\alpha_1 + \alpha_2\alpha_2 + \alpha_3\alpha_3 + \cdots \alpha_n\alpha_n = [\alpha\alpha], \\ \frac{1}{P_y} = \beta_1\beta_1 + \beta_2\beta_2 + \beta_3\beta_3 + \cdots \beta_n\beta_n = [\beta\beta], \\ \frac{1}{P_z} = \gamma_1\gamma_1 + \gamma_2\gamma_2 + \gamma_3\gamma_3 + \cdots \gamma_n\gamma_n = [\gamma\gamma], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

und danach für die mittleren Fehler M_x, M_y, M_z, ... der wahrscheinlichsten Werthe x, y, z, ... der zu bestimmenden Gröfsen nach Formel (**35**):

$$(5^*)\quad M_x = \pm\,\mathrm{m}\sqrt{\frac{1}{P_x}},\qquad M_y = \pm\,\mathrm{m}\sqrt{\frac{1}{P_y}},\qquad M_z = \pm\,\mathrm{m}\sqrt{\frac{1}{P_z}},\quad \cdots$$

5. Wenn nun auch im Vorstehenden sämtliche Formeln gegeben sind, wonach die Gewichte P_x, P_y, P_z, ... erhalten werden können, so sind doch noch weitere Entwicklungen nothwendig, um zu Formeln zu gelangen, wonach die Zahlenwerthe dieser Gewichte einfacher erhalten werden können, wie nach den bisher entwickelten Formeln.

Multipliziren wir zu dem Zweck die Gleichungen (2*) zuerst mit $\sqrt{p_1}\,a_1$, $\sqrt{p_2}\,a_2$, $\sqrt{p_3}\,a_3$, ... $\sqrt{p_n}\,a_n$, sodann mit $\sqrt{p_1}\,b_1$, $\sqrt{p_2}\,b_2$, $\sqrt{p_3}\,b_3$, ... $\sqrt{p_n}\,b_n$, ferner mit $\sqrt{p_1}\,c_1$, $\sqrt{p_2}\,c_2$, $\sqrt{p_3}\,c_3$, ... $\sqrt{p_n}\,c_n$ u. s. w. und addiren wir danach die einzelnen Gleichungsgruppen, so erhalten wir unter Beachtung der Gleichungen (**217**):

$$(6a^*)\quad \begin{cases} [\sqrt{p}\,a\,\alpha] = [paa]\,Q_{11} + [pab]\,Q_{12} + [pac]\,Q_{13} + \cdots = 1, \\ [\sqrt{p}\,b\,\alpha] = [pab]\,Q_{11} + [pbb]\,Q_{12} + [pbc]\,Q_{13} + \cdots = 0, \\ [\sqrt{p}\,c\,\alpha] = [pac]\,Q_{11} + [pbc]\,Q_{12} + [pcc]\,Q_{13} + \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots; \end{cases}$$

$$(6b^*)\quad \begin{cases} [\sqrt{p}\,a\,\beta] = [paa]\,Q_{21} + [pab]\,Q_{22} + [pac]\,Q_{23} + \cdots = 0, \\ [\sqrt{p}\,b\,\beta] = [pab]\,Q_{21} + [pbb]\,Q_{22} + [pbc]\,Q_{23} + \cdots = 1, \\ [\sqrt{p}\,c\,\beta] = [pac]\,Q_{21} + [pbc]\,Q_{22} + [pcc]\,Q_{23} + \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots; \end{cases}$$

$$(6c^*)\quad \begin{cases} [\sqrt{p}\,a\,\gamma) = [paa]\,Q_{31} + [pab]\,Q_{32} + [pac]\,Q_{33} + \cdots = 0, \\ [\sqrt{p}\,b\,\gamma] = [pab]\,Q_{31} + [pbb]\,Q_{32} + [pbc]\,Q_{33} + \cdots = 0, \\ [\sqrt{p}\,c\,\gamma] = [pac]\,Q_{31} + [pbc]\,Q_{32} + [pcc]\,Q_{33} + \cdots = 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots; \end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Multipliziren wir nun weiter die Gleichungen (2*) zuerst mit α_1, α_2, α_3, ... α_n; sodann mit β_1, β_2, β_3, ... β_n; ferner mit γ_1, γ_2, γ_3, ... γ_n u. s. w. und addiren wir danach alle Gleichungsgruppen unter Beachtung der Gleichungen (6*), so folgt:

$$(7^*)\quad \begin{cases} [\alpha\alpha] = [\sqrt{p}a\alpha]\,Q_{11} + [\sqrt{p}b\alpha]\,Q_{12} + [\sqrt{p}c\alpha]\,Q_{13} + \cdots = Q_{11}, \\ [\alpha\beta] = [\sqrt{p}a\beta]\,Q_{11} + [\sqrt{p}b\beta]\,Q_{12} + [\sqrt{p}c\beta]\,Q_{13} + \cdots = Q_{12} = Q_{21}, \\ [\alpha\gamma] = [\sqrt{p}a\gamma]\,Q_{11} + [\sqrt{p}b\gamma]\,Q_{12} + [\sqrt{p}c\gamma]\,Q_{13} + \cdots = Q_{13} = Q_{31}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots; \\ [\beta\beta] = [\sqrt{p}a\beta]\,Q_{21} + [\sqrt{p}b\beta]\,Q_{22} + [\sqrt{p}c\beta]\,Q_{23} + \cdots = Q_{22}, \\ [\beta\gamma] = [\sqrt{p}a\gamma]\,Q_{21} + [\sqrt{p}b\gamma]\,Q_{22} + [\sqrt{p}c\gamma]\,Q_{23} + \cdots = Q_{23} = Q_{32}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ [\gamma\gamma] = [\sqrt{p}a\gamma]\,Q_{31} + [\sqrt{p}b\gamma]\,Q_{32} + [\sqrt{p}c\gamma]\,Q_{33} + \cdots = Q_{33}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Hiernach und nach den Formeln (4*) und (5*) ist dann:

(**220**)	$\frac{1}{P_x} = [\alpha\alpha] = Q_{11}$,	$\frac{1}{P_y} = [\beta\beta] = Q_{22}$,	$\frac{1}{P_z} = [\gamma\gamma] = Q_{33}$,	. . . .,
(**221**)	$M_x = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P_x}}$,	$M_y = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P_y}}$,	$M_z = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P_z}}$,	. . . .

Die Koeffizienten Q_{11}, Q_{22}, Q_{33}, ... sind bestimmt durch die Gleichungen (**217**) und somit erhalten wir die reziproken Werthe der Gewichte P_x, P_y, P_z, ... durch Auflösung der Gleichungen (**217**) nach diesen Koeffizienten.

6. Die Gleichungen (**217**) haben die Form der Endgleichungen (**118**), so dafs wir sie nach dem im § 27 behandelten Verfahren auflösen können. Die Faktoren $[paa]$, $[pab]$, $[pac]$, ...; $[pbb]$, $[pbc]$ . . . .; $[pcc]$; . . . .; . . . . der Koeffizienten Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, ...; Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}, ...; Q_{31}, Q_{32}, Q_{33}, ...; . . . . stimmen überein mit den Faktoren der Aenderungen $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... in den Endgleichungen (**118**), wonach, wenn die Auflösung dieser Endgleichungen vorliegt, es bei Auflösung der Gleichungen (**217**) entbehrlich ist, die Faktoren $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$, ...; $\mathfrak{C}_3$, ...; . . . . der reduzirten Endgleichungen nach den Formeln (**120**b) neu zu bilden und die Auflösung der Gleichungen (**217**) beschränkt werden kann auf die nach den Formeln (**120**b) erfolgende Bildung der Werthe $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, ... und auf die Berechnung der Koeffizienten Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, ...; Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}, ...; Q_{31}, Q_{32}, Q_{33}, ...; . . . ., oder da nach den Gleichungen (7*) $Q_{12} = Q_{21}$, $Q_{13} = Q_{31}$, ...; $Q_{23} = Q_{32}$, ...; . . . . ist, auf die Berechnung der Koeffizienten Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, ...; Q_{22}, Q_{23}, ...; Q_{33}, ..., ...

Zuerst ist nun für die Gleichungen (**217**a):

(**218**a)

$$\mathfrak{f}_1 = -1, \quad | \quad \mathfrak{f}_2 = 0, \quad | \quad \mathfrak{f}_3 = 0, \quad | \quad \ldots\ldots,$$

und somit nach den Formeln (**120**b):

$$\mathfrak{F}_2 = -\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1, \quad | \quad \mathfrak{F}_3 = -\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 - \frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2, \quad | \quad \ldots\ldots$$

und nach den Formeln (**123**) für die aus diesen Gleichungen zu berechnenden Koeffizienten Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, ...,:

$$\ldots\ldots\ldots,$$

$$Q_{13} = \ldots\ldots - \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3},$$

$$Q_{12} = -\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{13} - \ldots\ldots - \frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2},$$

$$Q_{11} = -\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_{12} - \frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_{13} - \ldots\ldots - \frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1},$$

Sodann ist für die Gleichungen (**217**b):

(**218**b)

$$\mathfrak{f}_1 = 0, \quad | \quad \mathfrak{f}_2 = -1, \quad | \quad \mathfrak{f}_3 = 0, \quad | \quad \ldots\ldots,$$

und somit nach den Formeln (**120**b):

$$\mathfrak{F}_2 = -1, \quad | \quad \mathfrak{F}_3 = -\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{F}_2}\mathfrak{F}_2 \quad | \quad \ldots\ldots,$$

und nach den Formeln (**123**) für die aus diesen Gleichungen zu berechnenden Koeffizienten Q_{22}, Q_{23}, ...,:

$$\ldots\ldots\ldots,$$

$$Q_{23} = \ldots\ldots - \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3},$$

$$Q_{22} = -\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{23} - \ldots\ldots - \frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}.$$

Ferner ist für die Gleichungen (**217** c):

(**218** c)
$\mathfrak{f}_1 = 0, \quad | \quad \mathfrak{f}_2 = 0, \quad | \quad \mathfrak{f}_3 = -1, \quad | \quad \ldots,$
und somit nach den Formeln (**120** b):
$\mathfrak{F}_2 = 0, \quad | \quad \mathfrak{F}_3 = -1, \quad | \quad \ldots,$
und nach den Formeln (**123**) für die aus diesen Gleichungen zu berechnenden Koeffizienten $Q_{33}, \ldots$:
$$\ldots\ldots,$$
$$Q_{33} = \ldots - \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3},$$
u. s. w.

Mit den in den Gleichungen (**218**) für $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3, \ldots, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots$ angeführten Werthen ergeben sich nach Formel (**127**) die Rechenproben:

(**219**)

$\mathfrak{f}_1 = -1$	$\mathfrak{f}_2 = 0$	$\mathfrak{f}_3 = 0$	$\mathfrak{f}_4 = 0$	$\mathfrak{f}_5 = 0$	Probe.	$\mathfrak{f}_2 = -1$	$\mathfrak{f}_3 = 0$	$\mathfrak{f}_4 = 0$
	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	$+\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	$\mathfrak{F}_2 = -1$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$
$-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}$	$=\mathfrak{F}_2$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	$+\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$	$=\mathfrak{F}_3$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$
$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_{15}$	$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$	$=\mathfrak{F}_3$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	$+\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{25}$	$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}$	$=\mathfrak{F}_4$
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_{14}$	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{15}$	$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}$	$=\mathfrak{F}_4$	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	$+\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{24}$	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_{25}$	$-\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}$
$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_{13}$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{14}$	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_{15}$	$-\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}$	$=\mathfrak{F}_5$	$+\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{F}_5$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{23}$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_{24}$	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}Q_{25}$
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_{12}$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{13}$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_{14}$	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}Q_{15}$	$-\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}$		$=Q_{22}$	$=Q_{23}$	$=Q_{24}$
$=Q_{11}$	$=Q_{12}$	$=Q_{13}$	$=Q_{14}$	$=Q_{15}$	$=Q_{11}$			

§ 63. Gewichte und mittlere Fehler einer Funktion der wahrscheinlichsten Werthe der zu bestimmenden Gröfsen.

1. Wenn das Gewicht P_L und der mittlere Fehler M_L einer Funktion

(**222**) $$L = \varphi(x, y, z, \ldots)$$

der wahrscheinlichsten Werthe $x, y, z, \ldots$ der zu bestimmenden Gröfsen, die in ein und derselben Ausgleichungsrechnung vorkommen, ermittelt werden soll, so dürfen wir dies nicht ohne weiteres nach den Formeln (**45**) und (**33**) ausführen, weil die Werthe $x, y, z, \ldots$ nicht unabhängig voneinander sind, sondern sämtlich Funktionen der von einander unabhängigen Beobachtungsergebnisse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ oder der Abweichungen $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ sind. Defshalb müssen wir, um das Gewicht oder den mittleren Fehler von L zu finden, L zuerst als Funktion von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ oder $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ darstellen.

Führen wir für die partiellen Differenzialquotienten von $\varphi(x, y, z, \ldots) = \varphi(\mathfrak{x} + d\mathfrak{x}, \mathfrak{y} + d\mathfrak{y}, \mathfrak{z} + d\mathfrak{z}, \ldots)$ nach $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$ die Bezeichnungen

(**223**) $$l_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{x}}, \quad l_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{y}}, \quad l_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{z}}, \quad \ldots$$

ein, so wird:

(1*) $$L = \varphi(x, y, z, \cdots) = \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \cdots) + l_1 d\mathfrak{x} + l_2 d\mathfrak{y} + l_3 d\mathfrak{z} + \cdots$$

und wenn hierin für $d\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{z}, \ldots$ die Werthe in (3*) des § 62 eingesetzt werden:

(218 a) $$Q_{11} = \frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\,\mathfrak{f}_1 + \frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\,\mathfrak{F}_2 + \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\,\mathfrak{F}_3 + \cdots,$$

(218 b) $$Q_{22} = \frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\,\mathfrak{F}_2 + \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{B}_3}\,\mathfrak{F}_3 + \cdots,$$

(218 c) $$Q_{33} = \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\,\mathfrak{F}_3 + \cdots,$$

. . . .

Nach diesen Formeln ist für einen Fall, wo die Gewichte für 5 zu bestimmende Gröfsen zu berechnen sind, das folgende Schema zur Berechnung von $Q_{11}, Q_{12}, \ldots Q_{15}; Q_{22}, Q_{23}, \ldots Q_{25}; Q_{33}, Q_{34}, Q_{35}; Q_{44}, Q_{45}; Q_{55}$ aufgestellt, wonach das Rechenschema auch für jeden andern Fall ohne weiteres angeordnet werden kann:

$\mathfrak{f}_5 = 0$	Probe.	$\mathfrak{f}_3 = -1$	$\mathfrak{f}_4 = 0$	$\mathfrak{f}_5 = 0$	Probe.	$\mathfrak{f}_4 = -1$	$\mathfrak{f}_5 = 0$	Probe.	$\mathfrak{f}_5 = -1$
$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	$+\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	$\mathfrak{F}_3 = -1$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	$+\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	$\mathfrak{F}_4 = -1$	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	$+\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	$\mathfrak{F}_5 = -1$
$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	$+\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}$	$= \mathfrak{F}_4$	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	$+\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	$-\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}$	$= \mathfrak{F}_5$	$+\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{F}_5$	$-\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}$
$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	$+\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_{35}$	$-\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}$	$= \mathfrak{F}_5$	$+\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{F}_5$	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}Q_{45}$	$-\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}$		$= Q_{55}$
$= \mathfrak{F}_5$	$+\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{F}_5$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_{34}$	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}Q_{35}$	$-\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}$		$= Q_{44}$	$= Q_{45}$	$= Q_{44}$	
$-\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}$		$= Q_{33}$	$= Q_{34}$	$= Q_{35}$	$= Q_{33}$				
$= Q_{25}$	$= Q_{22}$								

(2*) $$\begin{aligned} L = \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \cdots) &+ (\alpha_1 l_1 + \beta_1 l_2 + \gamma_1 l_3 + \cdots)\sqrt{p_1}\,f_1 \\ &+ (\alpha_2 l_1 + \beta_2 l_2 + \gamma_2 l_3 + \cdots)\sqrt{p_2}\,f_2 \\ &+ (\alpha_3 l_1 + \beta_3 l_2 + \gamma_3 l_3 + \cdots)\sqrt{p_3}\,f_3 \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ (\alpha_n l_1 + \beta_n l_2 + \gamma_n l_3 + \cdots)\sqrt{p_n}\,f_n. \end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir dann nach Formel (**43**) für das Gewicht P_L von L:

(3*) $$\begin{aligned} \frac{1}{P_L} = &\;(\alpha_1 l_1 + \beta_1 l_2 + \gamma_1 l_3 + \cdots)^2 \\ &+ (\alpha_2 l_1 + \beta_2 l_2 + \gamma_2 l_3 + \cdots)^2 \\ &+ (a_3 l_1 + \beta_3 l_2 + \gamma_3 l_3 + \cdots)^2 \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ (\alpha_n l_1 + \beta_n l_2 + \gamma_n l_3 + \cdots)^2, \end{aligned}$$

oder:

(4*) $$\begin{aligned} \frac{1}{P_L} = [\alpha\alpha]\, l_1 l_1 &+ 2\,[\alpha\beta]\, l_1 l_2 + 2\,[\alpha\gamma]\, l_1 l_3 + \cdots \\ &+ \quad [\beta\beta]\, l_2 l_2 + 2\,[\beta\gamma]\, l_2 l_3 + \cdots \\ &\qquad\qquad + \quad [\gamma\gamma]\, l_3 l_3 + \cdots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + \cdots, \end{aligned}$$

oder nach den Gleichungen (7*) des § 62:

(224) $$\begin{aligned} \frac{1}{P_L} = l_1 l_1 Q_{11} &+ 2 l_1 l_2 Q_{12} + 2 l_1 l_3 Q_{13} + \cdots \\ &+ \quad l_2 l_2 Q_{22} + 2 l_2 l_3 Q_{23} + \cdots \\ &\qquad\qquad + \quad l_3 l_3 Q_{33} + \cdots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + \cdots \end{aligned}$$

2. Führen wir noch die Hülfsgröfsen $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots.$ ein und setzen diese derart fest, dafs

(225)
$$\begin{cases}[paa]\,Q_1+[pab]\,Q_2+[pac]\,Q_3+\cdots\cdots=l_1,\\ [pab]\,Q_1+[pbb]\,Q_2+[pbc]\,Q_3+\cdots\cdots=l_2,\\ [pac]\,Q_1+[pbc]\,Q_2+[pcc]\,Q_3+\cdots\cdots=l_3,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

und damit nach (1*) und (7*) des § 62:

(5*)
$$\begin{cases}Q_1=l_1\,Q_{11}+l_2\,Q_{12}+l_3\,Q_{13}+\cdots\cdots,\\ Q_2=l_1\,Q_{12}+l_2\,Q_{22}+l_3\,Q_{23}+\cdots\cdots,\\ Q_3=l_1\,Q_{13}+l_2\,Q_{23}+l_3\,Q_{33}+\cdots\cdots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

wird, so wird:

(227a)
$$\frac{1}{P_L}=l_1\,Q_1+l_2\,Q_2+l_3\,Q_3+\cdots\cdots=[lQ].$$

Indem wir dann weiter die Bezeichnungen der Formeln (**120**a) einführen, jedoch für $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3, \ldots.$ die Differenzialquotienten $l_1, l_2, l_3, \ldots.$ nehmen, dann die Gröfsen $\mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2, \ldots.; \mathfrak{C}_3, \ldots.; \ldots.$ nach den Formeln (**120**b) und dazu:

(226)
$$\mathfrak{L}_2=l_2-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}l_1, \quad\Big|\quad \mathfrak{L}_3=l_3-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}l_1-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2, \quad\Big|\quad \ldots.$$

bilden, erhalten wir nach Formel (**127**) noch einen zweiten Ausdruck für $\frac{1}{P_L}$, nämlich:

(227b)
$$\frac{1}{P_L}=\frac{l_1}{\mathfrak{a}_1}l_1+\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2+\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3\ldots.$$

Hiernach folgt nach Formel (**35**) für den mittleren Fehler M_L von L:

(228)
$$M_L=\pm\,\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P_L}}.$$

3. Die Zahlenwerthe von $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots.$ und von $\frac{1}{P_L}$ können zweckmäfsig nach dem folgenden Schema (**229**) für die Auflösung der Gleichungen (**225**) berechnet werden, das dem Schema für die Auflösung der Endgleichungen (**118**) nachgebildet ist, mit Weglassung der Berechnung der Gröfsen $\mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2, \ldots.;$ $\mathfrak{C}_3, \ldots.; \ldots.$, deren Zahlenwerthe ebenso wie die der Gröfsen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \ldots.$ unverändert aus der Auflösung der Endgleichungen im Schema (**124**) zu übernehmen sind. Das Schema ist eingerichtet für den Fall, dafs $q=5$ Endgleichungen vorliegen; für jeden andern Fall kann es leicht vereinfacht oder erweitert werden.

(229)

l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	Gewicht P_L.	
	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}l_1$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}l_1$	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}l_1$	$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}l_1$	$+\frac{l_1}{\mathfrak{a}_1}l_1$	$+l_1Q_1$
$+\frac{l_1}{\mathfrak{a}_1}$	$=\mathfrak{L}_2$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	$+\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	$+l_2Q_2$
$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_5$	$+\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}$	$=\mathfrak{L}_3$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3$	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3$	$+\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3$	$+l_3Q_3$
$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_4$	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_5$	$+\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}$	$=\mathfrak{L}_4$	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{L}_4$	$+\frac{\mathfrak{L}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{L}_4$	$+l_4Q_4$
$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_3$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_4$	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_5$	$+\frac{\mathfrak{L}_4}{\mathfrak{D}_4}$	$=\mathfrak{L}_5$	$+\frac{\mathfrak{L}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{L}_5$	$+l_5Q_5$
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_2$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_3$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_4$	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}Q_5$	$+\frac{\mathfrak{L}_5}{\mathfrak{E}_5}$	$=\frac{1}{P_L}=$	
$=Q_1$	$=Q_2$	$=Q_3$	$=Q_4$	$=Q_5$		

§ 64. Beispiele zu dem in den §§ 62 und 63 entwickelten Verfahren.

Die entwickelten Formeln u. s. w. wollen wir jetzt auf die im IV. Abschnitte behandelten Beispiele anwenden, soweit dies von Interesse ist.

1. Zu § 31. Bogenschnitt gemessener Längen.

Zur Berechnung der Gewichte P_x, P_y und der mittleren Fehler M_x, M_y der wahrscheinlichsten Werthe x, y der Koordinaten des Punktes P haben wir:

$$(218a)\quad \begin{cases} \mathfrak{f}_1 = -1, \\ \mathfrak{F}_2 = +\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}, \\ Q_{12} = -\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}, \\ Q_{11} = -\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1} Q_{12} + \frac{1}{\mathfrak{a}_1}; \end{cases}$$

$$(218b)\quad \begin{cases} \mathfrak{F}_2 = -1, \\ Q_{22} = +\frac{1}{\mathfrak{B}_2}; \end{cases}$$

$$(220)\quad \begin{cases} \frac{1}{P_x} = Q_{11}, \\ \frac{1}{P_y} = Q_{22}; \end{cases}$$

$$(221)\quad \begin{cases} M_x = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P_x}}, \\ M_y = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P_y}}. \end{cases}$$

Die vier Formeln zur Berechnung von Q_{11} können zusammengefafst werden zu:

$$Q_{11} = +\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\frac{1}{\mathfrak{B}_2} + \frac{1}{\mathfrak{a}_1} = +\frac{1}{\mathfrak{B}_2}\frac{1}{\mathfrak{a}_1}\left(\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{B}_2\right)$$
$$= +\frac{1}{\mathfrak{B}_2}\frac{1}{\mathfrak{a}_1}\left(\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 - \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1\right) = +\frac{1}{\mathfrak{B}_2}\frac{\mathfrak{b}_2}{\mathfrak{a}_1},$$

so dafs wir für den Fall, dafs nur 2 zu bestimmende Gröfsen x, y vorliegen, die einfachen Formeln haben:

$$Q_{11} = +\frac{1}{\mathfrak{B}_2}\frac{\mathfrak{b}_2}{\mathfrak{a}_1}, \qquad Q_{22} = +\frac{1}{\mathfrak{B}_2}.$$

Hiernach gestaltet sich die Auflösung der Endgleichungen und die Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe x, y der Koordinaten, sowie der Gewichte P_x, P_y und der mittleren Fehler M_x, M_y in unserm Beispiele wie folgt:

$\mathfrak{a}_1$	+	15,17	$\mathfrak{b}_1$	+	0,62	$\mathfrak{f}_1$	−	3,40	$\mathfrak{b}_2$	+	11,82	$\mathfrak{f}_2$	−	3,02	Probe.		
			$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}$	−	0,041	$-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}$	+	0,224	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1$	−	0,03	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	+	0,14	$-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	−	0,762
						$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}d\mathfrak{y}$	−	0,010	$\mathfrak{B}_2$	+	11,79	$\mathfrak{F}_2$	−	2,88	$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	−	0,703
			$\frac{\mathfrak{b}_2}{\mathfrak{a}_1}$		0,78	$d\mathfrak{x}$	+	0,214				$d\mathfrak{y} = -\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$	+	0,244	Σ	−	1,465
$Q_{11} = \frac{1}{P_x} = \frac{\mathfrak{b}_2}{\mathfrak{a}_1}\frac{1}{\mathfrak{B}_2}$					0,0661	$Q_{22} = \frac{1}{P_y} = \frac{1}{\mathfrak{B}_2}$					0,0848				$\mathfrak{f}_1 d\mathfrak{x}$	−	0,728
			P_x		15,1				P_y		11,8				$\mathfrak{f}_2 d\mathfrak{y}$	−	0,737
															Σ	−	1,465

$x = \mathfrak{x} + d\mathfrak{x} = 6\,323{,}70 + 0{,}21 = 6\,323{,}91\,\mathrm{m}$, $\quad M_x = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P_x}} = \pm 0{,}49 \cdot 0{,}26 = \pm 0{,}13\,\mathrm{m}$,

$y = \mathfrak{y} + d\mathfrak{y} = 2\,306{,}00 + 0{,}24 = 2\,306{,}24\,\mathrm{m}$. $\quad M_y = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P_y}} = \pm 0{,}49 \cdot 0{,}29 = \pm 0{,}14\,\mathrm{m}$.

2. Zu § 32. Richtungsbestimmungen aus Winkelbeobachtungen.

1. Im § 32, Nr. 9 haben wir als allgemeine Form der Endgleichungen und als Faktoren der Endgleichungen erhalten:

$$(118)\quad \begin{cases} \nu p\, d\mathfrak{r}_1 = p(s_1 - \sigma_1), \\ \nu p\, d\mathfrak{r}_2 = p(s_2 - \sigma_2), \\ \nu p\, d\mathfrak{r}_3 = p(s_3 - \sigma_3), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

$$(120\text{a})\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_1 = +\nu p, & \mathfrak{b}_1 = 0, & \mathfrak{c}_1 = 0, \cdots\cdots, \\ & \mathfrak{b}_2 = +\nu p, & \mathfrak{c}_2 = 0, \cdots\cdots, \\ & & \mathfrak{c}_3 = +\nu p, \cdots, \\ & & \cdots; \end{cases}$$

$$(120\text{b})\quad \begin{cases} \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{b}_2 = +\nu p, & \mathfrak{C}_2 = 0, & \cdots\cdots, \\ & \mathfrak{C}_3 = \mathfrak{c}_3 = +\nu p, & \cdots\cdots, \\ & & \cdots\cdots \end{cases}$$

Hiermit ergiebt sich nach den Formeln (**218**)

$$(218\text{a})\quad \begin{cases} \mathfrak{f}_1 = -1, & \mathfrak{f}_2 = 0, & \mathfrak{f}_3 = 0, \cdots, \\ & \mathfrak{F}_2 = 0, & \mathfrak{F}_3 = 0, \cdots, \\ Q_{11} = \frac{1}{\nu p}, & Q_{12} = 0, & Q_{13} = 0, \cdots \end{cases}$$

$$(218\text{b})\quad \begin{cases} \mathfrak{f}_1 = 0, & \mathfrak{f}_2 = -1, & \mathfrak{f}_3 = 0, \cdots, \\ & \mathfrak{F}_2 = -1, & \mathfrak{F}_3 = 0, \cdots, \\ Q_{22} = \frac{1}{\nu p}, & Q_{23} = 0, \cdots, \end{cases}$$

$$(218\text{c})\quad \begin{cases} \mathfrak{f}_1 = 0, & \mathfrak{f}_2 = 0, & \mathfrak{f}_3 = -1, \ldots, \\ & \mathfrak{F}_2 = 0, & \mathfrak{F}_3 = -1, \ldots, \\ Q_{33} = \frac{1}{\nu p}, \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Hiernach ist $Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = \cdots = \frac{1}{\nu p}$, ferner das für alle ausgeglichenen Richtungen gleiche Gewicht P nach Formel (**220**):

$$P = \nu p,$$

und der ebenfalls für alle Richtungen gleiche mittlere Fehler M nach Formel (**221**):

$$M = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{\nu p}}.$$

In unserm Beispiele sind zur Bestimmung von $\nu = 4$ Richtungen die Winkel derart beobachtet worden, dafs das Gewicht der Beobachtungergebnisse $p = 6$ ist. Somit ist das Gewicht der ausgeglichenen Richtungen

$$P = \nu p = 4 \cdot 6 = 24$$

und ihr mittlerer Fehler

$$M = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{\nu p}} = \pm 1{,}03 \sqrt{\frac{1}{24}} = \pm 0{,}21''.$$

2. Der wahrscheinlichste Werth $W_{n \cdot m}$ eines Winkels wird aus den ausgeglichenen Richtungen R_n und R_m erhalten nach:

$$W_{n \cdot m} = -R_n + R_m.$$

Somit ist nach Formel (**223**):

$$l_n = \frac{\partial W_{n \cdot m}}{\partial R_n} = -1, \qquad l_m = \frac{\partial W_{n \cdot m}}{\partial R_m} = +1,$$

sodann, da nach Nr. 1: $Q_{nn} = Q_{mm} = \frac{1}{\nu p}$, $Q_{nm} = 0$ ist, nach Formel (**224**):

$$\frac{1}{P_W} = \frac{1}{\nu p} + \frac{1}{\nu p} = \frac{2}{\nu p} \text{ oder } P_W = \frac{1}{2} \nu p,$$

ferner nach Formel (**228**):

$$M_W = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{P_W}} = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{2}{\nu p}},$$

wonach in unserm Beispiele das Gewicht der wahrscheinlichsten Werthe W der Winkel

$$P_W = \frac{1}{2} \nu p = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12,$$

und ihr mittlerer Fehler:

$$M_W = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{2}{\nu p}} = \pm 1{,}03 \sqrt{\frac{1}{12}} = \pm 0{,}30''$$

ist.

3. Zu § 33. Richtungsbestimmungen aus Richtungssätzen.

1. Verfahren.

Im § 33 haben wir zur Bestimmung der Richtungsänderungen $d\mathfrak{r}_1, d\mathfrak{r}_2, \ldots d\mathfrak{r}_6$ unter Nr. 14 die Endgleichungen

$$\begin{array}{ll|ll} 3\,d\mathfrak{r}_1 - d\mathfrak{o}^{III} = 0, & & 3\,d\mathfrak{r}_4 - d\mathfrak{o}^{I} = 0, \\ 3\,d\mathfrak{r}_2 - d\mathfrak{o}^{I} = 0, & & 3\,d\mathfrak{r}_5 - d\mathfrak{o}^{IV} = 0, \\ 3\,d\mathfrak{r}_3 - d\mathfrak{o}^{IV} = 0, & & 3\,d\mathfrak{r}_6 - d\mathfrak{o}^{II} = 0, \end{array}$$

und zur Bestimmung der Aenderungen $d\mathfrak{o}^I$, $d\mathfrak{o}^{II}$, $d\mathfrak{o}^{III}$, $d\mathfrak{o}^{IV}$ der Orientirungswinkel unter Nr. 13 die Endgleichungen

$$\begin{array}{ccccc} +\frac{11}{3} d\mathfrak{o}^I & . & . & +\frac{1}{3} d\mathfrak{o}^{IV} & -45{,}7 = 0, \\ . & +\frac{13}{3} d\mathfrak{o}^{II} & -\frac{1}{3} d\mathfrak{o}^{III} & . & +47{,}3 = 0, \\ . & -\frac{1}{3} d\mathfrak{o}^{II} & +\frac{13}{3} d\mathfrak{o}^{III} & . & +22{,}6 = 0, \\ +\frac{1}{3} d\mathfrak{o}^I & . & . & +\frac{11}{3} d\mathfrak{o}^{IV} & -24{,}3 = 0. \end{array}$$

Von den diesen Endgleichungen entsprechenden reduzirten Endgleichungen (**122**) stimmen die ersten acht überein mit den angeführten Gleichungen und die beiden letzten sind

$$+4{,}30\, d\mathfrak{o}^{III} + 26{,}2 = 0,$$
$$+3{,}64\, d\mathfrak{o}^{IV} - 20{,}2 = 0.$$

Demnach sind die Faktoren der reduzirten Endgleichungen mit den Bezeichnungen der Formeln (**120** a) und (**120** b):

$\mathfrak{a}_1 = +3,$	$\mathfrak{b}_1 = 0,$	$\mathfrak{c}_1 = 0,$	$\mathfrak{d}_1 = 0,$	$\mathfrak{e}_1 = 0,$	$\mathfrak{g}_1 = 0,$	$\mathfrak{h}_1 = 0,$	$\mathfrak{i}_1 = 0,$	$\mathfrak{k}_1 = -1,$	$\mathfrak{l}_1 = 0,$
	$\mathfrak{B}_2 = +3,$	$\mathfrak{C}_2 = 0,$	$\mathfrak{D}_2 = 0,$	$\mathfrak{E}_2 = 0,$	$\mathfrak{G}_2 = 0,$	$\mathfrak{H}_2 = -1,$	$\mathfrak{J}_2 = 0,$	$\mathfrak{K}_2 = 0,$	$\mathfrak{L}_2 = 0,$
		$\mathfrak{C}_3 = +3,$	$\mathfrak{D}_3 = 0,$	$\mathfrak{E}_3 = 0,$	$\mathfrak{G}_3 = 0,$	$\mathfrak{H}_3 = 0,$	$\mathfrak{J}_3 = 0,$	$\mathfrak{K}_3 = 0,$	$\mathfrak{L}_3 = -1,$
			$\mathfrak{D}_4 = +3,$	$\mathfrak{E}_4 = 0,$	$\mathfrak{G}_4 = 0,$	$\mathfrak{H}_4 = -1,$	$\mathfrak{J}_4 = 0,$	$\mathfrak{K}_4 = 0,$	$\mathfrak{L}_4 = 0,$
				$\mathfrak{E}_5 = +3,$	$\mathfrak{G}_5 = 0,$	$\mathfrak{H}_5 = 0,$	$\mathfrak{J}_5 = 0,$	$\mathfrak{K}_5 = 0,$	$\mathfrak{L}_5 = -1,$
					$\mathfrak{G}_6 = +3,$	$\mathfrak{H}_6 = 0,$	$\mathfrak{J}_6 = -1,$	$\mathfrak{K}_6 = 0,$	$\mathfrak{L}_6 = 0,$
						$\mathfrak{H}_7 = +3{,}67,$	$\mathfrak{J}_7 = 0,$	$\mathfrak{K}_7 = 0,$	$\mathfrak{L}_7 = +0{,}33,$
							$\mathfrak{J}_8 = +4{,}33,$	$\mathfrak{K}_8 = -0{,}33,$	$\mathfrak{L}_8 = 0,$
								$\mathfrak{K}_9 = +4{,}30,$	$\mathfrak{L}_9 = 0,$
									$\mathfrak{L}_{10} = +3{,}64.$

Damit ergeben sich die Gewichtskoeffizienten $Q_{11}, Q_{22}, \ldots Q_{66}$ nach den Formeln (**218**) wie folgt:

$$\mathfrak{f}_1 = -1,\ \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_4 = \mathfrak{F}_5 = \mathfrak{F}_6 = \mathfrak{F}_7 = \mathfrak{F}_8 = 0,\ \mathfrak{F}_9 = -\frac{\mathfrak{k}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 = -\frac{1}{3},\ \mathfrak{F}_{10} = 0,$$

$$Q_{11} = \frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 + \frac{\mathfrak{F}_9}{\mathfrak{K}_9}\mathfrak{F}_9 = \frac{1}{3} + \frac{0{,}33}{4{,}30}0{,}33 = 0{,}36;$$

$$\mathfrak{F}_2 = -1,\ \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_4 = \mathfrak{F}_5 = \mathfrak{F}_6 = 0,\ \mathfrak{F}_7 = -\frac{\mathfrak{H}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 = -\frac{1}{3},\ \mathfrak{F}_8 = \mathfrak{F}_9 = 0,$$

$$\mathfrak{F}_{10} = -\frac{\mathfrak{L}_7}{\mathfrak{H}_7}\mathfrak{F}_7 = +0{,}03,$$

$$Q_{22} = \frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 + \frac{\mathfrak{F}_7}{\mathfrak{H}_7}\mathfrak{F}_7 + \frac{\mathfrak{F}_{10}}{\mathfrak{L}_{10}}\mathfrak{F}_{10} = \frac{1}{3} + \frac{0{,}33}{3{,}67}0{,}33 + \frac{0{,}03}{3{,}64}0{,}03 = 0{,}36;$$

$$\mathfrak{F}_3 = -1,\ \mathfrak{F}_4 = \mathfrak{F}_5 = \mathfrak{F}_6 = \mathfrak{F}_7 = \mathfrak{F}_8 = \mathfrak{F}_9 = 0,\ \mathfrak{F}_{10} = -\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3 = -\frac{1}{3},$$

$$Q_{33} = \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3 + \frac{\mathfrak{F}_{10}}{\mathfrak{L}_{10}}\mathfrak{F}_{10} = \frac{1}{3} + \frac{0{,}33}{3{,}64}0{,}33 = 0{,}36;$$

$$\mathfrak{F}_4 = -1,\ \mathfrak{F}_5 = \mathfrak{F}_6 = 0,\ \mathfrak{F}_7 = -\frac{\mathfrak{H}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4 = -\frac{1}{3},\ \mathfrak{F}_8 = \mathfrak{F}_9 = 0,\ \mathfrak{F}_{10} = \frac{\mathfrak{L}_7}{\mathfrak{H}_7}\mathfrak{F}_7 = +0{,}03,$$

$$Q_{44} = \frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4 + \frac{\mathfrak{F}_7}{\mathfrak{H}_7}\mathfrak{F}_7 + \frac{\mathfrak{F}_{10}}{\mathfrak{L}_{10}}\mathfrak{F}_{10} = \frac{1}{3} + \frac{0{,}33}{3{,}67}0{,}33 + \frac{0{,}03}{3{,}64}0{,}03 = 0{,}36;$$

$$\mathfrak{F}_5 = -1,\ \mathfrak{F}_6 = \mathfrak{F}_7 = \mathfrak{F}_8 = \mathfrak{F}_9 = 0,\ \mathfrak{F}_{10} = -\frac{\mathfrak{L}_5}{\mathfrak{C}_5}\mathfrak{F}_5 = -0{,}33,$$

$$Q_{55} = \frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{C}_5}\mathfrak{F}_5 + \frac{\mathfrak{F}_{10}}{\mathfrak{L}_{10}}\mathfrak{F}_{10} = \frac{1}{3} + \frac{0{,}33}{3{,}64}0{,}33 = 0{,}36;$$

Auflösung der

$\mathfrak{a}_1$	+ 111	$\mathfrak{b}_1$	− 9	$\mathfrak{c}_1$	− 9	$\mathfrak{d}_1$	+ 3			$\mathfrak{b}_2$	+ 103	$\mathfrak{c}_2$
		$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}$	+0,081	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}$	+0,081	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}$	−0,027			$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1$	− 1	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1$
										$\mathfrak{B}_2$	+ 102	$\mathfrak{C}_2$
												$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}$

Berechnung der

$\mathfrak{f}_1$	− 24	$\mathfrak{f}_2$	0,00	$\mathfrak{f}_3$	0,00	$\mathfrak{f}_4$	0,00	Probe.		$\mathfrak{f}_2$	− 24	$\mathfrak{f}_2$
		$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	−1,94	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	−1,94	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	+0,65	$+\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	+5,18	$\mathfrak{F}_2$	− 24	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$
$-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}$	+0,216	$\mathfrak{F}_2$	−1,94	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	+0,11	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	−0,10	$+\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	+0,04	$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$	+0,235	$\mathfrak{F}_3$
$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_{14}$	0,000	$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$	+0,019	$\mathfrak{F}_3$	−1,83	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	−0,09	$+\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	+0,03	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{24}$	+0,001	$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}$
$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_{13}$	+0,001	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{14}$	0,000	$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}$	+0,018	$\mathfrak{F}_4$	+0,46	$+\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	+0,00	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{23}$	+0,001	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_{34}$
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_{12}$	+0,001	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{13}$	−0,001	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_{14}$	0,000	$-\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}$		$24\,Q_{11}$	+5,25	Q_{22}	+0,237	Q_{23}
Q_{11}	+0,218	Q_{12}	+0,018	Q_{13}	+0,018	$= Q_{14}$	−0,004	Q_{11}	⋮ 0,219			

$$\mathfrak{F}_6 = -1,\ \mathfrak{F}_7 = 0,\ \mathfrak{F}_8 = -\frac{\mathfrak{J}_6}{\mathfrak{K}_6}\mathfrak{F}_6 = -\frac{1}{3},\ \mathfrak{F}_9 = -\frac{\mathfrak{K}_8}{\mathfrak{J}_8}\mathfrak{F}_8 = -0{,}03,\ \mathfrak{F}_{10} = 0,$$

$$Q_{66} = \frac{\mathfrak{F}_6}{\mathfrak{G}_6}\mathfrak{F}_6 + \frac{\mathfrak{F}_8}{\mathfrak{J}_8}\mathfrak{F}_8 + \frac{\mathfrak{F}_9}{\mathfrak{K}_9}\mathfrak{F}_9 = \frac{1}{3} + \frac{0{,}33}{4{,}33}\,0{,}33 + \frac{0{,}03}{4{,}30}\,0{,}03 = 0{,}36.$$

Hiernach sind die Gewichte P_1, P_2, ... P_6 und die mittleren Fehler M_1, M_2, ... M_6 der wahrscheinlichsten Werthe R_1, R_2, ... R_6 der Richtungen sämtlich:

(220) $P = \frac{1}{Q} = \frac{1}{0{,}36} = 2{,}8,$ | **(221)** $M = \pm m\sqrt{Q} = \pm 13{,}0 \cdot 0{,}6 = \pm 7{,}8''.$

Wenn in allen Sätzen alle Richtungen vorkommen, wird $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{C}_3 = \cdots = n$ und werden alle übrigen Faktoren der reduzirten Endgleichungen $= 0$, so dafs dann $P = n$ wird.*)

4. Zu § 34. Richtungsbestimmungen aus Richtungssätzen. 2. Verfahren.

In dem im § 34 behandelten Beispiele sind die wahrscheinlichsten Werthe R_1, R_2, R_3, R_4 der Richtungen, deren Gewichte P_1, P_2, P_3, P_4 und mittleren Fehler M_1, M_2, M_3, M_4 uns allein interessiren, vollständig bestimmt durch die aus den reduzirten Fehlergleichungen abgeleiteten Endgleichungen. Wir können defshalb auch die Gewichtsberechnung ohne weiteres an die Auflösung dieser Endgleichungen anschliefsen. Da wir sämtliche Endgleichungen mit 24 multiplizirt haben, müssen wir in der Gewichtsberechnung auch die Werthe $\mathfrak{f} = -1$ mit 24 multiplizirt ansetzen und in den Proben erhalten wir als Summe den 24fachen Betrag der Koeffizienten Q_{11}, Q_{22}, Q_{33}, ... Hiernach gestaltet sich die Gewichtsberechnung, der wir die Auflösung der Endgleichungen nach § 34, so weit es der bessern Uebersicht wegen nöthig ist, voranstellen, wie folgt:

Endgleichungen.

+ 7	$\mathfrak{b}_2$	− 5			$\mathfrak{c}_3$	+ 103	$\mathfrak{b}_3$	− 5			$\mathfrak{b}_4$	+ 103
− 1	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1$	0			$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1$	− 1	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1$	0			$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1$	0
+ 6	$\mathfrak{D}_2$	− 5			$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{C}_2$	0	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{D}_2$	0			$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{D}_2$	0
−0,059	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}$	+0,049			$\mathfrak{C}_3$	+ 102	$\mathfrak{D}_3$	− 5			$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{D}_3$	0
							$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}$	+0,049			$\mathfrak{D}_4$	+ 103

Gewichtskoeffizienten Q.

0	$\mathfrak{f}_4$	0	Probe.		$\mathfrak{f}_3$	− 24	$\mathfrak{f}_4$	0	Probe.		$\mathfrak{f}_4$	− 24
+1,42	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	−1,18	$+\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	+5,64	$\mathfrak{F}_3$	− 24	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	−1,18	$+\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	+5,64	$\mathfrak{F}_4$	− 24
+1,42	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	+0,07	$+\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	+0,02	$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}$	+0,235	$\mathfrak{F}_4$	−1,18	$+\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	+0,01	$-\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}$	
−0,014	$\mathfrak{F}_4$	−1,11	$+\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	+0,01	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_{34}$	+0,001	$-\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}$		$24\,Q_{33}$	+5,65	$= Q_{44}$	+0,233
+0,001	$-\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}$		$24\,Q_{22}$	+5,67	Q_{33}	+0,236	$= Q_{34}$	+0,011	Q_{33}	+0,235		
−0,013	$= Q_{24}$	+0,011	Q_{22}	+0,236								

*) Es liegt dann auch der im § 61, Nr. 10, Seite 285, bezeichnete Fall vor.

Mit den für Q_{11}, Q_{22}, Q_{33}, Q_{44} erhaltenen Zahlenwerthen wird:

$$
(220)\left\{\begin{aligned}
P_1 &= \frac{1}{Q_{11}} = \frac{1}{0{,}218} = 4{,}6, \\
P_2 &= \frac{1}{Q_{22}} = \frac{1}{0{,}237} = 4{,}2, \\
P_3 &= \frac{1}{Q_{33}} = \frac{1}{0{,}236} = 4{,}2, \\
P_4 &= \frac{1}{Q_{44}} = \frac{1}{0{,}233} = 4{,}3,
\end{aligned}\right.
\qquad
(221)\left\{\begin{aligned}
M_1 &= \pm \mathfrak{m}\sqrt{Q_{11}} = \pm 12{,}5 \cdot 0{,}47 = \pm 5{,}9'', \\
M_2 &= \pm \mathfrak{m}\sqrt{Q_{22}} = \pm 12{,}5 \cdot 0{,}49 = \pm 6{,}1\ , \\
M_3 &= \pm \mathfrak{m}\sqrt{Q_{33}} = \pm 12{,}5 \cdot 0{,}49 = \pm 6{,}1\ , \\
M_4 &= \pm \mathfrak{m}\sqrt{Q_{44}} = \pm 12{,}5 \cdot 0{,}48 = \pm 6{,}0\ .
\end{aligned}\right.
$$

Das Gewicht einer einmaligen Beobachtung einer Richtung in beiden Fernrohrlagen, das gewöhnlich gleich Eins genommen wird, ist im vorliegenden Beispiele nach § 34 gleich 0,5 genommen. Um die Gewichte P_1, P_2, P_3, P_4 daher auf die gebräuchliche Gewichtseinheit zu beziehen, müssen die für diese Gewichte erhaltenen Zahlenwerthe noch mit 2 multiplizirt werden, womit sich für die wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen R_1, R_2, R_3, R_4 die Gewichte 9,2, 8,4, 8,4, 8,6 ergeben.

5. Zu § 35. Bestimmung der Hauptpunkte eines Polygonnetzes.

Die zur Berechnung der Gewichte P_2, P_3, ... P_7 und der mittleren Fehler M_2, M_3, ... M_7 der wahrscheinlichsten Werthe H_2, H_3, ... H_7 der Höhen der Hauptpunkte 2, 3, ... 7 des Nivellementsnetzes zu benutzenden Faktoren der reduzirten Endgleichungen und die zu benutzenden aus solchen gebildeten Quotienten sind nach § 35, Nr. 10:

$$
\mathfrak{a}_1 = +1{,}90. \quad\Big|\quad -\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1} = +0{,}34, \quad \mathfrak{B}_2 = +2{,}50, \quad\Big|\quad -\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1} = 0, \quad -\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2} = +0{,}39, \quad \mathfrak{C}_3 = +2{,}74,
$$

$$
\Big|\quad -\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1} = 0, \quad -\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2} = 0, \quad -\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3} = 0, \quad \mathfrak{D}_4 = +1{,}76,
$$

$$
\Big|\quad -\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1} = 0, \quad -\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2} = 0, \quad -\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3} = 0, \quad -\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4} = +0{,}40, \quad \mathfrak{E}_5 = +1{,}34,
$$

$$
\Big|\quad -\frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{a}_1} = 0, \quad -\frac{\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{B}_2} = +0{,}44, \quad -\frac{\mathfrak{G}_3}{\mathfrak{C}_3} = +0{,}16, \quad -\frac{\mathfrak{G}_4}{\mathfrak{D}_4} = 0, \quad -\frac{\mathfrak{G}_5}{\mathfrak{E}_5} = +0{,}69, \quad \mathfrak{G}_6 = +0{,}84.
$$

Damit ergeben sich die Gewichtskoeffizienten Q_{11}, Q_{22}, ... Q_{66} wie folgt:

$\mathfrak{f}_1$	-1	$\mathfrak{f}_2$	.	$\mathfrak{f}_3$	.	$\mathfrak{f}_4$	.	$\mathfrak{f}_5$	.	$\mathfrak{f}_6$	.	Probe.	
		$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	$-0{,}34$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	.	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	.	$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	.	$-\frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	.	$+\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	$+0{,}53$
$-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}$	$+0{,}53$	$\mathfrak{F}_2$	$-0{,}34$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	$-0{,}13$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	.	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	.	$-\frac{\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	$-0{,}15$	$+\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	$+0{,}05$
$-\frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_{16}$	.	$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$	$+0{,}14$	$\mathfrak{F}_3$	$-0{,}13$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	.	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	.	$-\frac{\mathfrak{G}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	$-0{,}02$	$+\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	$+0{,}01$
$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_{15}$	.	$-\frac{\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{16}$	$+0{,}09$	$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}$	$+0{,}05$	$\mathfrak{F}_4$	.	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_1}\mathfrak{F}_4$	.	$-\frac{\mathfrak{G}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	.	$+\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	.
$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_{14}$	.	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{15}$	.	$-\frac{\mathfrak{G}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_{16}$	$+0{,}03$	$-\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}$	.	$\mathfrak{F}_5$	.	$-\frac{\mathfrak{G}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{F}_5$	.	$+\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{F}_5$	.
$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_{13}$	.	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{14}$	.	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_{15}$	.	$-\frac{\mathfrak{G}_4}{\mathfrak{D}_4}Q_{16}$	.	$-\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}$	.	$\mathfrak{F}_6$	$-0{,}17$	$+\frac{\mathfrak{F}_6}{\mathfrak{G}_6}\mathfrak{F}_6$	$+0{,}03$
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_{12}$	$+0{,}08$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{13}$	$+0{,}03$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_{14}$	.	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}Q_{15}$	$+0{,}06$	$-\frac{\mathfrak{G}_5}{\mathfrak{E}_5}Q_{16}$	$+0{,}14$	$-\frac{\mathfrak{F}_6}{\mathfrak{G}_6}$			
Q_{11}	$+0{,}61$	Q_{12}	$+0{,}26$	Q_{13}	$+0{,}08$	Q_{14}	$+0{,}06$	Q_{15}	$+0{,}14$	$=Q_{16}$	$+0{,}20$	Q_{11}	$+0{,}62$

$\mathfrak{f}_2$	-1	$\mathfrak{f}_3$	·	$\mathfrak{f}_4$	·	$\mathfrak{f}_5$	·	$\mathfrak{f}_6$	·	Probe.	
$\mathfrak{F}_2$	-1	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	$-0{,}39$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	·	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	·	$-\frac{\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	$-0{,}44$	$+\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	$+0{,}40$
$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$	$+0{,}40$	$\mathfrak{F}_3$	$-0{,}39$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	·	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	·	$-\frac{\mathfrak{G}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	$-0{,}06$	$+\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	$+0{,}05$
$-\frac{\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{26}$	$+0{,}26$	$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}$	$+0{,}14$	$\mathfrak{F}_4$	·	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	·	$-\frac{\mathfrak{G}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	·	$+\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	·
$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{25}$	·	$-\frac{\mathfrak{G}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_{26}$	$+0{,}10$	$-\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}$	·	$\mathfrak{F}_5$	·	$-\frac{\mathfrak{G}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{F}_5$	·	$+\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{F}_5$	·
$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{24}$	·	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_{25}$	·	$-\frac{\mathfrak{G}_4}{\mathfrak{D}_4}Q_{26}$	·	$-\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}$	·	$\mathfrak{F}_6$	$-0{,}50$	$+\frac{\mathfrak{F}_6}{\mathfrak{G}_6}\mathfrak{F}_6$	$+0{,}30$
$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{23}$	$+0{,}09$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_{24}$	·	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}Q_{25}$	$+0{,}16$	$-\frac{\mathfrak{G}_5}{\mathfrak{E}_5}Q_{26}$	$+0{,}41$	$-\frac{\mathfrak{F}_6}{\mathfrak{G}_6}$			
Q_{22}	$+0{,}75$	Q_{23}	$+0{,}24$	Q_{24}	$+0{,}16$	Q_{25}	$+0{,}41$	$=Q_{26}$	$+0{,}60$	Q_{22}	$+0{,}75$

$\mathfrak{f}_3$	-1	$\mathfrak{f}_4$	·	$\mathfrak{f}_5$	·	$\mathfrak{f}_6$	·	Probe.	
$\mathfrak{F}_3$	-1	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	·	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	·	$-\frac{\mathfrak{G}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	$-0{,}16$	$+\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	$+0{,}36$
$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}$	$+0{,}36$	$\mathfrak{F}_4$	·	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	·	$-\frac{\mathfrak{G}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	·	$+\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	·
$-\frac{\mathfrak{G}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_{36}$	$+0{,}03$	$-\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}$	·	$\mathfrak{F}_5$	·	$-\frac{\mathfrak{G}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{F}_5$	·	$+\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{F}_5$	·
$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_{35}$	·	$-\frac{\mathfrak{G}_4}{\mathfrak{D}_4}Q_{36}$	·	$-\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}$	·	$\mathfrak{F}_6$	$-0{,}16$	$+\frac{\mathfrak{F}_6}{\mathfrak{G}_6}\mathfrak{F}_6$	$+0{,}03$
$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_{34}$	·	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}Q_{35}$	$+0{,}05$	$-\frac{\mathfrak{G}_5}{\mathfrak{E}_5}Q_{36}$	$+0{,}13$	$-\frac{\mathfrak{F}_6}{\mathfrak{G}_6}$			
Q_{33}	$+0{,}39$	Q_{34}	$+0{,}05$	Q_{35}	$+0{,}13$	$=Q_{36}$	$+0{,}19$	Q_{33}	$+0{,}39$

$\mathfrak{f}_4$	-1	$\mathfrak{f}_5$	·	$\mathfrak{f}_6$	·	Probe.	
$\mathfrak{F}_4$	-1	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	$-0{,}40$	$-\frac{\mathfrak{G}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	·	$+\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	$+0{,}57$
$-\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}$	$+0{,}57$	$\mathfrak{F}_5$	$-0{,}40$	$-\frac{\mathfrak{G}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{F}_5$	$-0{,}28$	$+\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{F}_5$	$+0{,}12$
$-\frac{\mathfrak{G}_4}{\mathfrak{D}_4}Q_{46}$	·	$-\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}$	$+0{,}30$	$\mathfrak{F}_6$	$-0{,}28$	$+\frac{\mathfrak{F}_6}{\mathfrak{G}_6}\mathfrak{F}_6$	$+0{,}09$
$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}Q_{45}$	$+0{,}21$	$-\frac{\mathfrak{G}_5}{\mathfrak{E}_5}Q_{46}$	$+0{,}23$	$-\frac{\mathfrak{F}_6}{\mathfrak{G}_6}$			
Q_{44}	$+0{,}78$	Q_{45}	$+0{,}53$	$=Q_{46}$	$+0{,}33$	Q_{44}	$+0{,}78$

$\mathfrak{f}_5$	-1	$\mathfrak{f}_6$	·	Probe.	
$\mathfrak{F}_5$	-1	$-\frac{\mathfrak{G}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{F}_5$	$-0{,}69$	$+\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{F}_5$	$+0{,}75$
$-\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}$	$+0{,}75$	$\mathfrak{F}_6$	$-0{,}69$	$+\frac{\mathfrak{F}_6}{\mathfrak{G}_6}\mathfrak{F}_6$	$+0{,}57$
$-\frac{\mathfrak{G}_5}{\mathfrak{E}_5}Q_{56}$	$+0{,}57$	$-\frac{\mathfrak{F}_6}{\mathfrak{G}_6}$			
Q_{55}	$+1.32$	$=Q_{56}$	$+0{,}82$	Q_{55}	$+1{,}32$
$\mathfrak{F}_6$	-1			$Q_{66}=-\frac{\mathfrak{F}_6}{\mathfrak{G}_6}$	$1{,}19$

Hiernach wird:

$$(220)\quad \begin{cases} P_2=\frac{1}{Q_{11}}=\frac{1}{0{,}61}=1{,}64, & P_3=\frac{1}{Q_{22}}=\frac{1}{0{,}75}=1{,}33, & P_4=\frac{1}{Q_{33}}=\frac{1}{0{,}39}=2{,}56, \\ P_5=\frac{1}{Q_{44}}=\frac{1}{0{,}78}=1{,}28, & P_6=\frac{1}{Q_{55}}=\frac{1}{1{,}32}=0{,}76, & P_7=\frac{1}{Q_{66}}=\frac{1}{1{,}19}=0{,}84; \end{cases}$$

$$(221)\quad \begin{cases} M_2=\pm\mathfrak{m}\sqrt{Q_{11}}=\pm 3{,}7\cdot 0{,}78=\pm 2{,}9^{\text{mm}}, & M_5=\pm\mathfrak{m}\sqrt{Q_{44}}=\pm 3{,}7\cdot 0{,}88=\pm 3{,}3^{\text{mm}}, \\ M_3=\pm\mathfrak{m}\sqrt{Q_{22}}=\pm 3{,}7\cdot 0{,}87=\pm 3{,}2^{\text{mm}}, & M_6=\pm\mathfrak{m}\sqrt{Q_{55}}=\pm 3{,}7\cdot 1{,}15=\pm 4{,}3^{\text{mm}}, \\ M_4=\pm\mathfrak{m}\sqrt{Q_{33}}=\pm 3{,}7\cdot 0{,}62=\pm 2{,}3^{\text{mm}}, & M_7=\pm\mathfrak{m}\sqrt{Q_{66}}=\pm 3{,}7\cdot 1{,}09=\pm 4{,}0^{\text{mm}}. \end{cases}$$

Die Gewichte sind nach § 35 in unsrer Rechnung derart angesetzt, daſs das Gewicht eines einmaligen Nivellements einer Strecke von 1 Kilometer Länge mit

Zielweiten von 50 Meter $\mathfrak{p}_{1\,\mathrm{km}} = 0{,}25$ ist. Daher müssen wir die erhaltenen Zahlenwerthe der Gewichte $P_2, P_3, \ldots\ldots P_6$ mit 4 multipliziren, um sie auf die gebräuchliche Gewichtseinheit zu beziehen, womit wir 6,6, 5,3, 10,2, 5,1, 3,0, 3,4 als Gewichte der wahrscheinlichsten Werthe $H_2, H_3, \ldots\ldots H_7$ der Höhen der Punkte 2, 3, ... 7 erhalten.

6. Zu § 36. Rückwärtseinschneiden.

1. Zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe x, y, o der Koordinaten des Punktes P und des Orientirungswinkels haben wir nach § 36, Nr. 5 und 7 die reduzirten Endgleichungen:

$$\begin{aligned} +4\,do + 68{,}5\,d\mathfrak{x} + 130{,}3\,d\mathfrak{y} - 79 &= 0, \\ +30\,196\,d\mathfrak{x} - 1\,720\,d\mathfrak{y} - 4\,507 &= 0, \\ +20\,002\,d\mathfrak{y} - 5\,480 &= 0, \end{aligned}$$

wonach die bei Berechnung der Gewichtskoeffizienten Q zu benutzenden Faktoren der Endgleichungen und die sich aus diesen ergebenden Quotienten sind:

$\mathfrak{a}_1 = +4,$	$\mathfrak{b}_1 = +\ 68{,}5,$	$\mathfrak{c}_1 = +\ 130{,}3,$	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1} = -17{,}1,$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1} = -\ 32{,}6,$
	$\mathfrak{B}_2 = +30\,196,$	$\mathfrak{C}_2 = -\ 1\,720,$		$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2} = +0{,}057.$
		$\mathfrak{C}_3 = +20\,002,$		

Hiermit ergeben sich die Gewichtskoeffizienten Q_{11}, Q_{22}, Q_{33} wie folgt:

$\mathfrak{f}_1$	-1	$\mathfrak{f}_2$	0,0	$\mathfrak{f}_3$	0,0	Probe.	
		$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	+17,1	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	+32,6	$+\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	+0,25
$-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}$	+0,25	$\mathfrak{F}_2$	+17,1	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	+ 1,0	$+\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	+0,01
$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_{13}$	+0,05	$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$	−0,000 57	$\mathfrak{F}_3$	+33,6	$+\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	+0,06
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_{12}$	+0,01	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{13}$	−0,000 10	$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}$			
Q_{11}	+0,31	Q_{12}	−0,000 67	$= Q_{13}$	−0,001 68	Q_{11}	+0,32
$\mathfrak{f}_2 =$	-1	$\mathfrak{f}_3$	0,000			$\mathfrak{f}_3$	-1
$\mathfrak{F}_2$	-1	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	−0,057			$\mathfrak{F}_3$	-1
$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$	+0,000 033	$\mathfrak{F}_3$	−0,057		$Q_{33} =$	$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}$	+0,000 050
$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{23}$	+0,000 000	$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}$					
Q_{22}	+0,000 033	$= Q_{23}$	+0,000 003				

Die Gewichte und mittleren Fehler P_o, M_o des wahrscheinlichsten Werthes o des Orientirungswinkels und P_x, P_y, M_x, M_y der wahrscheinlichsten Werthe x, y der Koordinaten des Punktes P ergeben sich hiernach zu:

$$(220)\quad \begin{cases} P_o = \frac{1}{Q_{11}} = \frac{1}{0{,}31} = 3{,}2, \\ P_x = \frac{1}{Q_{22}} = \frac{1}{0{,}000\,033} = 30\,300, \\ P_y = \frac{1}{Q_{33}} = \frac{1}{0{,}000\,050} = 20\,000; \end{cases}$$

$$(221)\quad \begin{cases} M_o = \pm \mathfrak{m}\sqrt{Q_{11}} = \pm 8{,}1 \cdot 0{,}56 = \pm 4{,}5'', \\ M_x = \pm \mathfrak{m}\sqrt{Q_{22}} = \pm 8{,}1 \cdot 0{,}00\,57 = \pm 0{,}046^{\mathrm{m}} = \pm 4{,}6^{\mathrm{cm}}, \\ M_y = \pm \mathfrak{m}\sqrt{Q_{33}} = \pm 8{,}1 \cdot 0{,}00\,71 = \pm 0{,}058^{\mathrm{m}} = \pm 5{,}8^{\mathrm{cm}}, \end{cases}$$

2. Indem wir die im § 36, Nr. 3 und 5 entwickelten Gleichungen (**113**) und (**116**) zusammenfassen und in den sich ergebenden Gleichungen für a_n und b_n ihre Zahlenwerthe nach § 36, Nr. 7 setzen, erhalten wir für die wahrscheinlichsten Werthe R_1, R_2, R_3, R_4 der Richtungen:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \mathfrak{r}_1 - d\mathfrak{o} + 122{,}3\, d\mathfrak{x} - 63{,}1\, d\mathfrak{y}, \\
R_2 &= \mathfrak{r}_2 - d\mathfrak{o} - 18{,}5\, d\mathfrak{x} + 74{,}2\, d\mathfrak{y}, \\
R_3 &= \mathfrak{r}_3 - d\mathfrak{o} - 112{,}5\, d\mathfrak{x} - 21{,}8\, d\mathfrak{y}, \\
R_4 &= \mathfrak{r}_4 - d\mathfrak{o} - 60{,}0\, d\mathfrak{x} - 119{,}6\, d\mathfrak{y}.
\end{aligned}$$

Hiernach sind zunächst für die Richtung R_1 die Differenzialquotienten l_1, l_2, l_3 nach Formel (**223**):

$$l_1 = -1, \qquad l_2 = +122{,}3, \qquad l_3 = -63{,}1,$$

womit sich das Gewicht P_1 von R_1 nach den Formeln (**226**) bis (**228**) ergiebt wie folgt:

l_1	-1	l_2	$+122$	l_3	-63	Gewicht P_1 und mittlerer Fehler M_1.			
		$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1} l_1$	$+17$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1} l_1$	$+33$	$+\frac{l_1}{\mathfrak{a}_1} l_1$	$+0{,}25$	$+l_1 Q_1$	$+0{,}29$
$+\frac{l_1}{\mathfrak{a}_1}$	$-0{,}25$	$\mathfrak{L}_2$	$+139$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2} \mathfrak{L}_2$	$+8$	$+\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2} \mathfrak{L}_2$	$+0{,}64$	$+l_2 Q_2$	$+0{,}55$
$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1} Q_3$	$+0{,}04$	$+\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}$	$+0{,}00\,46$	$\mathfrak{L}_3$	-22	$+\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3} \mathfrak{L}_3$	$+0{,}02$	$+l_3 Q_3$	$+0{,}07$
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1} Q_2$	$-0{,}08$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2} Q_3$	$-0{,}00\,01$	$+\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}$		$\frac{1}{P_1}$	$+0{,}91$	$\frac{1}{P_1}$	$+0{,}91$
Q_1	$-0{,}29$	Q_2	$+0{,}00\,45$	$= Q_3$	$-0{,}00\,11$	P_1	$1{,}1$	M_1	$\pm 7{,}7''$

In derselben Weise erhalten wir auch die Gewichte P_2, P_3, P_4 und die mittleren Fehler M_2, M_3, M_4 der wahrscheinlichsten Werthe R_2, R_3, R_4 der Richtungen nach den Punkten P_2, P_3, P_4. Die Zahlenwerthe sind:

$$\begin{aligned}
P_1 &= 1{,}1, & M_1 &= \pm 7{,}7'', \\
P_2 &= 1{,}2, & M_2 &= \pm 6{,}6'', \\
P_3 &= 1{,}8, & M_3 &= \pm 6{,}0'', \\
P_4 &= 1{,}4, & M_4 &= \pm 6{,}8''.
\end{aligned}$$

7. Zu § 37. Vorwärtseinschneiden.

1. Nach Gleichung (33*) im § 37, Nr. 6 und nach § 37, Nr. 8 sind die reduzirten Endgleichungen (**122**) zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe o_7, o_8, o_6 der Orientirungswinkel für die auf den Punkten P_7, P_8, P_6 beobachteten Richtungen und der wahrscheinlichsten Werthe x, y der Koordinaten des Punktes P:

$$\begin{aligned}
4\, d\mathfrak{o}_7 + {} & 18\, d\mathfrak{x} - 74\, d\mathfrak{y} + 13{,}0 = 0, \\
5\, d\mathfrak{o}_8 + {} & 112\, d\mathfrak{x} + 22\, d\mathfrak{y} - 21{,}0 = 0, \\
5\, d\mathfrak{o}_6 + {} & 60\, d\mathfrak{x} + 120\, d\mathfrak{y} - 35{,}5 = 0, \\
& + 13\,158\, d\mathfrak{x} + 6\,732\, d\mathfrak{y} - 3\,410 = 0, \\
& + 12\,570\, d\mathfrak{y} - 2\,755 = 0,
\end{aligned}$$

und hiernach die bei Berechnung der Gewichtskoeffizienten Q zu benutzenden Faktoren der Endgleichungen, sowie die sich aus diesen ergebenden Quotienten:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
\mathfrak{a}_1 = +4, & \mathfrak{b}_1 = 0, & \mathfrak{c}_1 = 0, & \mathfrak{d}_1 = +18, & \mathfrak{e}_1 = -74, \\
 & \mathfrak{B}_2 = +5, & \mathfrak{C}_2 = 0, & \mathfrak{D}_2 = +112, & \mathfrak{E}_2 = +22, \\
 & & \mathfrak{C}_3 = +5, & \mathfrak{D}_3 = +60, & \mathfrak{E}_3 = +120, \\
 & & & \mathfrak{D}_4 = +13\,158, & \mathfrak{E}_4 = +6\,782, \\
 & & & & \mathfrak{E}_5 = +12\,570;
\end{array}$$

$\mathfrak{a}_1 = +4,$	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1} = 0,$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1} = 0,$	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1} = -\ 4{,}5,$	$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1} = +18{,}5,$
	$\mathfrak{B}_2 = +5,$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2} = 0,$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2} = -22{,}4,$	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2} = -\ 4{,}4,$
		$\mathfrak{C}_3 = +5,$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3} = -12{,}0,$	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3} = -24{,}0,$
			$\mathfrak{D}_4 = +13\,158,$	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4} = -\ 0{,}512,$
				$\mathfrak{E}_5 = +12\,570.$

Damit ergeben sich die Zahlenwerthe von Q_{11}, Q_{22}, .. Q_{55} wie folgt:

$\mathfrak{f}_1$	−1	$\mathfrak{f}_2$	·	$\mathfrak{f}_3$	·	$\mathfrak{f}_4$	·	$\mathfrak{f}_5$	·	Probe.	
		$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	·	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	·	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	+4,5	$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	−18,5	$+\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	+0,25
$-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}$	+0,25	$\mathfrak{F}_2$	·	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	·	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	·	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	·	$+\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	·
$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_{15}$	+0,03	$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$	·	$\mathfrak{F}_3$	·	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	·	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	·	$+\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	·
$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_{14}$	+0,01	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{15}$	−0,007	$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}$	·	$\mathfrak{F}_4$	+4,5	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	−2,3	$+\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	+0,00
$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_{13}$	·	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{14}$	+0,026	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_{15}$	−0,040	$-\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}$	−0,000 34	$\mathfrak{F}_5$	−20,8	$+\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{F}_5$	+0,03
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_{12}$	·	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{13}$	·	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_{14}$	+0,014	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}Q_{15}$	−0,000 84	$-\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}$			
Q_{11}	+0,29	Q_{12}	+0,019	Q_{13}	−0,026	Q_{14}	−0,001 18	$=Q_{15}$	+0,001 65	Q_{11}	+0,28

$\mathfrak{f}_2$	−1	$\mathfrak{f}_3$	·	$\mathfrak{f}_4$	·	$\mathfrak{f}_5$	·	Probe.	
$\mathfrak{F}_2$	−1	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	·	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	+22,4	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	+4,4	$+\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	+0,20
$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$	+0,20	$\mathfrak{F}_3$	·	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	·	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	·	$+\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	·
$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{25}$	+0,00	$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}$	·	$\mathfrak{F}_4$	+22,4	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	−11,5	$+\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	+0,04
$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{24}$	+0,03	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_{25}$	+0,013	$-\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}$	−0,00 17	$\mathfrak{F}_5$	−7,1	$+\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{F}_5$	+0,00
$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{23}$	·	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_{24}$	+0,017	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}Q_{25}$	+0,00 03	$-\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}$			
Q_{22}	+0,23	Q_{23}	+0,030	Q_{24}	−0,00 14	$=Q_{25}$	+0,000 56	Q_{22}	+0,24

$\mathfrak{f}_3$	−1	$\mathfrak{f}_4$	·	$\mathfrak{f}_5$	·	Probe.	
$\mathfrak{F}_3$	−1	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	+12,0	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	+24,0	$+\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	+0,20
$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}$	+0,20	$\mathfrak{F}_4$	+12,0	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	−6,1	$+\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	+0,01
$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_{35}$	+0,03	$-\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}$	−0,000 91	$\mathfrak{F}_5$	+17,9	$+\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{D}_5}\mathfrak{F}_5$	+0,03
$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}Q_{34}$	+0,00	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}Q_{35}$	+0,000 73	$-\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}$			
Q_{33}	+0,23	Q_{34}	−0,000 18	$=Q_{35}$	−0,001 42	Q_{33}	+0,24

$\mathfrak{f}_4$	-1	$\mathfrak{f}_5$	.	$\mathfrak{f}_6$	-1
$\mathfrak{F}_4$	-1	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{F}_4$	$+0{,}512$	$\mathfrak{F}_6$	-1
$-\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{D}_4}$	$+0{,}000\,076$	$\mathfrak{F}_5$	$+0{,}512$	$-\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}$	
$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}Q_{45}$	$+0{,}000\,021$	$-\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{E}_5}$		$=Q_{55}$	$+0{,}000\,080$
Q_{44}	$+0{,}000\,097$	$=Q_{45}$	$-0{,}000\,041$		

Hiernach wird:

$$(220)\begin{cases} P_{o7}=\frac{1}{Q_{11}}=\frac{1}{0{,}29}=3{,}4, \\ P_{o8}=\frac{1}{Q_{22}}=\frac{1}{0{,}23}=4{,}3, \\ P_{o6}=\frac{1}{Q_{33}}=\frac{1}{0{,}23}=4{,}3, \\ P_x=\frac{1}{Q_{44}}=\frac{1}{0{,}000\,10}=10\,000, \\ P_y=\frac{1}{Q_{55}}=\frac{1}{0{,}000\,08}=12\,500. \end{cases}$$

$$(221)\begin{cases} M_{o7}=\pm\mathfrak{m}\sqrt{Q_{11}}=\pm 5{,}0\cdot 0{,}54=\pm 2{,}6'', \\ M_{o8}=\pm\mathfrak{m}\sqrt{Q_{22}}=\pm 5{,}0\cdot 0{,}48=\pm 2{,}4'', \\ M_{o6}=\pm\mathfrak{m}\sqrt{Q_{33}}=\pm 5{,}0\cdot 0{,}48=\pm 2{,}4'', \\ M_x=\pm\mathfrak{m}\sqrt{Q_{44}}=\pm 5{,}0\cdot 0{,}010=\pm 0{,}050\,\mathrm{m}=\pm 5{,}0\,\mathrm{cm}, \\ M_y=\pm\mathfrak{m}\sqrt{Q_{55}}=\pm 5{,}0\cdot 0{,}009=\pm 0{,}045\,\mathrm{m}=\pm 4{,}5\,\mathrm{cm}. \end{cases}$$

2. Die wahrscheinlichsten Werthe R_5, R_6, R_7, R_8 der Richtungen auf $\triangle 7$ ergeben sich nach (13*) und (16*) im § 37, Nr. 3 und 5 mit den Zahlenwerthen im § 37, Nr. 8 nach:

$$\begin{aligned} R_5 &= \mathfrak{r}_5 - d\mathfrak{o}_7, \\ R_6 &= \mathfrak{r}_6 - d\mathfrak{o}_7 - 18\,d\mathfrak{x} + 74\,d\mathfrak{y}, \\ R_7 &= \mathfrak{r}_7 - d\mathfrak{o}_7, \\ R_8 &= \mathfrak{r}_8 - d\mathfrak{o}_8. \end{aligned}$$

Demnach sind die Gewichte P_5, P_7, P_8 und die mittleren Fehler M_5, M_7, M_8 der Richtungen R_5, R_7, R_8 gleich dem Gewichte $P_{o7}=3{,}4$ und dem mittleren Fehler $M_{o7}=\pm 2{,}7''$ des Orientirungswinkels o_7, während sich das Gewicht P_6 und der mittlere Fehler M_6 der Richtung R_6 wie folgt ergiebt:

l_1	-1	l_4	-18	l_5	$+74$	Gewicht P_6 und mittlerer Fehler M_6.			
		$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}l_1$	$+4$	$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}l_1$	-18	$+\frac{l_1}{\mathfrak{a}_1}l_1$	$+0{,}25$	$+l_1Q_1$	$+0{,}14$
$+\frac{l_1}{\mathfrak{a}_1}$	$-0{,}25$	$\mathfrak{L}_4$	-14	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{L}_4$	$+7$	$+\frac{\mathfrak{L}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{L}_4$	$+0{,}02$	$+l_4Q_4$	$+0{,}07$
$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_5$	$+0{,}09$	$+\frac{\mathfrak{L}_4}{\mathfrak{D}_4}$	$-0{,}00\,11$	$\mathfrak{L}_5$	$+63$	$+\frac{\mathfrak{L}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{L}_5$	$+0{,}32$	$+l_5Q_5$	$+0{,}37$
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_4$	$+0{,}02$	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}Q_5$	$-0{,}00\,26$	$+\frac{\mathfrak{L}_5}{\mathfrak{E}_5}$		$\frac{1}{P_6}$	$+0{,}59$	$\frac{1}{P_6}$	$=0{,}58$
Q_1	$-0{,}14$	Q_4	$-0{,}00\,37$	$=Q_5$	$+0{,}00\,50$	P_6	$1{,}7$	M_6	$\pm 3{,}8''$

Die Gewichte und mittleren Fehler der wahrscheinlichsten Werthe der übrigen Richtungen ergeben sich in ähnlicher Weise.

3. Zu § 38. Kombinirtes Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden.

Die Berechnung der Gewichte P_x, P_y und der mittleren Fehler M_x, M_y der Koordinaten x, y des neu bestimmten Punktes P kann in Verbindung mit der Auflösung der Endgleichungen u. s. w. ebenso durchgeführt werden wie es unter Nr. 1 dieses Paragraphen geschehen ist:

$\mathfrak{a}_1$			$\mathfrak{b}_1$			$\mathfrak{f}_1$			$\mathfrak{b}_2$			$\mathfrak{f}_2$			Probe.		
	+	43 354		+	5 012		—	7 917		+	36 114		—	9 723			
			$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}$	—	0,116	$-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}$	+	0,183	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1$	—	581	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	+	918	$-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	—	1 449
						$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}d\mathfrak{y}$	—	0,029	$\mathfrak{B}_2$	+	35 533	$\mathfrak{F}_2$	—	8 805	$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	—	2 184
			$\frac{\mathfrak{b}_2}{\mathfrak{a}_1}$		0,83	$d\mathfrak{x}$	+	0,154				$d\mathfrak{y} = -\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$	+	0,248	Σ	—	3 633
$Q_{11} = \frac{1}{P_x} = \frac{\mathfrak{b}_2}{\mathfrak{a}_1}\frac{1}{\mathfrak{B}_2}$					0,000 023	$Q_{22} = \frac{1}{P_y} = \frac{1}{\mathfrak{B}_2}$					0,000 028				$\mathfrak{f}_1 d\mathfrak{x}$	—	1 219
			P_x		44 000				P_y		36 000				$\mathfrak{f}_2 d\mathfrak{y}$	—	2 411
															Σ	—	3 630

$x = \mathfrak{x} + d\mathfrak{x} = 4\,745{,}00 + 0{,}15 = 4\,745{,}15$	$M_x = \pm \mathrm{m}\sqrt{\frac{1}{P_x}} = \pm 4{,}9 \cdot 0{,}0048 = \pm 0{,}024^{\mathrm{m}}$
$y = \mathfrak{y} + d\mathfrak{y} = \times 6\,681{,}00 + 0{,}25 = \times 6\,681{,}25$	$M_y = \pm \mathrm{m}\sqrt{\frac{1}{P_y}} = \pm 4{,}9 \cdot 0{,}0053 = \pm 0{,}026^{\mathrm{m}}$

9. Zu § 39. Bestimmung einer geraden Grenzstrecke.

1. Die reduzirten Endgleichungen zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe x und y der Richtungstangente und der Anfangsordinate der Geraden sind nach § 39, Nr. 7 und 9:

$$+5\,d\mathfrak{y} + 5\,788\,d\mathfrak{x} + 2{,}786 = 0,$$
$$+2\,646\,000\,d\mathfrak{x} + 286 \quad = 0,$$

wonach die bei Berechnung der Gewichtskoeffizienten Q zu benutzenden Faktoren der Endgleichungen sind:

$$\mathfrak{a}_1 = +5, \quad \Big| \quad \mathfrak{b}_1 = +5\,788, \quad \mathfrak{B}_2 = +2\,646\,000.$$

Damit ergiebt sich nach den Formeln (**218** a) und (**218** b):

$$\mathfrak{F}_2 = +\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1} = +1\,158, \quad \Big| \quad Q_{12} = -\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2} = -0{,}000\,437,$$

$$Q_{11} = -\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1} Q_{12} + \frac{1}{\mathfrak{a}_1} = +0{,}707, \quad \Big| \quad Q_{22} = +\frac{1}{\mathfrak{B}_2} = +0{,}000\,000\,378.$$

Hiernach ergeben sich die Gewichte P_y, P_x und die mittleren Fehler M_y, M_x der wahrscheinlichsten Werthe y, x der Anfangsordinate und der Richtungstangente der Geraden zu:

$$(\mathbf{220})\begin{cases} P_y = \frac{1}{Q_{11}} = 1{,}41, \\ P_x = \frac{1}{Q_{22}} = 2\,650\,00; \end{cases} \quad \Big| \quad (\mathbf{221})\begin{cases} M_y = \pm \mathrm{m}\sqrt{Q_{11}} = \pm 0{,}97 \cdot 0{,}84 = \pm 0{,}81^{\mathrm{m}}, \\ M_x = \pm \mathrm{m}\sqrt{Q_{22}} = \pm 0{,}97 \cdot 0{,}000\,61 = \pm 0{,}000\,59. \end{cases}$$

2. Nach den im § 39, Nr. 4 und 6 gewonnenen Gleichungen (**113**) und (**116**) ergiebt sich der wahrscheinlichste Werth O_n der Ordinate eines Punktes P_n nach:

$$O_n = \mathfrak{o}_n + d\mathfrak{y} + a_n\,d\mathfrak{x}$$

und somit für das Gewicht P_n von O_n nach den Formeln (**223**) und (**224**):

$$l_1 = \frac{\partial O_n}{\partial \mathfrak{y}} = +1, \quad \Big| \quad l_2 = \frac{\partial O_n}{\partial \mathfrak{x}} = +a_n,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_n} &= l_1 l_1 Q_{11} + 2 l_1 l_2 Q_{12} + l_2 l_2 Q_{22} \\ &= \quad Q_{11} + 2 a_n \; Q_{12} + a_n a_n Q_{22} \\ &= 0{,}707 - 0{,}000\,87 \cdot a_n + 0{,}000\,000\,378 \cdot a_n a_n. \end{aligned}$$

Hiernach erhalten wir für die Gewichte P_1, P_2, ... P_5 und die mittleren Fehler M_1, M_2, ... M_5 der wahrscheinlichsten Werthe O_1, O_2, ... O_5 der Ordinaten der eingemessenen Punkte P_1, P_2, ... P_5 der Geraden:

Nr. der Punkte.	a.	aa.	Q_{11}.	$2aQ_{12}$.	aaQ_{22}.	$\frac{1}{P}$.	P.	$\sqrt{\frac{1}{P}}$.	$M = \pm m\sqrt{\frac{1}{P}}$.
1	0	0	+0,707	−0,000	+0,000	+0,707	1,4	0,84	± 0,81
2	713	508 000	+0,707	−0,620	+0,192	+0,279	3,6	0,53	± 0,51
3	1 318	1 737 000	+0,707	−1,148	+0,657	+0,216	4,6	0,46	± 0,45
4	1 731	2 996 000	+0,707	−1,505	+1,132	+0,334	3,0	0,58	± 0,56
5	2 026	4 105 000	+0,707	−1,766	+1,552	+0,493	2,0	0,70	± 0,68
	5 788	9 346 000	+3,535	−5,039	+3,533	+2,029			

10. Zu § 41. Bestimmung einer Distanzteilung für den Okularauszug eines Fernrohrs.

1. Die reduzirten Endgleichungen zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe x und y des Abstandes der Einstellmarke für den Okularauszug von der Objektivlinse und der Brennweite der Objektivlinse sind nach § 41, Nr. 6 und 9:

$$+11\,d\mathfrak{x} - 11{,}307\;d\mathfrak{y} + 0{,}49 = 0,$$
$$+\;0{,}011\,35\,d\mathfrak{y} - 0{,}057\,97 = 0,$$

wonach die bei Berechnung der Gewichtskoeffizienten Q zu benutzenden Faktoren der Endgleichungen sind:

$$\mathfrak{a}_1 = +11, \quad \Big| \quad \mathfrak{b}_1 = -11{,}307, \quad \mathfrak{B}_2 = +\;0{,}011\,35.$$

Damit ergiebt sich nach ben Formeln (**218** a) und (**218** b):

$$\mathfrak{F}_2 = +\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1} = -1{,}028, \quad \Big| \quad Q_{12} = -\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2} = +90{,}57,$$
$$Q_{11} = -\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_{12} + \frac{1}{\mathfrak{a}_1} = +93{,}20, \quad \Big| \quad Q_{22} = +\frac{1}{\mathfrak{B}_2} = +88{,}11$$

und für die Gewichte P_x, P_y und die mittleren Fehler M_x, M_y der wahrscheinlichsten Werthe x, y:

$$(\mathbf{220})\;\begin{cases} P_x = \dfrac{1}{Q_{11}} = 0{,}001\,07, \\ P_y = \dfrac{1}{Q_{22}} = 0{,}001\,14; \end{cases} \quad \Big| \quad (\mathbf{221})\;\begin{cases} M_x = \pm\,\mathrm{m}\sqrt{Q_{11}} = \pm\,0{,}15\cdot 9{,}6 = \pm\,1{,}4^{\mathrm{mm}}, \\ M_y = \pm\,\mathrm{m}\sqrt{Q_{22}} = \pm\,0{,}15\cdot 9{,}4 = \pm\,1{,}4^{\mathrm{mm}}. \end{cases}$$

2. Nach den im § 41, Nr. 5 gewonnenen Gleichungen (**113**) und (**116**) ergiebt sich der wahrscheinlichste Werth L_n der Ablesung am Okularauszuge nach:

$$L_n = \mathfrak{l}_n - d\mathfrak{x} + b_n\,d\mathfrak{y}$$

und somit für das Gewicht P_n von L_n nach den Formeln (**223**), (**226**) und (**227**):

$$(\mathbf{223}) \qquad l_1 = -\frac{\partial L_n}{\partial \mathfrak{x}} = -1, \quad \Big| \quad l_2 = \frac{\partial L_n}{\partial \mathfrak{y}} = +b_n,$$

$$(\mathbf{226}) \qquad \mathfrak{L}_2 = l_2 - \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}l_1 = b_n - 1{,}027\,89;$$

$$(\mathbf{227}) \qquad \frac{1}{P_{L_n}} = \frac{l_1}{\mathfrak{a}_1}l_1 + \frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2 = 0{,}091 + \frac{\mathfrak{L}_2\,\mathfrak{L}_2}{0{,}011\,35}.$$

Hiernach erhalten wir für die Gewichte P_1, P_6, P_{11} und die mittleren Fehler M_1, M_6, M_{11} der wahrscheinlichsten Werthe L_1, L_6, L_{11}:

$$\mathfrak{Q}_{2\,1} = 1{,}117\,42 - 1{,}027\,89 = +0{,}089\,53,$$
$$\mathfrak{Q}_{2\,6} = 1{,}013\,65 - 1{,}027\,89 = -0{,}014\,24,$$
$$\mathfrak{Q}_{2\,11} = 1{,}004\,53 - 1{,}027\,89 = -0{,}023\,36;$$

$$\frac{1}{P_1} = 0{,}091 + 0{,}706 = 0{,}797, \qquad P_1 = 1{,}2,$$
$$\frac{1}{P_6} = 0{,}091 + 0{,}018 = 0{,}109, \qquad P_6 = 9{,}2,$$
$$\frac{1}{P_{11}} = 0{,}091 + 0{,}048 = 0{,}139; \qquad P_{11} = 7{,}2;$$

$$M_1 = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P_1}} = \pm 0{,}15 \cdot 0{,}89 = \pm 0{,}13\,\text{mm},$$
$$M_6 = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P_6}} = \pm 0{,}15 \cdot 0{,}33 = \pm 0{,}05\,\text{mm},$$
$$M_{11} = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P_{11}}} = \pm 0{,}15 \cdot 0{,}37 = \pm 0{,}06\,\text{mm}.$$

2. Kapitel. Für bedingte Beobachtungen.

§ 65. Gewicht und mittlerer Fehler einer Funktion der wahrscheinlichsten Werthe der beobachteten Gröfsen.

1. Das Gewicht P_L und der mittlere Fehler M_L einer Funktion

$$L = \varphi\,(\text{I, II, III, IV}, \ldots) \tag{230}$$

der wahrscheinlichsten Werthe I, II, III, IV, ... der beobachteten Gröfsen kann angegeben werden, sobald L als Funktion der unabhängigen Beobachtungsergebnisse 1, 2, 3, 4, ..., deren Gewichte p_1, p_2, p_3, p_4, ... wir kennen, dargestellt ist. Demnach zerlegen wir die wahrscheinlichsten Werthe I, II, III, IV, ... der beobachteten Gröfsen in die Beobachtungsergebnisse 1, 2, 3, 4, ... und in die diesen zukommenden Verbesserungen (1), (2), (3), (4), ..., so dafs

$$L = \varphi\,(1 + (1),\ 2 + (2),\ 3 + (3),\ 4 + (4), \ldots) \tag{1*}$$

wird. Bezeichnen wir nun die partiellen Differenzialquotienten von $\varphi\,(1, 2, 3, 4, \ldots)$ nach 1, 2, 3, 4, ... mit l_1, l_2, l_3, l_4, ..., so dafs also

$$\left\{\begin{aligned} l_1 &= \frac{\partial\varphi(1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots)}{\partial\, 1},\\ l_2 &= \frac{\partial\varphi(1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots)}{\partial\, 2},\\ l_3 &= \frac{\partial\varphi(1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots)}{\partial\, 3},\\ l_4 &= \frac{\partial\varphi(1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots)}{\partial\, 4},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right. \tag{231}$$

ist, so geht die Gleichung (1*) über in:

$$L = \varphi(1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots) + l_1(1) + l_2(2) + l_3(3) + l_4(4) + \cdots \tag{2*}$$

Setzen wir in diese Gleichung für (1), (2), (3), (4), ... die dafür in den Korrelatengleichungen (**156**) gegebenen Ausdrücke, so folgt:

$$L = \varphi(1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots) + \left[\frac{al}{p}\right]k_a + \left[\frac{bl}{p}\right]k_b + \left[\frac{cl}{p}\right]k_c + \cdots \tag{3*}$$

2. Die Korrelaten $k_a, k_b, k_c, \ldots$ können wir nun nach den Endgleichungen (**157**) zuerst als Funktionen der Widersprüche $f_a, f_b, f_c \ldots$ und dann nach den Gleichungen (**151**) und (**152**) als Funktionen der Beobachtungsergebnisse 1, 2, 3, 4, ... darstellen. Zu diesem Zweck führen wir die Koeffizienten $q_{11}, q_{12}, q_{13}, \ldots; q_{21}, q_{22}, q_{23}, \ldots; q_{31}, q_{32}, q_{33}, \ldots; \ldots$ ein, und setzen sie derart fest, dafs wird:

$$(4^*)\quad \begin{cases} \left[\frac{aa}{p}\right] q_{11} + \left[\frac{ab}{p}\right] q_{12} + \left[\frac{ac}{p}\right] q_{13} + \cdots = 1, \\ \left[\frac{ab}{p}\right] q_{11} + \left[\frac{bb}{p}\right] q_{12} + \left[\frac{bc}{p}\right] q_{13} + \cdots = 0, \\ \left[\frac{ac}{p}\right] q_{11} + \left[\frac{bc}{p}\right] q_{12} + \left[\frac{cc}{p}\right] q_{13} + \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\ \left[\frac{aa}{p}\right] q_{21} + \left[\frac{ab}{p}\right] q_{22} + \left[\frac{ac}{p}\right] q_{23} + \cdots = 0, \\ \left[\frac{ab}{p}\right] q_{21} + \left[\frac{bb}{p}\right] q_{22} + \left[\frac{bc}{p}\right] q_{23} + \cdots = 1, \\ \left[\frac{ac}{p}\right] q_{21} + \left[\frac{bc}{p}\right] q_{22} + \left[\frac{cc}{p}\right] q_{23} + \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\ \left[\frac{aa}{p}\right] q_{31} + \left[\frac{ab}{p}\right] q_{32} + \left[\frac{ac}{p}\right] q_{33} + \cdots = 0, \\ \left[\frac{ab}{p}\right] q_{31} + \left[\frac{bb}{p}\right] q_{32} + \left[\frac{bc}{p}\right] q_{33} + \cdots = 0, \\ \left[\frac{ac}{p}\right] q_{31} + \left[\frac{bc}{p}\right] q_{32} + \left[\frac{cc}{p}\right] q_{33} + \cdots = 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

u. s. w.

Dann erhalten wir ähnlich wie im § 62, Nr. 2:

$$(5^*)\quad \begin{cases} k_a = f_a q_{11} + f_b q_{12} + f_c q_{13} + \cdots, \\ k_b = f_a q_{21} + f_b q_{22} + f_c q_{23} + \cdots, \\ k_c = f_a q_{31} + f_b q_{32} + f_c q_{33} + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Beachten wir nun, dafs nach den Gleichungen (**151**) und (**152**)

$$(6^*)\quad \begin{cases} f_a = S_a - F_a(1, 2, 3, 4, \cdots), \\ f_b = S_b - F_b(1, 2, 3, 4, \cdots), \\ f_c = S_c - F_c(1, 2, 3, 4, \cdots), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

ist, so erhalten wir:

$$(7^*)\quad \begin{cases} k_a = (S_a - F_a(1, 2, 3, 4, \ldots))q_{11} + (S_b - F_b(1, 2, 3, 4, \ldots))q_{12} \\ \quad + (S_c - F_c(1, 2, 3, 4, \ldots))q_{13} + \cdots, \\ k_b = (S_a - F_a(1, 2, 3, 4, \ldots))q_{21} + (S_b - F_b(1, 2, 3, 4, \ldots))q_{22} \\ \quad + (S_c - F_c(1, 2, 3, 4, \ldots))q_{23} + \cdots, \\ k_c = (S_a - F_a(1, 2, 3, 4, \ldots))q_{31} + (S_b - F_b(1, 2, 3, 4, \ldots))q_{32} \\ \quad + (S_c - F_c(1, 2, 3, 4, \ldots))q_{33} + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

3. Die Ausdrücke für $k_a, k_b, k_c, \ldots$ setzen wir nun in die Gleichung (**3***) ein und erhalten damit L als Funktion von 1, 2, 3, 4, ... wie folgt:

$$(8^*)\quad \begin{aligned} L = \varphi(1, 2, 3, 4, \ldots) & \\ + (S_a - F_a(1, 2, 3, 4, \ldots)) & \left(\left[\frac{al}{p}\right] q_{11} + \left[\frac{bl}{p}\right] q_{12} + \left[\frac{cl}{p}\right] q_{13} + \cdots\right) \\ + (S_b - F_b(1, 2, 3, 4, \ldots)) & \left(\left[\frac{al}{p}\right] q_{21} + \left[\frac{bl}{p}\right] q_{22} + \left[\frac{cl}{p}\right] q_{23} + \cdots\right) \\ + (S_c - F_c(1, 2, 3, 4, \ldots)) & \left(\left[\frac{al}{p}\right] q_{31} + \left[\frac{bl}{p}\right] q_{32} + \left[\frac{cl}{p}\right] q_{33} + \cdots\right) \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck vereinfachen wir noch durch Einführung der Koeffizienten $r_a, r_b, r_c, \ldots$, die wir so festsetzen, dafs sie den folgenden Gleichungen genügen:

$$(232)\quad \begin{cases} \left[\frac{aa}{p}\right] r_a + \left[\frac{ab}{p}\right] r_b + \left[\frac{ac}{p}\right] r_c + \cdots \left[\frac{al}{p}\right] = 0, \\ \left[\frac{ab}{p}\right] r_a + \left[\frac{bb}{p}\right] r_b + \left[\frac{bc}{p}\right] r_c + \cdots \left[\frac{bl}{p}\right] = 0, \\ \left[\frac{ac}{p}\right] r_a + \left[\frac{bc}{p}\right] r_b + \left[\frac{cc}{p}\right] r_c + \cdots \left[\frac{cl}{p}\right] = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Indem wir diese Gleichungen ebenso auflösen, wie wir unter Nr. 2 die Endgleichungen (**157**) aufgelöst haben, erhalten wir:

$$(9^*)\quad \begin{cases} r_a = -\left[\frac{al}{p}\right] q_{11} - \left[\frac{bl}{p}\right] q_{12} - \left[\frac{cl}{p}\right] q_{13} - \cdots, \\ r_b = -\left[\frac{al}{p}\right] q_{21} - \left[\frac{bl}{p}\right] q_{22} - \left[\frac{cl}{p}\right] q_{23} - \cdots, \\ r_c = -\left[\frac{al}{p}\right] q_{31} - \left[\frac{bl}{p}\right] q_{32} - \left[\frac{cl}{p}\right] q_{33} - \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

womit die Gleichung (8*) übergeht in:

$$(10^*)\quad \begin{aligned} L = \varphi(1, 2, 3, 4, \ldots) - (S_a - F_a(1, 2, 3, 4, \ldots)) r_a & \\ - (S_b - F_b(1, 2, 3, 4, \ldots)) r_b & \\ - (S_c - F_c(1, 2, 3, 4, \ldots)) r_c & \\ - \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned}$$

4. Um nun das Gewicht P_L von L nach Formel (**45**) zu erhalten, bilden wir zuerst die partiellen Differenzialquotienten

$$(11^*)\quad L_1 = \frac{\partial L}{\partial 1},\quad L_2 = \frac{\partial L}{\partial 2},\quad L_3 = \frac{\partial L}{\partial 3},\quad L_4 = \frac{\partial L}{\partial 4}, \ldots$$

unter Beachtung der durch die Formeln (**154**) und (**231**) eingeführten Bezeichnungen $a_n, b_n, c_n, \ldots$ und l_n, und erhalten:

$$(233)\quad \begin{cases} L_1 = \frac{\partial L}{\partial 1} = l_1 + a_1 r_a + b_1 r_b + c_1 r_c + \cdots, \\ L_2 = \frac{\partial L}{\partial 2} = l_2 + a_2 r_a + b_2 r_b + c_2 r_c + \cdots, \\ L_3 = \frac{\partial L}{\partial 3} = l_3 + a_3 r_a + b_3 r_b + c_3 r_c + \cdots, \\ L_4 = \frac{\partial L}{\partial 4} = l_4 + a_4 r_a + b_4 r_b + c_4 r_c + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Dann ist nach Formel (**45**):

$$(12^*)\quad \frac{1}{P_L} = L_1 L_1 \frac{1}{p_1} + L_2 L_2 \frac{1}{p_2} + L_3 L_3 \frac{1}{p_3} + L_4 L_4 \frac{1}{p_4} + \cdots = \left[\frac{LL}{p}\right].$$

5. Aufser dieser Formel können wir nun noch zwei weitere Formeln für die Berechnung des Gewichtes $\frac{1}{P_L}=\left[\frac{LL}{p}\right]$ gewinnen. Quadriren wir nämlich die letzten Ausdrücke für L_1, L_2, L_3, L_4, ..., dividiren die Quadrate durch die Gewichte p_1, p_2, p_3, p_4, ... und addiren alles, so erhalten wir:

$$
(13^*)\quad
\begin{aligned}
\frac{1}{P_L}=\left[\frac{LL}{p}\right]=\left[\frac{ll}{p}\right] &+\left[\frac{al}{p}\right]r_a +\left[\frac{bl}{p}\right]r_b +\left[\frac{cl}{p}\right]r_c +\cdots\\
&+\left[\frac{al}{p}\right]r_a+\left[\frac{aa}{p}\right]r_a r_a+\left[\frac{ab}{p}\right]r_b r_a+\left[\frac{ac}{p}\right]r_c r_a+\cdots\\
&+\left[\frac{bl}{p}\right]r_b+\left[\frac{ab}{p}\right]r_a r_b+\left[\frac{bb}{p}\right]r_b r_b+\left[\frac{bc}{p}\right]r_c r_b+\cdots\\
&+\left[\frac{cl}{p}\right]r_c+\left[\frac{ac}{p}\right]r_a r_c+\left[\frac{bc}{p}\right]r_b r_c+\left[\frac{cc}{p}\right]r_c r_c+\cdots\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Beachten wir nun, dafs wir in diesem Ausdruck in den auf die erste Vertikalreihe folgenden Vertikalreihen r_a, r_b, r_c, ... als Faktor herausziehen können und dafs die dann übrigbleibenden Werthe nach den Gleichungen (**232**) gleich Null sind, so folgt:

$$
(14^*)\qquad \frac{1}{P_L}=\left[\frac{LL}{p}\right]=\left[\frac{ll}{p}\right]+\left[\frac{al}{p}\right]r_a+\left[\frac{bl}{p}\right]r_b+\left[\frac{cl}{p}\right]r_c+\cdots
$$

Indem wir dann noch nach den Formeln (**120** a) für die Faktoren der Gleichungen (4*) die einfacheren Bezeichnungen

$$
(\mathbf{234}\,\mathrm{a})\left\{
\begin{array}{l|l|l|l|l}
\mathfrak{a}_1=\left[\frac{aa}{p}\right], & \mathfrak{b}_1=\left[\frac{ab}{p}\right], & \mathfrak{c}_1=\left[\frac{ac}{p}\right], & \ldots, & \mathfrak{l}_1=\left[\frac{al}{p}\right],\\
 & \mathfrak{b}_2=\left[\frac{bb}{p}\right], & \mathfrak{c}_2=\left[\frac{bc}{p}\right], & \ldots, & \mathfrak{l}_2=\left[\frac{bl}{p}\right],\\
 & & \mathfrak{c}_3=\left[\frac{cc}{p}\right], & \ldots, & \mathfrak{l}_3=\left[\frac{cl}{p}\right],\\
 & & & \ldots, & \ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.
$$

einführen und nach den Formeln (**120** b)

$$
(\mathbf{234}\,\mathrm{b})\left\{
\begin{array}{l|l|l|l}
\mathfrak{B}_2=\mathfrak{b}_2-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1, & \mathfrak{C}_2=\mathfrak{c}_2-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1, & \ldots, & \mathfrak{L}_2=\mathfrak{l}_2-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1,\\
 & \mathfrak{C}_3=\mathfrak{c}_3-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{C}_2, & \ldots, & \mathfrak{L}_3=\mathfrak{l}_3-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2,\\
 & & \ldots, & \ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.
$$

bilden, erhalten wir weiter unter Beachtung der auch hier anwendbaren Formel (**127**):

$$
(\mathbf{235})\qquad
\begin{aligned}
\frac{1}{P_L}=\left[\frac{LL}{p}\right]&=\frac{L_1L_1}{p_1}+\frac{L_2L_2}{p_2}+\frac{L_3L_3}{p_3}+\frac{L_4L_4}{p_4}+\cdots\\
&=\left[\frac{ll}{p}\right]+\mathfrak{l}_1 r_a+\mathfrak{l}_2 r_b+\mathfrak{l}_3 r_c+\cdots\\
&=\left[\frac{ll}{p}\right]-\frac{\mathfrak{l}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1-\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2-\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3-\cdots
\end{aligned}
$$

Damit ergiebt sich dann auch der mittlere Fehler M_L von L nach Formel (**35**) zu:

$$
(\mathbf{236})\qquad M_L=\pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P_L}}.
$$

6. Die praktische Durchführung der Gewichtsberechnung wird zweckmäfsig wie folgt angeordnet:

Es werden die Differenzialquotienten l_1, l_2, l_3, l_4, ... nach Formel (**231**) und danach $\left[\frac{al}{p}\right]$, $\left[\frac{bl}{p}\right]$, $\left[\frac{cl}{p}\right]$, ... $\left[\frac{ll}{p}\right]$ gebildet.

Sodann wird weiter gerechnet nach dem folgenden Schema, das für den Fall eingerichtet ist, wo $r=5$ Endgleichungen vorliegen und das für jeden andern Fall leicht vereinfacht oder erweitert werden kann:

(237)

$\left[\frac{al}{p}\right]$.	$\left[\frac{bl}{p}\right]$.	$\left[\frac{cl}{p}\right]$.	$\left[\frac{dl}{p}\right]$.	$\left[\frac{el}{p}\right]$.	Gewicht P_L.	
$\mathfrak{l}_1$	$\mathfrak{l}_2$	$\mathfrak{l}_3$	$\mathfrak{l}_4$	$\mathfrak{l}_5$	$\left[\frac{ll}{p}\right]$	$\left[\frac{ll}{p}\right]$
	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	$-\frac{\mathfrak{l}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	$+\mathfrak{l}_1 r_a$
$-\frac{\mathfrak{l}_1}{\mathfrak{a}_1}$	$=\mathfrak{L}_2$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	$-\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	$+\mathfrak{l}_2 r_b$
$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}r_e$	$-\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}$	$=\mathfrak{L}_3$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3$	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3$	$-\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3$	$+\mathfrak{l}_3 r_c$
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}r_d$	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}r_e$	$-\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}$	$=\mathfrak{L}_4$	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{L}_4$	$-\frac{\mathfrak{L}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{L}_4$	$+\mathfrak{l}_4 r_d$
$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}r_c$	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}r_d$	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}r_e$	$-\frac{\mathfrak{L}_4}{\mathfrak{D}_4}$	$=\mathfrak{L}_5$	$-\frac{\mathfrak{L}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{L}_5$	$+\mathfrak{l}_5 r_e$
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}r_b$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}r_c$	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}r_d$	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}r_e$	$-\frac{\mathfrak{L}_5}{\mathfrak{E}_5}$	$=\frac{1}{P_L}=$	
$=r_a$	$=r_b$	$=r_c$	$=r_d$	$=r_e$		

Wie leicht zu ersehen ist, ist dies Schema zur Auflösung der Gleichungen (**232**) ebenso gebildet wie das Schema (**229**) zur Auflösung der Gleichungen (**225**).

Die Zahlenwerthe der Gröfsen $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{E}_2$; $\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{D}_3$, $\mathfrak{E}_3$; $\mathfrak{D}_4$, $\mathfrak{E}_4$; $\mathfrak{E}_5$ sind auch hier unverändert aus der Auflösung der Endgleichungen (**157**) zu übernehmen.

In den beiden letzten mit Gewicht P_L überschriebenen Spalten werden die nach den beiden letzten Ausdrücken der Formel (**235**) folgenden Werthe für $\frac{1}{P_L}$ erhalten.

Ein dritter Werth für $\frac{1}{P_L}$ kann dann noch erhalten werden, indem nach den Formeln (**233**) die einzelnen Werthe von L_1, L_2, L_3, L_4, ... und danach $\frac{1}{P_L}=\left[\frac{LL}{p}\right]$ gebildet wird.

7. Wenn die Gewichte P_I, P_{II}, P_{III}, P_{IV}, ... und die mittleren Fehler M_I, M_{II}, M_{III}, M_{IV}, ... für die wahrscheinlichsten Werthe I, II, III, IV, ... der beobachteten Gröfsen, also für die einfachen Funktionen

$$L_I=\text{I},\quad L_{II}=\text{II},\quad L_{III}=\text{III},\quad L_{IV}=\text{IV},\quad \ldots.$$

anzugeben sind, so wird nach den Formeln (**231**)

(238)

für $L_I = \text{I}$: $l_1=1$,	$l_2=0$,	$l_3=0$,	$l_4=0$,	....,
„ $L_{II}=\text{II}$: $l_1=0$,	$l_2=1$,	$l_3=0$,	$l_4=0$,	....,
„ $L_{III}=\text{III}$: $l_1=0$,	$l_2=0$,	$l_3=1$,	$l_4=0$,	....,
„ $L_{IV}=\text{IV}$: $l_1=0$,	$l_2=0$,	$l_3=0$,	$l_4=1$,	....,
..........: ....,	....,	....,	....,	.....

Dementsprechend wird dann

$$
(239)\quad \begin{cases}
\text{für } L_I = \text{I}: \left[\frac{ll}{p}\right]=\frac{1}{p_1}, & \left[\frac{al}{p}\right]=\frac{a_1}{p_1}, & \left[\frac{bl}{p}\right]=\frac{b_1}{p_1}, & \left[\frac{cl}{p}\right]=\frac{c_1}{p_1}, & \ldots, \\
\;\;\text{„} \;\; L_{II} = \text{II}: \left[\frac{ll}{p}\right]=\frac{1}{p_2}, & \left[\frac{al}{p}\right]=\frac{a_2}{p_2}, & \left[\frac{bl}{p}\right]=\frac{b_2}{p_2}, & \left[\frac{cl}{p}\right]=\frac{c_2}{p_2}, & \ldots, \\
\;\;\text{„} \;\; L_{III} = \text{III}: \left[\frac{ll}{p}\right]=\frac{1}{p_3}, & \left[\frac{al}{p}\right]=\frac{a_3}{p_3}, & \left[\frac{bl}{p}\right]=\frac{b_3}{p_3}, & \left[\frac{cl}{p}\right]=\frac{c_3}{p_3}, & \ldots, \\
\;\;\text{„} \;\; L_{IV} = \text{IV}: \left[\frac{ll}{p}\right]=\frac{1}{p_4}, & \left[\frac{al}{p}\right]=\frac{a_4}{p_4}, & \left[\frac{bl}{p}\right]=\frac{b_4}{p_4}, & \left[\frac{cl}{p}\right]=\frac{c_4}{p_4}, & \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots
\end{cases}
$$

Im Uebrigen finden die vorentwickelten Formeln unverändert Anwendung.

§ 66. Beispiele zu dem im § 65 entwickelten Verfahren.

Zur weitern Erläuterung des Verfahrens wenden wir die im § 65 entwickelten Formeln u. s. w. auf einige der im V. Abschnitte behandelten Beispiele an.

1. Zu §§ 52 und 53. Bestimmung von Knotenpunkten in Polygonnetzen.

Die wahrscheinlichsten Werthe der Höhen H_2, H_3, ... H_7 der Punkte 2, 3, ... 7 können aus den gegebenen Höhen und den wahrscheinlichsten Werthen I, II, ... XI der Höhenunterschiede berechnet werden nach:

$$
(230)\quad \begin{cases}
H_2 = H_1 + \text{I}, & H_5 = H_{58} + \text{V}, \\
H_3 = H_1 + \text{I} + \text{VII}, & H_6 = H_{58} + \text{V} + \text{IX}, \\
H_4 = H_{57} + \text{III}, & H_7 = H_1 + \text{I} + \text{VII} - \text{XI}.
\end{cases}
$$

Die sich hieraus nach den Formeln (**231**) ergebenden Differenzialquotienten l sind in nachfolgender Tabelle mit den reziproken Werthen $\frac{1}{p}$ der Gewichte und den Differenzialquotienten a, b, c, d, e (nach § 53) zusammengestellt.

Nr.	$\frac{1}{p}$.	a.	b.	c.	d.	e.	Differenzialquotienten l für					
							H_2,	H_3,	H_4,	H_5,	H_6,	H_7.
1	1,22	.	.	−1	.	.	+1	+1	.	.	.	+1
2	2,27	.	−1	+1	.	.	.	.	.	.	.	.
3	0,89	.	+1	.	+1	.	.	.	+1	.	.	.
4	0,98	+1	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	.
5	1,79	+1	.	.	.	+1	.	.	.	+1	+1	.
6	2,00	.	.	.	.	+1	.	.	.	.	.	.
7	1,56	.	−1	.	.	.	.	+1	.	.	.	+1
8	1,02	−1	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	1,43	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.
10	1,09	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	0,91	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1

Hiernach ergiebt sich

$$
\begin{aligned}
&\text{für } H_2: \left[\frac{al}{p}\right]=0, && \left[\frac{bl}{p}\right]=0, && \left[\frac{cl}{p}\right]=-1{,}22, \\
&\qquad\quad \left[\frac{dl}{p}\right]=0, && \left[\frac{el}{p}\right]=0, && \left[\frac{ll}{p}\right]=+1{,}22, \\
&\;\;\text{„}\;\; H_3: \left[\frac{al}{p}\right]=0, && \left[\frac{bl}{p}\right]=-1{,}56, && \left[\frac{cl}{p}\right]=-1{,}22, \\
&\qquad\quad \left[\frac{dl}{p}\right]=0, && \left[\frac{el}{p}\right]=0, && \left[\frac{ll}{p}\right]=+2{,}78,
\end{aligned}
$$

$$\text{für } H_4: \left[\frac{al}{p}\right]=0, \quad \left[\frac{bl}{p}\right]=+0{,}89, \quad \left[\frac{cl}{p}\right]=0,$$
$$\left[\frac{dl}{p}\right]=+0{,}89, \quad \left[\frac{el}{p}\right]=0, \quad \left[\frac{ll}{p}\right]=+0{,}89,$$
$$\text{„ } H_5: \left[\frac{al}{p}\right]=+1{,}79, \quad \left[\frac{bl}{p}\right]=0, \quad \left[\frac{cl}{p}\right]=0,$$
$$\left[\frac{dl}{p}\right]=0, \quad \left[\frac{el}{p}\right]=+1{,}79, \quad \left[\frac{ll}{p}\right]=+1{,}79,$$
$$\text{„ } H_6: \left[\frac{al}{p}\right]=+3{,}22, \quad \left[\frac{bl}{p}\right]=0, \quad \left[\frac{cl}{p}\right]=0,$$
$$\left[\frac{dl}{p}\right]=0, \quad \left[\frac{el}{p}\right]=+1{,}79, \quad \left[\frac{ll}{p}\right]=+3{,}22,$$
$$\text{„ } H_7: \left[\frac{al}{p}\right]=-0{,}91, \quad \left[\frac{bl}{p}\right]=-1{,}56, \quad \left[\frac{cl}{p}\right]=-1{,}22,$$
$$\left[\frac{dl}{p}\right]=0, \quad \left[\frac{el}{p}\right]=0, \quad \left[\frac{ll}{p}\right]=+3{,}69.$$

Die bei der Gewichtsberechnung zu benutzenden, bei der Auflösung der Endgleichungen im § 53 gebildeten Zahlenwerthe sind:

$$\mathfrak{a}_1=+7{,}22, \quad -\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}=+0{,}141, \quad -\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}=0{,}000, \quad -\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}=-0{,}136, \quad -\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}=-0{,}248,$$
$$\mathfrak{B}_2=+5{,}60, \quad -\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}=+0{,}405, \quad -\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}=-0{,}184, \quad -\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}=-0{,}045,$$
$$\mathfrak{C}_3=+2{,}57, \quad -\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}=-0{,}163, \quad -\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}=-0{,}039,$$
$$\mathfrak{D}_4=+1{,}48, \quad -\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}=+0{,}209,$$
$$\mathfrak{E}_5=+3{,}28.$$

Mit diesen Zahlenwerthen ergiebt sich das Gewicht P_2 für den wahrscheinlichsten Werth H_2 der Höhe des Punktes 2 nach den Formeln (**232**) bis (**235**) im Schema (**237**) wie folgt:

$\left[\frac{al}{p}\right]\cdot$		$\left[\frac{bl}{p}\right]\cdot$		$\left[\frac{cl}{p}\right]\cdot$		$\left[\frac{dl}{p}\right]\cdot$		$\left[\frac{el}{p}\right]\cdot$		Gewicht P_2.			
$\mathfrak{l}_1$	·	$\mathfrak{l}_2$	·	$\mathfrak{l}_3$	−1,22	$\mathfrak{l}_4$	·	$\mathfrak{l}_5$	·	$\left[\frac{ll}{p}\right]$	+1,22	$\left[\frac{ll}{p}\right]$	+1,22
		$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	·	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	·	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	·	$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	·	$-\frac{\mathfrak{l}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	·	$+\mathfrak{l}_1 r_a$	·
$-\frac{\mathfrak{l}_1}{\mathfrak{a}_1}$		$=\mathfrak{L}_2$	·	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	·	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	·	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	·	$-\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	·	$+\mathfrak{l}_2 r_b$	·
$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}r_e$		$-\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}$		$=\mathfrak{L}_3$	−1,22	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3$	+0,20	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3$	+0,05	$-\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3$	−0,58	$+\mathfrak{l}_3 r_c$	−0,61
$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}r_d$		$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}r_e$		$-\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}$	+0,475	$=\mathfrak{L}_4$	+0,20	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{L}_4$	+0,04	$-\frac{\mathfrak{L}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{L}_4$	−0,03	$+\mathfrak{l}_4 r_d$	·
$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}r_c$		$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}r_d$		$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}r_e$	+0,001	$-\frac{\mathfrak{L}_4}{\mathfrak{D}_4}$	−0,135	$=\mathfrak{L}_5$	+0,09	$-\frac{\mathfrak{L}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{L}_5$	0,00	$+\mathfrak{l}_5 r_e$	·
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}r_b$		$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}r_c$		$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}r_d$	+0,023	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}r_e$	−0,006	$-\frac{\mathfrak{L}_5}{\mathfrak{E}_5}$		$=\frac{1}{P_2}$	0,61	$=\frac{1}{P_2}$	0,61
$=r_a$		$=r_b$		$=r_c$	+0,499	$=r_d$	−0,141	$=r_e$	−0,027			P_2	1,64

Die übrigen Gewichte ergeben sich mit den vorher für die Höhen H_3, H_4, ... H_7 gebildeten Zahlenwerthen von $\left[\frac{al}{p}\right]$, $\left[\frac{bl}{p}\right]$, ... $\left[\frac{el}{p}\right]$, $\left[\frac{ll}{p}\right]$ ganz in derselben Weise, wie das Gewicht P_2. Die sämtlichen Gewichte und die mittleren Fehler der wahrscheinlichsten Werthe der Höhen H_2, H_3, ... H_7 sind:

(235) $P_2 = 1{,}64,\quad P_3 = 1{,}32,\quad P_4 = 2{,}53,\quad P_5 = 1{,}30,\quad P_6 = 0{,}77,\quad P_7 = 0{,}83;$

(236) $$M_2 = \pm m\sqrt{\frac{1}{P_2}} = \pm 3{,}7\sqrt{\frac{1}{1{,}64}} = \pm 2{,}9^{\text{mm}},\quad M_3 = \pm 3{,}7\sqrt{\frac{1}{1{,}32}} = \pm 3{,}2^{\text{mm}},$$

$$M_4 = \pm 3{,}7\sqrt{\frac{1}{2{,}53}} = \pm 2{,}3^{\text{mm}},\quad M_5 = \pm 3{,}7\sqrt{\frac{1}{1{,}30}} = \pm 3{,}2^{\text{mm}},$$

$$M_6 = \pm 3{,}7\sqrt{\frac{1}{0{,}77}} = \pm 4{,}2^{\text{mm}},\quad M_7 = \pm 3{,}7\sqrt{\frac{1}{0{,}83}} = \pm 4{,}1^{\text{mm}}.$$

Die Gewichte sind nach § 35 in unsrer Rechnung derart angesetzt, dafs das Gewicht eines einmaligen Nivellements einer Strecke von 1 Kilometer Länge mit Zielweiten von 50 Meter $\mathfrak{p}_{1\,\text{km}} = 0{,}25$ ist. Daher müssen wir die erhaltenen Zahlenwerthe der Gewichte $P_2, P_3, \ldots. P_6$ mit 4 multipliziren, um sie auf die gebräuchliche Gewichtseinheit zu beziehen, womit wir 6,6, 5,3, 10,1, 5,2, 3,1, 3,3 als Gewichte der wahrscheinlichsten Werthe $H_2, H_3, \ldots. H_7$ der Höhen der Punkte 2, 3, ... 7 erhalten.*)

2. Zu §§ 54 bis 57. Berechnung von Dreiecksnetzen.

a) Wir berechnen zuerst für das als Beispiel 1 gegebene Dreiecksnetz das Gewicht und den mittleren Fehler eines der ausgeglichenen Winkel und zwar des Winkels

(230) $$L = \text{I}.$$

hierfür ist:

(238) $$l_1 = +1,\quad l_2 = 0,\quad l_3 = 0, \ldots.\ l_{12} = 0.$$

Sodann ergiebt sich mit den im § 57, Abtheilung 3 der Tabelle auf Seite 253 nachgewiesenen Zahlenwerthen der Differenzialquotienten:

$$a_1 = +1,\quad b_1 = c_1 = d_1 = e_1 = 0,\quad g_1 = +4{,}6,\quad h_1 = 0$$

und den Gewichten $p = 1$:

(239) $$\begin{cases} \left[\frac{al}{p}\right] = +1,\ \left[\frac{bl}{p}\right] = \left[\frac{cl}{p}\right] = \left[\frac{dl}{p}\right] = \left[\frac{el}{p}\right] = 0,\ \left[\frac{gl}{p}\right] = +4{,}6, \\ \left[\frac{hl}{p}\right] = 0,\ \left[\frac{ll}{p}\right] = +1. \end{cases}$$

Die bei der Gewichtsberechnung zu benutzenden, bei der Auflösung der Endgleichungen im § 57, Seite 254 und 255 gebildeten Zahlenwerthe sind:

$$\mathfrak{D}_4 = +2{,}2,\quad -\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4} = +0{,}409,\quad -\frac{\mathfrak{G}_4}{\mathfrak{D}_4} = -14{,}955,\quad -\frac{\mathfrak{H}_4}{\mathfrak{D}_4} = +6{,}182,$$

$$\mathfrak{E}_5 = +2{,}182,\quad -\frac{\mathfrak{G}_5}{\mathfrak{E}_5} = -24{,}683,\quad -\frac{\mathfrak{H}_5}{\mathfrak{E}_5} = -3{,}362,$$

$$\mathfrak{G}_6 = +1223{,}88,\quad -\frac{\mathfrak{H}_6}{\mathfrak{G}_6} = -0{,}0522,$$

$$\mathfrak{H}_7 = +839{,}53,$$

und die aus der Zusammenstellung der Faktoren der Korrelatengleichungen im § 57, Seite 253, Abtheilung 3, folgenden Zahlenwerthe sind:

*) Vergleiche § 64, Seite 298 u. f.

$\left[\frac{al}{p}\right]\cdot$		$\left[\frac{bl}{p}\right]\cdot$		$\left[\frac{cl}{p}\right]\cdot$		$\left[\frac{dl}{p}\right]\cdot$		$\left[\frac{el}{p}\right]\cdot$		$\left[\frac{gl}{p}\right]\cdot$		$\left[\frac{hl}{p}\right]\cdot$		Gewicht P_I.			
$\mathfrak{l}_1$	+1,00	$\mathfrak{l}_2$	.	$\mathfrak{l}_3$	.	$\mathfrak{l}_4$	.	$\mathfrak{l}_5$	.	$\mathfrak{l}_6$	+ 4,60	$\mathfrak{l}_7$	.	$\left[\frac{ll}{p}\right]$	+1,00	$\left[\frac{ll}{p}\right]$	+1,00
		$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	.	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	.	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	.	$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	—0,5	$-\frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	+ 6,88	$-\frac{\mathfrak{h}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	.	$-\frac{\mathfrak{l}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	—0,25	$+\mathfrak{l}_1 r_a$	—0,74
$-\frac{\mathfrak{l}_1}{\mathfrak{a}_1}$	—0,250	$=\mathfrak{L}_2$	.	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	.	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	.	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	.	$-\frac{\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	.	$-\frac{\mathfrak{H}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	.	$-\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	.	$+\mathfrak{l}_2 r_b$	.
$-\frac{\mathfrak{h}_1}{\mathfrak{a}_1}r_h$	.	$-\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}$	.	$=\mathfrak{L}_3$	.	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3$	.	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3$	.	$-\frac{\mathfrak{G}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3$	.	$-\frac{\mathfrak{H}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3$	.	$-\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3$	.	$+\mathfrak{l}_3 r_c$	.
$-\frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{a}_1}r_g$	—0,134	$-\frac{\mathfrak{H}_2}{\mathfrak{B}_2}r_h$	+0,000	$-\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}$	.	$=\mathfrak{L}_4$	.	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{L}_4$	.	$-\frac{\mathfrak{G}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{L}_4$	.	$-\frac{\mathfrak{H}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{L}_4$	.	$-\frac{\mathfrak{L}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{L}_4$	.	$+\mathfrak{l}_4 r_d$	.
$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}r_e$	—0,356	$-\frac{\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{B}_2}r_g$	—0,111	$-\frac{\mathfrak{H}_3}{\mathfrak{C}_3}r_h$	+0,002	$-\frac{\mathfrak{L}_4}{\mathfrak{D}_4}$	.	$=\mathfrak{L}_5$	—0,5	$-\frac{\mathfrak{G}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{L}_5$	+12,34	$-\frac{\mathfrak{H}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{L}_5$	+1,68	$-\frac{\mathfrak{L}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{L}_5$	—0,11	$+\mathfrak{l}_5 r_e$	.
$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}r_d$	.	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}r_e$	—0,178	$-\frac{\mathfrak{G}_3}{\mathfrak{C}_3}r_g$	—0,209	$-\frac{\mathfrak{H}_4}{\mathfrak{D}_4}r_h$	—0,003	$-\frac{\mathfrak{L}_5}{\mathfrak{E}_5}$	+0,229	$=\mathfrak{L}_6$	+23,82	$-\frac{\mathfrak{H}_6}{\mathfrak{G}_6}\mathfrak{L}_6$	—1,24	$-\frac{\mathfrak{L}_6}{\mathfrak{G}_6}\mathfrak{L}_6$	—0,46	$+\mathfrak{l}_6 r_g$	—0,09
$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}r_c$	.	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}r_d$	—0,290	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}r_e$	—0,178	$-\frac{\mathfrak{G}_4}{\mathfrak{D}_4}r_g$	+0,292	$-\frac{\mathfrak{H}_5}{\mathfrak{E}_5}r_h$	+0,002	$-\frac{\mathfrak{L}_6}{\mathfrak{G}_6}$	—0,0195	$=\mathfrak{L}_7$	+0,44	$-\frac{\mathfrak{L}_7}{\mathfrak{H}_7}\mathfrak{L}_7$	—0,00	$+\mathfrak{l}_7 r_h$	.
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}r_b$	.	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}r_c$	.	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}r_d$	—0,232	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}r_e$	+0,291	$-\frac{\mathfrak{G}_5}{\mathfrak{E}_5}r_g$	+0,481	$-\frac{\mathfrak{H}_6}{\mathfrak{G}_6}r_h$	+0,0000	$-\frac{\mathfrak{L}_7}{\mathfrak{H}_7}$	—0,0005	$=\frac{1}{P_I}$	+0,18	$=\frac{1}{P_I}$	+0,17
$=r_a$	—0,740	$=r_b$	—0,579	$=r_c$	—0,617	$=r_d$	+0,580	$=r_e$	+0,712	$=r_g$	—0,0195	$=r_h$		$M_I = \pm m\sqrt{\frac{1}{P_I}}$		P_I	5,7

$$= \pm 1{,}9\sqrt{0{,}175} = \pm 0{,}75''$$

$$\mathfrak{a}_1 = +4, \quad -\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1} = 0, \quad -\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1} = 0, \quad -\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1} = 0, \quad -\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1} = -0{,}5,$$

$$-\frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{a}_1} = +\ 6{,}88, \quad -\frac{\mathfrak{h}_1}{\mathfrak{a}_1} = 0,$$

$$\mathfrak{B}_2 = +4, \quad -\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2} = 0, \quad -\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2} = -\ 0{,}5, \quad -\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2} = -0{,}25,$$

$$-\frac{\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{B}_2} = +\ 5{,}70, \quad -\frac{\mathfrak{H}_2}{\mathfrak{B}_2} = -\ 0{,}28,$$

$$\mathfrak{C}_3 = +5, \quad -\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3} = -\ 0{,}4, \quad -\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3} = -\ 0{,}20,$$

$$-\frac{\mathfrak{G}_3}{\mathfrak{C}_3} = +\ 10{,}74, \quad -\frac{\mathfrak{H}_3}{\mathfrak{C}_3} = -\ 4{,}10.$$

Mit diesen Zahlenwerthen ergiebt sich das Gewicht P_I und der mittlere Fehler M_I für den wahrscheinlichsten Werth I des Winkels 2 1 3 nach den Formeln (**232**) bis (**236**) im Schema (**237**) wie folgt: (Siehe die Tabelle auf Seite 314.)

b) Der wahrscheinlichste Werth S_{5-3} der Dreiecksseite 5—3 ergiebt sich aus dem wahrscheinlichsten Werth S_{5-1} der Dreiecksseite 5—1 nach:

$$S_{5-3} = \frac{\sin \text{II}}{\sin \text{VII}} S_{5-1},$$

oder es ist:

(**230**) $$L = \log S_{5-3} = \log \sin \text{II} - \log \sin \text{VII} + \log S_{5-1}.$$

Um hiernach den mittleren Fehler M_{5-3} von $L = \log S_{5-3}$ zu erhalten, differenziren wir nach 1, 2, 3, ... 13 und erhalten:

(**231**) $$l_1 = 0, \ l_2 = 1000\,0000\, M \frac{1}{\varrho''} \operatorname{cotg} 2 = +5{,}9, \ l_3 = l_4 = l_5 = l_6 = 0,$$

$$l_7 = 1000\,0000\, M \frac{1}{\varrho''} \operatorname{cotg} 7 = -53{,}9, \ l_8 = l_9 = \cdots l_{13} = 0.$$

Nach § 57, Seite 253, Abtheilung 3, ist ferner:

$$p_2 = 1, \ a_2 = +1, \ b_2 = 0, \ c_2 = 0, \ d_2 = 0, \ e_2 = +1, \ g_2 = -\ 1{,}3, \ h_2 = 0,$$
$$p_7 = 1, \ a_7 = 0, \ b_7 = 0, \ c_7 = +1, \ d_7 = 0, \ e_7 = +1, \ g_7 = +11{,}5, \ h_7 = -2{,}8,$$

womit sich ergiebt:

$$\left[\frac{al}{p}\right] = +5{,}9, \ \left[\frac{bl}{p}\right] = 0, \ \left[\frac{cl}{p}\right] = -53{,}9, \ \left[\frac{dl}{p}\right] = 0, \ \left[\frac{el}{p}\right] = -48{,}0,$$

$$\left[\frac{gl}{p}\right] = -627{,}5, \ \left[\frac{hl}{p}\right] = +150{,}9, \ \left[\frac{ll}{p}\right] = +2940{,}0.$$

Mit diesen Zahlenwerthen ergiebt sich das Gewicht p_{5-3} und der mittlere Fehler m_{5-3}, die für die Dreiecksseite 5—1 aus der vorliegenden Dreiecksnetzausgleichung entspringen, wie folgt: (Siehe die Tabelle auf Seite 316.)

Für den wahrscheinlichsten Werth $\log S_{5-1}$ der Dreiecksseite 5—1 ist in der Ausgleichung eines anschliefsenden Dreiecksnetzes der mittlere Fehler $M_{5-1} = \pm 18{,}9$ erhalten, womit sich

$$M_{5-3} = \pm \sqrt{M^2_{5-1} + m^2_{5-3}} = \pm \sqrt{52{,}6^2 + 18{,}9^2} = \pm\ 55{,}9 \text{ Einheiten}$$

der siebenten Dezimalstelle der Logarithmen ergiebt.

$\left[\frac{al}{p}\right]$.		$\left[\frac{bl}{p}\right]$.		$\left[\frac{cl}{p}\right]$.		$\left[\frac{dl}{p}\right]$.		$\left[\frac{el}{p}\right]$.		$\left[\frac{gl}{p}\right]$.		$\left[\frac{hl}{p}\right]$.		Gewicht p_{5-3}.			
$\mathfrak{l}_1$	+5,9	$\mathfrak{l}_2$	·	$\mathfrak{l}_3$	−53,9	$\mathfrak{l}_4$	·	$\mathfrak{l}_5$	−48,0	$\mathfrak{l}_6$	−627,5	$\mathfrak{l}_7$	+150,9	$\left[\frac{ll}{p}\right]$	+2940	$\left[\frac{ll}{p}\right]$	+2940
		$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	·	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	·	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	·	$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	− 3,0	$-\frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	+ 40,6	$-\frac{\mathfrak{h}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	·	$-\frac{\mathfrak{l}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	− 9	$+l_1 r_a$	+ 12
$-\frac{\mathfrak{l}_1}{\mathfrak{a}_1}$	−1,48	$=\mathfrak{L}_2$	·	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	·	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	·	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	·	$-\frac{\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	·	$-\frac{\mathfrak{H}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	·	$-\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	·	$+l_2 r_b$	·
$-\frac{\mathfrak{h}_1}{\mathfrak{a}_1}r_h$	·	$-\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}$	·	$=\mathfrak{L}_3$	−53,9	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3$	+21,6	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3$	+10,8	$-\frac{\mathfrak{G}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3$	−578,9	$-\frac{\mathfrak{H}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3$	+221,0	$-\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3$	− 581	$+l_3 r_c$	−1596
$-\frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{a}_1}r_g$	+4,29	$-\frac{\mathfrak{H}_2}{\mathfrak{B}_2}r_h$	+ 0,22	$-\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}$	+10,78	$=\mathfrak{L}_4$	+21,6	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{L}_4$	+ 8,8	$-\frac{\mathfrak{G}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{L}_4$	−323,0	$-\frac{\mathfrak{H}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{L}_4$	+133,5	$-\frac{\mathfrak{L}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{L}_4$	− 212	$+l_4 r_d$	·
$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}r_e$	−0,80	$-\frac{\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{B}_2}r_g$	+ 3,55	$-\frac{\mathfrak{H}_3}{\mathfrak{C}_3}r_h$	+ 3,17	$-\frac{\mathfrak{L}_4}{\mathfrak{D}_4}$	− 9,82	$\mathfrak{L}_5$	−31,4	$-\frac{\mathfrak{G}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{L}_5$	+775,0	$-\frac{\mathfrak{H}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{L}_5$	+105,6	$-\frac{\mathfrak{L}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{L}_5$	− 452	$+l_5 r_e$	− 77
$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}r_d$	·	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}r_e$	− 0,40	$-\frac{\mathfrak{G}_3}{\mathfrak{C}_3}r_g$	+ 6,69	$-\frac{\mathfrak{H}_4}{\mathfrak{D}_4}r_h$	− 4,77	$-\frac{\mathfrak{L}_5}{\mathfrak{E}_5}$	+14,39	$=\mathfrak{L}_6$	−713,8	$-\frac{\mathfrak{H}_6}{\mathfrak{G}_6}\mathfrak{L}_6$	+ 37,2	$-\frac{\mathfrak{L}_6}{\mathfrak{G}_6}\mathfrak{L}_6$	− 416	$+l_6 r_g$	− 391
$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}r_c$	·	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}r_d$	+11,62	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}r_e$	− 0,32	$-\frac{\mathfrak{G}_4}{\mathfrak{D}_4}r_g$	− 9,32	$-\frac{\mathfrak{H}_5}{\mathfrak{E}_5}r_h$	+ 2,60	$-\frac{\mathfrak{L}_6}{\mathfrak{G}_6}$	+0,583	$=\mathfrak{L}_7$	+648,2	$-\frac{\mathfrak{L}_7}{\mathfrak{H}_7}\mathfrak{L}_7$	− 500	$+l_7 r_h$	− 116
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}r_b$	·	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}r_c$	·	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}r_d$	+ 9,30	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}r_e$	+ 0,66	$-\frac{\mathfrak{G}_5}{\mathfrak{E}_5}r_g$	−15,38	$-\frac{\mathfrak{H}_6}{\mathfrak{G}_6}r_h$	+0,040	$-\frac{\mathfrak{L}_7}{\mathfrak{H}_7}$		$=\frac{1}{p_{5-3}}$	+ 770	$=\frac{1}{p_{5-3}}$	+ 772
$=r_a$	+2,01	$=r_b$	+14,99	$=r_c$	+29,62	$=r_d$	−23,25	$=r_e$	+ 1,61	$=r_g$	+0,623	$=r_h$	−0,772			p_{5-3}	0,00 130

$$m_{5-3} = \pm m \sqrt{\frac{1}{p_{5-3}}} = \pm 1,9 \sqrt{770} = \pm 52,6$$

3. Kapitel. Für bedingte vermittelnde Beobachtungen.

§ 67. Gewicht und mittlerer Fehler einer Funktion der wahrscheinlichsten Werthe der zu bestimmenden Gröfsen.

1. Sollen wir das Gewicht P_L und den mittleren Fehler M_L einer Funktion

(240) $$L = \varphi(x, y, z, \cdots)$$

der nach dem Verfahren für bedingte vermittelnde Beobachtungen erhaltenen wahrscheinlichsten Werthe x, y, z, ... der zu bestimmenden Gröfsen ermitteln, so können wir die Werthe x, y, z, ... zuerst zerlegen in die Näherungswerthe $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ..., die diesen nach dem Verfahren für vermittelnde Beobachtungen beizufügenden Aenderungen $d\mathfrak{x}_0$, $d\mathfrak{y}_0$, $d\mathfrak{z}_0$, ... und die nach dem Verfahren für bedingte Beobachtungen noch hinzukommenden Verbesserungen (1), (2), (3), ..., so dafs wird:

(1*) $$L = \varphi(\mathfrak{x} + d\mathfrak{x}_0 + (1),\ \mathfrak{y} + d\mathfrak{y}_0 + (2),\ \mathfrak{z} + d\mathfrak{z}_0 + (3), \ldots)$$

oder, wenn

(241) $$l_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{x}}, \quad \Big| \quad l_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{y}}, \quad \Big| \quad l_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{z}}, \quad \Big| \quad \ldots$$

gesetzt wird,:

(2*) $$\begin{aligned} L = \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots) &+ l_1\, d\mathfrak{x}_0 + l_2\, d\mathfrak{y}_0 + l_3\, d\mathfrak{z}_0 + \cdots \\ &+ l_1(1) + l_2(2) + l_3(3) + \cdots \end{aligned}$$

Wenn wir dann die Verbesserungen (1), (2), (3), ... durch die Aenderungen $d\mathfrak{x}_0$, $d\mathfrak{y}_0$, $d\mathfrak{z}_0$, ... ausdrücken, so dafs L als Funktion dieser nach dem Verfahren für vermittelnde Beobachtungen erhaltenen Werthe erscheint, so können wir das Gewicht $\frac{1}{P_L}$ nach den im § 63 erhaltenen Formeln angeben.

2. Setzen wir demnach in Gleichung (2*) für (1), (2), (3), ... die dafür in den Korrelatengleichungen (**206**) gegebenen Ausdrücke, so wird

(3*) $$\begin{aligned} L = \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots) &+ l_1\, d\mathfrak{x}_0 + l_2\, d\mathfrak{y}_0 + l_3\, d\mathfrak{z}_0 + \cdots \\ &+ [(\mathfrak{A})l]\,k_A + [(\mathfrak{B})l]\,k_B + \cdots\cdots \end{aligned}$$

Aehnlich wie im § 65, Nr. 2 stellen wir nun k_A, k_B, ... zunächst als Funktion der Widersprüche f_a, f_b, ... und dann als Funktion der $d\mathfrak{x}_0$, $d\mathfrak{y}_0$, $d\mathfrak{z}_0$, ... dar, indem wir zuerst die Endgleichungen

(209) $$\begin{cases} [A(\mathfrak{A})]\,k_A + [A(\mathfrak{B})]\,k_B + \cdots = f_a, \\ [A(\mathfrak{B})]\,k_A + [B(\mathfrak{B})]\,k_B + \cdots = f_b, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

mit Hülfe der Koeffizienten q_{11}, q_{12}, ...; q_{21}, q_{22}, ...; .... auflösen.

Diese Koeffizienten setzen wir derart fest, dafs wird:

(4*) $$\begin{cases} [A(\mathfrak{A})]\,q_{11} + [A(\mathfrak{B})]\,q_{12} + \cdots = 1, \\ [A(\mathfrak{B})]\,q_{11} + [B(\mathfrak{B})]\,q_{12} + \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ; \\ [A(\mathfrak{A})]\,q_{21} + [A(\mathfrak{B})]\,q_{22} + \cdots = 0, \\ [A(\mathfrak{B})]\,q_{21} + [B(\mathfrak{B})]\,q_{22} + \cdots = 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ; \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Dann erhalten wir ähnlich wie im § 62, Nr. 2:

$$(5^*)\qquad \begin{cases} k_A = f_a q_{11} + f_b q_{12} + \cdots, \\ k_B = f_a q_{21} + f_b q_{22} + \cdots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Nun ist nach den Gleichungen (**199**) und (**200**)

$$(6^*)\qquad \begin{cases} f_a = S_A - F_A(\mathfrak{x} + d\mathfrak{x}_0,\ \mathfrak{y} + d\mathfrak{y}_0,\ \mathfrak{z} + d\mathfrak{z}_0,\ \ldots), \\ f_b = S_B - F_B(\mathfrak{x} + d\mathfrak{x}_0,\ \mathfrak{y} + d\mathfrak{y}_0,\ \mathfrak{z} + d\mathfrak{z}_0,\ \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

oder mit Einführung der Differenzialquotienten $A_1, A_2, A_3, \ldots; B_1, B_2, B_3, \ldots; \ldots$ nach den Formeln (**201**):

$$(7^*)\qquad \begin{cases} f_a = (S_A - F_A(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots) - A_1 d\mathfrak{x}_0 - A_2 d\mathfrak{y}_0 - A_3 d\mathfrak{z}_0 - \cdots), \\ f_b = (S_B - F_B(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots) - B_1 d\mathfrak{x}_0 - B_2 d\mathfrak{y}_0 - B_3 d\mathfrak{z}_0 - \cdots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Hiermit wird:

$$(8^*)\qquad \begin{cases} k_A = (S_A - F_A(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots) - A_1 d\mathfrak{x}_0 - A_2 d\mathfrak{y}_0 - A_3 d\mathfrak{z}_0 - \cdots) q_{11} \\ \quad + (S_B - F_B(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots) - B_1 d\mathfrak{x}_0 - B_2 d\mathfrak{y}_0 - B_3 d\mathfrak{z}_0 - \cdots) q_{12} \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ k_B = (S_A - F_A(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots) - A_1 d\mathfrak{x}_0 - A_2 d\mathfrak{y}_0 - A_3 d\mathfrak{z}_0 - \cdots) q_{21} \\ \quad + (S_B - F_B(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots) - B_1 d\mathfrak{x}_0 - B_2 d\mathfrak{y}_0 - B_3 d\mathfrak{z}_0 - \cdots) q_{22} \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

u. s. w.

Diese Ausdrücke für $k_A, k_B, \ldots$ in (3*) eingesetzt, giebt:

$$\begin{aligned} (9^*)\qquad L = \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots) \qquad & + l_1 d\mathfrak{x}_0 + l_2 d\mathfrak{y}_0 + l_3 d\mathfrak{z}_0 + \cdots \\ + (S_A - F_A(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots) & - A_1 d\mathfrak{x}_0 - A_2 d\mathfrak{y}_0 - A_3 d\mathfrak{z}_0 - \cdots)([(\mathfrak{A})l]q_{11} \\ & + [(\mathfrak{B})l]q_{12} + \cdots) \\ + (S_B - F_B(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots) & - B_1 d\mathfrak{x}_0 - B_2 d\mathfrak{y}_0 - B_3 d\mathfrak{z}_0 - \cdots)([(\mathfrak{A})l]q_{21} \\ & + [(\mathfrak{B})l]q_{22} + \cdots) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck für L kann noch vereinfacht werden durch Einführung der Koeffizienten $r_A, r_B, \ldots$ Wir setzen:

$$(\mathbf{242})\qquad \begin{cases} [A(\mathfrak{A})] r_A + [A(\mathfrak{B})] r_B + \cdots [(\mathfrak{A})l] = 0, \\ [A(\mathfrak{B})] r_A + [B(\mathfrak{B})] r_B + \cdots [(\mathfrak{B})l] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

und erhalten daraus ebenso wie wir oben die Ausdrücke (5*) für $k_A, k_B, \cdots$ aus den Endgleichungen (**209**) erhalten haben:

$$(10^*)\qquad \begin{cases} r_A = -[(\mathfrak{A})l]q_{11} - [(\mathfrak{B})l]q_{12} - \cdots, \\ r_B = -[(\mathfrak{A})l]q_{21} - [(\mathfrak{B})l]q_{22} - \cdots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

womit Gleichung (9*) übergeht in:

$$\begin{aligned} (11^*)\qquad L = \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \cdots) \qquad & + l_1 d\mathfrak{x}_0 + l_2 d\mathfrak{y}_0 + l_3 d\mathfrak{z}_0 + \cdots \\ + (-S_A + F_A(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \cdots) & + A_1 d\mathfrak{x}_0 + A_2 d\mathfrak{y}_0 + A_3 d\mathfrak{z}_0 + \cdots) r_A \\ + (-S_B + F_B(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \cdots) & + B_1 d\mathfrak{x}_0 + B_2 d\mathfrak{y}_0 + B_3 d\mathfrak{z}_0 + \cdots) r_B \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

3. Hiernach sind die partiellen Differenzialquotienten von L nach $d\mathfrak{x}_0, d\mathfrak{y}_0, d\mathfrak{z}_0, \ldots$:

$$(243)\quad \begin{cases} L_1 = \dfrac{\partial L}{\partial d\mathfrak{x}_0} = l_1 + A_1 r_A + B_1 r_B + \cdots\cdot, \\ L_2 = \dfrac{\partial L}{\partial d\mathfrak{y}_0} = l_2 + A_2 r_A + B_2 r_B + \cdots\cdot, \\ L_3 = \dfrac{\partial L}{\partial d\mathfrak{z}_0} = l_3 + A_3 r_A + B_3 r_B + \cdots\cdot, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

womit, nachdem die Zahlenwerthe von $r_A, r_B, \dots.$ durch Auflösung der Gleichungen (**242**) erlangt sind, nach den Formeln (**224**) bis (**228**) weiter gerechnet werden kann, indem für die hierin vorkommenden Differenzialquotienten $l_1, l_2, l_3, \cdots\cdot$ die sich nach den Formeln (**243**) ergebenden Differenzialquotienten $L_1, L_2, L_3, \dots.$ gesetzt werden.

4. Ebenso wie wir aber die Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe $x, y, z, \dots.$ der zu bestimmenden Gröfsen nach dem Verfahren für bedingte vermittelnde Beobachtungen in zwei Teile getrennt haben, können wir nun auch zweckmäfsig die Gewichtsberechnung in zwei Teile derart trennen, dafs der eine Theil nach dem Verfahren für vermittelnde Beobachtungen, der andere Teil nach dem Verfahren für bedingte Beobachtungen durchgeführt wird.

Setzen wir die in den Formeln (**243**) gegebenen Ausdrücke für $L_1, L_2, L_3, \dots.$ in die aus den Formeln (**225**) folgenden Formeln

$$(12^*)\quad \begin{cases} [paa]\,Q_1 + [pab]\,Q_2 + [pac]\,Q_3 + \cdots\cdot = L_1, \\ [pab]\,Q_1 + [pbb]\,Q_2 + [pbc]\,Q_3 + \cdots\cdot = L_2, \\ [pac]\,Q_1 + [pbc]\,Q_2 + [pcc]\,Q_3 + \cdots\cdot = L_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

ein und beachten die Formeln (**205**), so erhalten wir nach den Formeln (1*) im § 62:

$$(13^*)\quad \begin{cases} Q_1 = l_1 Q_{11} + l_2 Q_{12} + l_3 Q_{13} + \cdots\cdot + (\mathfrak{A}_1)\,r_A + (\mathfrak{B}_1)\,r_B + \cdots\cdot, \\ Q_2 = l_1 Q_{12} + l_2 Q_{22} + l_3 Q_{23} + \cdots\cdot + (\mathfrak{A}_2)\,r_A + (\mathfrak{B}_2)\,r_B + \cdots\cdot, \\ Q_3 = l_1 Q_{13} + l_2 Q_{23} + l_3 Q_{33} + \cdots\cdot + (\mathfrak{A}_3)\,r_A + (\mathfrak{B}_3)\,r_B + \cdots\cdot, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Führen wir nun die Hülfsgröfsen $q_1, q_2, q_3, \dots.$ ein und setzen sie derart fest, dafs

$$(244)\quad \begin{cases} [paa]\,q_1 + [pab]\,q_2 + [pac]\,q_3 + \cdots\cdot = l_1, \\ [pab]\,q_1 + [pbb]\,q_2 + [pbc]\,q_3 + \cdots\cdot = l_2, \\ [pac]\,q_1 + [pbc]\,q_2 + [pcc]\,q_3 + \cdots\cdot = l_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

wird, so wird wieder nach den Formeln (1*) im § 62:

$$(14^*)\quad \begin{cases} q_1 = l_1 Q_{11} + l_2 Q_{12} + l_3 Q_{13} + \cdots\cdot, \\ q_2 = l_1 Q_{12} + l_2 Q_{22} + l_3 Q_{23} + \cdots\cdot, \\ q_3 = l_1 Q_{13} + l_2 Q_{23} + l_3 Q_{33} + \cdots\cdot, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

und damit:

$$(15^*)\quad \begin{cases} Q_1 = q_1 + (\mathfrak{A}_1)\,r_A + (\mathfrak{B}_1)\,r_B + \cdots\cdot, \\ Q_2 = q_2 + (\mathfrak{A}_2)\,r_A + (\mathfrak{B}_2)\,r_B + \cdots\cdot, \\ Q_3 = q_3 + (\mathfrak{A}_3)\,r_A + (\mathfrak{B}_3)\,r_B + \cdots\cdot, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Setzen wir diese Ausdrücke für $Q_1, Q_2, Q_3, \dots.$ und die in den Formeln (**243**) gegebenen Ausdrücke für $L_1, L_2, L_3, \cdots\cdot$ in die aus Formel (**227**) folgende Formel

$$(16^*)\quad \frac{1}{P_L} = L_1 Q_1 + L_2 Q_2 + L_3 Q_3 + \cdots\cdot$$

ein, so ergiebt sich:

(17*)
$$\begin{aligned}\frac{1}{P_L} = {} & [lq] + [(\mathfrak{A})l]\, r_A + [(\mathfrak{B})l]\, r_B + \cdots \\ & + [Aq]\, r_A + [A(\mathfrak{A})]\, r_A r_A + [A(\mathfrak{B})]\, r_A r_B + \cdots \\ & + [Bq]\, r_B + [B(\mathfrak{A})]\, r_B r_A + [B(\mathfrak{B})]\, r_B r_B + \cdots \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,\end{aligned}$$

woraus mit Beachtung der Gleichungen (**242**) wird:

(18*)
$$\frac{1}{P_L} = [lq] + [Aq]\, r_A + [Bq]\, r_B + \cdots$$

Nun ist nach den Gleichungen (14*):

(19*)
$$\begin{aligned}[][Aq] = {} & A_1 l_1 Q_{11} + A_1 l_2 Q_{12} + A_1 l_3 Q_{13} + \cdots \\ & + A_2 l_1 Q_{12} + A_2 l_2 Q_{22} + A_2 l_3 Q_{23} + \cdots \\ & + A_3 l_1 Q_{13} + A_3 l_2 Q_{23} + A_3 l_3 Q_{33} + \cdots \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,\end{aligned}$$

woraus nach den Formeln (**205**) wird:

(20a*)
$$[Aq] = +(\mathfrak{A}_1) l_1 + (\mathfrak{A}_2) l_2 + (\mathfrak{A}_3) l_3 + \cdots = +[(\mathfrak{A})l].$$

Ebenso ist:

(20b*)
$$[Bq] = +(\mathfrak{B}_1) l_1 + (\mathfrak{B}_2) l_2 + (\mathfrak{B}_3) l_3 + \cdots = +[(\mathfrak{B})l],$$

u. s. w.

Damit wird:

(21*)
$$\frac{1}{P_L} = [lq] + [(\mathfrak{A})l]\, r_A + [(\mathfrak{B})l]\, r_B + \cdots$$

Hierin ist $[lq]$ der Werth, den wir bei Auflösung der Gleichungen (**244**) nach dem im § 63 dargelegten Verfahren mit

(**245**)
$$\left\{\begin{array}{l|l|l|l|l} \mathfrak{a}_1 = [paa], & \mathfrak{b}_1 = [pab], & \mathfrak{c}_1 = [pac], & \cdots, & l_1, \\ & \mathfrak{b}_2 = [pbb], & \mathfrak{c}_2 = [pbc], & \cdots, & l_2, \\ & & \mathfrak{c}_3 = [pcc], & \cdots, & l_3, \\ & & & \cdots, & \cdots, \\ \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{b}_2 - \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1, & \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{c}_2 - \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1, & & \cdots, & \mathfrak{L}_2 = l_2 - \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1} l_1, \\ & \mathfrak{C}_3 = \mathfrak{c}_3 - \frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1 - \frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{C}_2, & & \cdots, & \mathfrak{L}_3 = l_3 - \frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1} l_1 - \frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2, \\ & & & \cdots, & \cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

nach den Formeln (**227**) und (**226**) im § 63 erhalten, nämlich:

(**246**)
$$\begin{aligned}[][lq] & = l_1 q_1 + l_2 q_2 + l_3 q_3 + \cdots, \\ & = \frac{l_1}{\mathfrak{a}_1} l_1 + \frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2 + \frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{B}_3}\mathfrak{L}_3 + \cdots\end{aligned}$$

Die Auflösung der Gleichungen (**243**) und die Berechnung von $[lq]$ wird zweckmäfsig nach folgendem Schema ausgeführt:

(**247**)

l_1	l_2	l_3	....	$[lq]$.	
	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1} l_1$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1} l_1$	....	$+\frac{l_1}{\mathfrak{a}_1} l_1$	$+l_1 q_1$
$+\frac{l_1}{\mathfrak{a}_1}$	$=\mathfrak{L}_2$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{C}_2$	....	$+\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	$+l_2 q_2$
....	$+\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{C}_2}$	$=\mathfrak{L}_3$	....	$+\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3$	$+l_3 q_3$
$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1} q_3$	....	$+\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}$	....	....	......
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1} q_2$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2} q_3$	....	....	$= [lq] =$	
$=q_1$	$=q_2$	$=q_3$	....		

Indem wir dann die Gleichungen (**242**) nach dem im § 65, Nr. 6 dargelegten Verfahren auflösen mit:

(248)
$$\left\{\begin{array}{l|l|l|l}
\mathfrak{a}_1=[A(\mathfrak{A})], & \mathfrak{b}_1=[A(\mathfrak{B})], & \ldots., & \mathfrak{l}_1=[(\mathfrak{A})l], \\
 & \mathfrak{b}_2=[B(\mathfrak{B})], & \ldots., & \mathfrak{l}_2=[(\mathfrak{B})l], \\
 & & \ldots., & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
 & \mathfrak{B}_2=\mathfrak{b}_2-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1, & \ldots., & \mathfrak{L}_2=\mathfrak{l}_2-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1, \\
 & & \ldots., & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

erhalten wir weiter für $\frac{1}{P_L}$ nach Formel (21*) und (**235**):

(249)
$$\begin{aligned}\frac{1}{P_L}&=[lq]+\mathfrak{l}_1 r_A+\mathfrak{l}_2 r_B+\cdots, \\ &=[lq]-\frac{\mathfrak{l}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1-\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2-\cdots\end{aligned}$$

Sodann ergiebt sich auch der mittlere Fehler M_L von L nach

(250)
$$M_L=\pm m\sqrt{\frac{1}{P_L}}.$$

Die Auflösung der Gleichungen (**242**) und die Berechnung des Gewichtes P_L wird zweckmäfsig nach folgendem Schema ausgeführt:

(251)

$[(\mathfrak{A})l]$	$[(\mathfrak{B})l]$	....	Gewicht P_L.	
$\mathfrak{l}_1$	$\mathfrak{l}_2$	....	$[lq]$	$[lq]$
	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	....	$-\frac{\mathfrak{l}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	$+\mathfrak{l}_1 r_A$
$-\frac{\mathfrak{l}_1}{\mathfrak{a}_1}$	$=\mathfrak{L}_2$	....	$-\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	$+\mathfrak{l}_2 r_B$
....	$-\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}$	....	....	....
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}r_B$	....	....	$=\frac{1}{P_L}=$	
$=r_A$	$=r_B$	....		

5. Wenn die Gewichte P_x, P_y, P_z, ... und die mittleren Fehler M_x, M_y, M_z, ... für die wahrscheinlichsten Werthe x, y, z, ... der zu bestimmenden Gröfsen, also für die einfachen Funktionen

$$L_x=x,\quad L_y=y,\quad L_z=z,\quad \ldots.$$

anzugeben sind, so wird nach den Formeln (**241**):

(252)
$$\left\{\begin{array}{lllll}
\text{für } L_x=x: & l_1=1, & l_2=0, & l_3=0, & \ldots., \\
\;\;\text{„}\;\; L_y=y: & l_1=0, & l_2=1, & l_3=0, & \ldots., \\
\;\;\text{„}\;\; L_z=z: & l_1=0, & l_2=0, & l_3=1, & \ldots., \\
\ldots\ldots & & & &
\end{array}\right.$$

Dementsprechend wird dann:

(253)
$$\left\{\begin{array}{llll}
\text{für } L_x=x: & [(\mathfrak{A})l]=(\mathfrak{A}_1), & [(\mathfrak{B})l]=(\mathfrak{B}_1), & \ldots., \\
\;\;\text{„}\;\; L_y=y: & [(\mathfrak{A})l]=(\mathfrak{A}_2), & [(\mathfrak{B})l]=(\mathfrak{B}_2), & \ldots., \\
\;\;\text{„}\;\; L_z=z: & [(\mathfrak{A})l]=(\mathfrak{A}_3), & [(\mathfrak{B})l]=(\mathfrak{B}_3), & \ldots., \\
\ldots\ldots & & &
\end{array}\right.$$

und ferner:

$$
(254)\quad \begin{cases}
\text{für } L_x = x: & q_1 = Q_{11}, \quad q_2 = Q_{12}, \quad q_3 = Q_{13}, \quad \ldots\ldots, \quad [lq] = Q_{11}, \\
\;\;\text{,,}\;\; L_y = y: & q_1 = Q_{12}, \quad q_2 = Q_{22}, \quad q_3 = Q_{23}, \quad \ldots\ldots, \quad [lq] = Q_{22}, \\
\;\;\text{,,}\;\; L_z = z: & q_1 = Q_{13}, \quad q_2 = Q_{23}, \quad q_3 = Q_{33}, \quad \ldots\ldots, \quad [lq] = Q_{33}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

Im Uebrigen finden die vorentwickelten Formeln unverändert Anwendung.

§ 68. Beispiel zu dem im § 67 entwickelten Verfahren.

1. Wir wenden das im § 67 entwickelte Verfahren auf das im § 61 behandelte Dreiecksnetz an, indem wir das Gewicht P_W und den mittleren Fehler M_W des wahrscheinlichsten Werthes des Winkels $P_1\ P\ P_2$ berechnen.

Der wahrscheinlichste Werth W dieses Winkels ergiebt sich aus den wahrscheinlichsten Werthen R der Richtungen nach:

$$
(240)\qquad W = -R_1 + R_2,
$$

wonach die Differenzialquotienten $l = \frac{\partial W}{\partial R}$ sind:

$$
(241)\qquad l_1 = -1, \quad l_2 = +1, \quad l_3 = l_4 = \cdots\cdot l_{16} = 0.
$$

Nach § 61, Nr. 7 sind die quadratischen Faktoren $[paa]$, $[pbb]$, $[pcc]$, ... der Endgleichungen (**194**) sämtlich gleich $\nu p = 24$, während alle übrigen Faktoren $= 0$ sind. Demnach erhalten wir zur Bestimmung der Koeffizienten q_1, q_2, q_3, q_4, ... q_{16} die Gleichungen:

$$
(244)\quad \begin{cases}
(\nu p = 24)\, q_1 = -1, \text{ und demnach: } & q_1 = -0{,}0417, \\
(\nu p = 24)\, q_2 = +1, & q_2 = +0{,}0417, \\
(\nu p = 24)\, q_3 = 0, & q_3 = 0{,}0, \\
(\nu p = 24)\, q_4 = 0, & q_4 = 0{,}0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\
(\nu p = 24)\, q_{16} = 0, & q_{16} = 0{,}0.
\end{cases}
$$

Somit ist

$$
(246)\qquad [lq] = l_1 q_1 + l_2 q_2 + l_3 q_3 + l_4 q_4 + \cdots\cdot l_{16} q_{16} = +0{,}0834.
$$

2. Weiter ergeben sich mit den im § 61, Nr. 8 zusammengestellten Zahlenwerthen der Koeffizienten $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{C})$, $(\mathfrak{D})$, $(\mathfrak{E})$ die folgenden Absolutglieder der Gleichungen (**241**):

$$
[(\mathfrak{A})\, l] = +0{,}0834, \quad [(\mathfrak{B})\, l] = -0{,}0417, \quad [(\mathfrak{C})\, l] = 0{,}0,
$$
$$
[(\mathfrak{D})\, l] = -0{,}0417, \quad [(\mathfrak{E})\, l] = 0{,}0.
$$

Die übrigen zur Berechnung des Gewichtes P_W nach den Formeln (**248**) und (**249**) erforderlichen Zahlenwerthe sind nach § 61, Nr. 9, Abtheilung 4 der Tabelle auf Seite 282 und 283:

$$
\mathfrak{a}_1 = +0{,}250, \; -\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1} = +0{,}333, \; -\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1} = 0{,}0, \quad -\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1} = +0{,}333, \; -\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1} = +0{,}1536,
$$
$$
\mathfrak{B}_2 = +0{,}222, \; -\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2} = +0{,}375, \; -\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2} = +0{,}125, \; -\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2} = -0{,}0809,
$$
$$
\mathfrak{C}_3 = +0{,}219, \; -\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3} = +0{,}429, \; -\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3} = +0{,}0356,
$$
$$
\mathfrak{D}_4 = +0{,}179, \; -\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4} = -0{,}0468,
$$
$$
\mathfrak{E}_5 = +0{,}0668.
$$

Hiermit ergiebt sich das Gewicht P_W und der mittlere Fehler M_W des wahrscheinlichsten Werthes W des Winkels $P_1 P P_2$ im Schema (**251**) wie folgt:

$[(\mathfrak{A})l]$		$[(\mathfrak{B})l]$		$[(\mathfrak{C})l]$		$[(\mathfrak{D})l]$		$[(\mathfrak{E})l]$		Gewicht P_W.			
$\mathfrak{l}_1$	+ 0,0834	$\mathfrak{l}_2$	− 0,0417	$\mathfrak{l}_3$	·	$\mathfrak{l}_4$	− 0,0417	$\mathfrak{l}_5$	·	$[lq]$	+ 0,0834	$[lq]$	+ 0,0834
		$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	+ 0,0278	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	·	$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	+ 0,0278	$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	+ 0,0128	$-\frac{\mathfrak{l}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	− 0,0278	$+\mathfrak{l}_1 r_A$	− 0,0243
$-\frac{\mathfrak{l}_1}{\mathfrak{a}_1}$	− 0,3336	$=\mathfrak{L}_2$	− 0,0139	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	− 0,0052	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	− 0,0017	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	+ 0,0011	$-\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	− 0,0009	$+\mathfrak{l}_2 r_B$	− 0,0049
$-\frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{a}_1}r_E$	− 0,0333	$-\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}$	+ 0,0626	$=\mathfrak{L}_3$	− 0,0052	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3$	− 0,0022	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3$	− 0,0002	$-\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3$	− 0,0001	$+\mathfrak{l}_3 r_C$	·
$-\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_1}r_D$	+ 0,0366	$-\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{B}_2}r_E$	+ 0,0176	$-\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}$	+ 0,0237	$=\mathfrak{L}_4$	− 0,0178	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{L}_4$	+ 0,0008	$-\frac{\mathfrak{L}_4}{\mathfrak{D}_4}\mathfrak{L}_4$	− 0,0018	$+\mathfrak{l}_4 r_D$	− 0,0046
$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}r_C$	·	$-\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{B}_2}r_D$	+ 0,0138	$-\frac{\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{C}_3}r_E$	− 0,0077	$-\frac{\mathfrak{L}_4}{\mathfrak{D}_4}$	+ 0,0994	$=\mathfrak{L}_5$	+ 0,0145	$-\frac{\mathfrak{L}_5}{\mathfrak{E}_5}\mathfrak{L}_5$	− 0,0031	$+\mathfrak{l}_5 r_E$	·
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}r_B$	+ 0,0392	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}r_C$	+ 0,0237	$-\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{C}_3}r_D$	+ 0,0472	$-\frac{\mathfrak{E}_4}{\mathfrak{D}_4}r_E$	+ 0,0102	$-\frac{\mathfrak{L}_5}{\mathfrak{E}_5}$		$\frac{1}{P_W}$	+ 0,0497	$\frac{1}{P_W}$	+ 0,0496
$=r_A$	− 0,2911	$=r_B$	+ 0,1177	$=r_C$	+ 0,0632	$=r_D$	+ 0,1096	$=r_E$	− 0,217			P_W	20,2

$$M_W = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P_W}} = \pm 1{,}24\sqrt{0{,}0496} = \pm 0{,}27''$$

FORMELN.



I. Teil. Theorie der Beobachtungsfehler.

Hauptsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

I. Sämtliche Fälle sind gleich wahrscheinlich:

W = Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses,

W_n = Wahrscheinlichkeit für das Nichteintreffen des Ereignisses,

n = Anzahl der für das Eintreffen des Ereignisses günstigen Fälle,

N = Anzahl aller möglichen Fälle.

$$(1)\quad W = \frac{n}{N}. \qquad\qquad (2)\quad W_n = \frac{N-n}{N}.$$

$$(3)\quad W + W_n = \frac{n}{N} + \frac{N-n}{N} = \frac{N}{N} = 1 = \text{Gewifsheit.}$$

II. Die Fälle sind nicht gleich wahrscheinlich:

W = Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses.

$w_1, w_2, w_3, \cdots$ = Wahrscheinlichkeiten der für das Eintreffen des Ereignisses günstigen Fälle.

$$(4)\quad W = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$$

III. Die Ereignisse sind von einander unabhängig.

W_z = Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen mehrerer Ereignisse,

$w_1, w_2, w_3, \cdots$ = Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der Ereignisse.

$$(5)\quad W_z = w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdots$$

IV. Die Ereignisse sind von einander abhängig.

w = Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des ersten Ereignisses,

ω = Wahrscheinlichkeit dafür, dafs nach dem Eintreffen des ersten Ereignisses auch das zweite eintrifft.

$$(6)\quad W_z = w \cdot \omega.$$

Theorie der Beobachtungsfehler.

y = Wahrscheinlichkeit dafür, dafs ein Beobachtungsfehler x vorkommt,

W_0 = Wahrscheinlichkeit dafür, dafs der Beobachtungsfehler Null vorkommt,

W_a^b = Wahrscheinlichkeit dafür, dafs der Beobachtungsfehler zwischen a und b fällt,

e = 2,718 281 $\cdots$ = Grundzahl der natürlichen Logarithmen,

π = 3,141 592 $\cdots$ = halber Umfang des Kreises vom Radius $r = 1$,

d = durchschnittlicher Fehler,
m = mittlerer Fehler,
w = wahrscheinlicher Fehler,
$(v_1), (v_2), (v_3), \cdots (v_n)$ = wahre Beobachtungsfehler.

(**7**) Der zufällige Beobachtungsfehler eines Messungsergebnisses ist gleich der algebraischen Summe der in sehr grofser Anzahl auftretenden, sehr kleinen, gleich grofsen, positiven und negativen zufälligen Einzelfehler, und die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen positiver und negativer Einzelfehler ist gleich.

(**8**) Es ist am wahrscheinlichsten, dafs der Beobachtungsfehler Null vorkommt.

Die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen der verschiedenen Beobachtungsfehler ist verhältnismäfsig sehr viel kleiner für gröfsere als für kleinere Beobachtungsfehler, sie ist verschwindend klein für sehr grofse Beobachtungsfehler.

Das Vorkommen gleich grofser positiver und negativer Beobachtungsfehler ist gleich wahrscheinlich.

(**9**) $y = W_0 \cdot e^{-\frac{xx}{N}}$. (**10**) $y = \frac{1}{\sqrt{N\pi}} e^{-\frac{xx}{N}}$.

(**11**) $$y = \frac{1}{\sqrt{N\pi}}\left(1 - \frac{xx}{N} + \frac{1}{2!}\left(\frac{xx}{N}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{xx}{N}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{xx}{N}\right)^4 - \cdots\right).$$

(**12**) $d = \frac{[\pm(v)]}{n}$. (**13**) $m = \pm\sqrt{\frac{[(v)(v)]}{n}}$.

(**14**) $d = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\pi}} = 0{,}564\,190\sqrt{N}$. (**15**) $m = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{N} = 0{,}707\,107\sqrt{N}$.

(**16**) $w = 0{,}476\,9363\sqrt{N} = \omega\sqrt{N}$.

(**17**) $d = 0{,}797\,885\,m$. (**18**) $w = 0{,}674\,490\,m$.

(**19**) $$W_{rd} = e^{-\frac{r^2}{\pi}} = 1 - \frac{r^2}{\pi} + \frac{1}{2!}\left(\frac{r^2}{\pi}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{r^2}{\pi}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{r^2}{\pi}\right)^4 - \cdots$$

(**20**) $$W_{rm} = e^{-\frac{r^2}{2}} = 1 - \frac{r^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{r^2}{2}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{r^2}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{r^2}{2}\right)^4 - \cdots$$

(**21**) $$W_{rw} = e^{-(\omega r)^2} = 1 - (\omega r)^2 + \frac{1}{2!}(\omega r)^4 - \frac{1}{3!}(\omega r)^6 + \frac{1}{4!}(\omega r)^8 - \cdots$$

(**22**) $$W^{+rd}_{-rd} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{r}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{3}\left(\frac{r}{\sqrt{\pi}}\right)^3 + \frac{1}{5\cdot 2!}\left(\frac{r}{\sqrt{\pi}}\right)^5 - \frac{1}{7\cdot 3!}\left(\frac{r}{\sqrt{\pi}}\right)^7 + \frac{1}{9\cdot 4!}\left(\frac{r}{\sqrt{\pi}}\right)^9 - \cdots\right).$$

(**23**) $$W^{+rm}_{-rm} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{r}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^3 + \frac{1}{5\cdot 2!}\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^5 - \frac{1}{7\cdot 3!}\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^7 + \frac{1}{9\cdot 4!}\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^9 - \cdots\right).$$

(**24**) $$W^{+rw}_{-rw} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\omega r - \frac{1}{3}(\omega r)^3 + \frac{1}{5\cdot 2!}(\omega r)^5 - \frac{1}{7\cdot 3!}(\omega r)^7 + \frac{1}{9\cdot 4!}(\omega r)^9 - \cdots\right).$$

(**25**)

Es ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs ein Beobachtungsfehler vorkommt, der den r fachen mittleren Fehler	nicht überschreitet	überschreitet
für $r = 1{,}0$:	0,682 7,	0,317 3,
„ $r = 2{,}0$:	0,954 5,	0,045 5,
„ $r = 3{,}0$:	0,997 278,	0,002 722,
„ $r = 3{,}5$:	0,999 533 8,	0,000 466 2,
„ $r = 4{,}0$:	0,999 936 62,	0,000 063 38,
„ $r = 5{,}0$:	0,999 999 427,	0,000 000 573.

(26)

Unter $n = 1000$ Fehlern wird der r fache mittlere Fehler wahrscheinlich überschritten		Dafs der r fache mittlere Fehler überschritten wird, kommt wahrscheinlich einmal vor	
für $r = 1,0$:	bei 317,3 Fehlern,	für $r = 1,0$:	bei je 3,1 Fehlern,
„ $r = 2,0$:	„ 45,5 „	„ $r = 2,0$:	„ „ 22,0 „
„ $r = 3,0$:	„ 2,7 „	„ $r = 3,0$:	„ „ 368 „
„ $r = 3,5$:	„ 0,47 „	„ $r = 3,5$:	„ „ 2 150 „
„ $r = 4,0$:	„ 0,063 „	„ $r = 4,0$:	„ „ 15 800 „
„ $r = 5,0$:	„ 0,0006 „	„ $r = 5,0$:	„ „ 1 750 000 „

(27) Der höchstens zulässige Beobachtungsfehler ist gleich $\pm 3m$ bis $\pm 3{,}5\,m$, ausnahmsweise $\pm 3{,}5m$ bis $\pm 4m$.

Fortpflanzung der Beobachtungsfehler.

M = mittlerer Fehler von X,
$m_x, m_y, m_z, \cdots$ = mittlere Fehler von $x, y, z, \cdots$,
m = mittlerer Fehler von $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$,
$a, b, c, \cdots$ = Konstante.

(28) $X = ax$, $\quad M = \pm a m_x$.

(29) $X = x \pm y \pm z \pm \cdots$, $\quad M = \pm \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 + \cdots}$

(30) $X = x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \cdots x_n$, $\quad M = \pm m\sqrt{n}$.

(31) $X = ax \pm by \pm cz \pm \cdots$, $\quad M = \pm \sqrt{(am_x)^2 + (bm_y)^2 + (cm_z)^2 + \cdots}$

(32) $X = a(x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \cdots x_n)$, $\quad M = \pm am\sqrt{n}$.

(33) $X = f(x, y, z, \cdots)$, $\quad M = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} m_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} m_y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} m_z\right)^2 + \cdots}$

Berechnung der Gewichte und mittleren Fehler.

$m_1, m_2, m_3, \cdots m_n$ = mittlere Fehler
$p_1, p_2, p_3, \cdots p_n$ = Gewichte
$z_1, z_2, z_3, \cdots z_n$ = Gewichtsverhältniszahlen
} der Gröfsen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots \lambda_n$,

$\mathfrak{m}$ = mittlerer Fehler
$\mathfrak{p}$ = 1 = Gewicht
$\mathfrak{z}$ = Gewichtsverhältniszahl
} der Gewichtseinheit,

$\mathfrak{m}_0$ = mittlerer Fehler
$\mathfrak{p}_0$ = Gewicht
} einer vorläufig angenommenen Gewichtseinheit,

$k = \mathfrak{m}^2$ = Gewichtskonstante.

(34) $p_1 = \frac{k}{m_1 m_1}, \quad p_2 = \frac{k}{m_2 m_2}, \quad p_3 = \frac{k}{m_3 m_3}, \quad \cdots p_n = \frac{k}{m_n m_n}$.

(35) $m_1 = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_1}}, \quad m_2 = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_2}}, \quad m_3 = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_3}}, \quad \cdots m_n = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_n}}$.

(36) $(\mathfrak{p} = 1) : p_1 : p_2 : p_3 : \cdots p_n = \frac{1}{\mathfrak{m}\mathfrak{m}} : \frac{1}{m_1 m_1} : \frac{1}{m_2 m_2} : \frac{1}{m_3 m_3} : \cdots \frac{1}{m_n m_n}$.

(37) $\mathfrak{m} : m_1 : m_2 : m_3 : \cdots m_n = \sqrt{\frac{1}{\mathfrak{p} = 1}} : \sqrt{\frac{1}{p_1}} : \sqrt{\frac{1}{p_2}} : \sqrt{\frac{1}{p_3}} : \cdots \sqrt{\frac{1}{p_n}}$.

$$(38) \quad p_1 = \frac{z_1}{\mathfrak{z}}, \quad p_2 = \frac{z_2}{\mathfrak{z}}, \quad p_3 = \frac{z_3}{\mathfrak{z}}, \quad \cdots \; p_n = \frac{z_n}{\mathfrak{z}}.$$

$$(39) \quad \mathfrak{m} = \pm \mathfrak{m}_0 \sqrt{\frac{1}{\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{z}}}.$$

Fortpflanzung der Gewichte.

P = Gewicht von X,
$p_x, p_y, p_z, \cdots$ = Gewichte von $x, y, z, \cdots$,
p = Gewicht von $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$,
$a, b, c, \cdots$ = Konstante.

$$(40) \quad X = ax, \qquad \frac{1}{P} = a^2 \frac{1}{p_x}.$$

$$(41) \quad X = x \pm y \pm z \pm \cdots, \qquad \frac{1}{P} = \frac{1}{p_x} + \frac{1}{p_y} + \frac{1}{p_z} + \cdots$$

$$(42) \quad X = x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \cdots x_n, \qquad \frac{1}{P} = n \frac{1}{p}.$$

$$(43) \quad X = ax \pm by \pm cz \pm \cdots, \qquad \frac{1}{P} = a^2 \frac{1}{p_x} + b^2 \frac{1}{p_y} + c^2 \frac{1}{p_z} + \cdots$$

$$(44) \quad X = a(x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \cdots x_n), \qquad \frac{1}{P} = a^2 n \frac{1}{p}.$$

$$(45) \quad X = f(x, y, z, \cdots), \qquad \frac{1}{P} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{p_x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \frac{1}{p_y} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \frac{1}{p_z} + \cdots$$

II. Teil. Methode der kleinsten Quadrate.

$(x), (y), (z), \cdots$ = wahre Werthe
$x, y, z, \cdots$ = wahrscheinlichste Werthe
$\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \cdots$ = Näherungswerthe
$q \cdots$ = Anzahl
} der zu bestimmenden Gröfsen,

$d\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{z}, \cdots$ = Aenderungen der Näherungswerthe $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$, wodurch diese in $x, y, z, \ldots$ übergehen,

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots \lambda_n$ = Beobachtungsergebnisse,

$(\lambda_1), (\lambda_2), (\lambda_3), \cdots (\lambda_n)$ = wahre Werthe
$L_1, L_2, L_3, \cdots L_n$ = wahrscheinlichste Werthe
$\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3, \cdots \mathfrak{l}_n$ = Näherungswerthe
$n \cdots$ = Anzahl
} der beobachteten Gröfsen,

$d\mathfrak{l}_1, d\mathfrak{l}_2, d\mathfrak{l}_3, \cdots d\mathfrak{l}_n$ = Aenderungen der Näherungswerthe $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3 \cdots \mathfrak{l}_n$, wodurch diese in $L_1, L_2, L_3, \cdots L_n$ übergehen,

$(v_1), (v_2), (v_3), \cdots (v_n)$ = wahre Werthe
$v_1, v_2, v_3, \cdots v_n$ = wahrscheinlichste Werthe
} der Beobachtungsfehler,

$f_1, f_2, f_3, \cdots f_n$ = Abweichungen der Beobachtungsergebnisse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots \lambda_n$ von den Näherungswerthen $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3, \cdots \mathfrak{l}_n$,

$p=1$			$\cdots\cdots=$ Gewicht	der Gewichtseinheit,
$\mathfrak{m}$			$\cdots\cdots=$ mittlerer Fehler	
$p_1,$	$p_2,$	$p_3,$	$\cdots p_n=$ Gewichte	der Beobachtungsergebnisse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots \lambda_n$,
$m_1,$	$m_2,$	$m_3,$	$\cdots m_n=$ mittlere Fehler	
$P_x,$	$P_y,$	$P_z,$	$\cdots\cdots=$ Gewichte	der wahrscheinlichsten Werthe $x, y, z, \cdots$ der zu bestimmenden Gröfsen.
$M_x,$	$M_y,$	$M_z,$	$\cdots\cdots=$ mittlere Fehler	

Wo in einzelnen Abschnitten abweichende Bezeichnungen gebraucht werden, werden sie besonders am Anfange des betreffenden Abschnittes angeführt.

Grundformeln.

$$(46)\quad p_1v_1v_1+p_2v_2v_2+p_3v_3v_3+\cdots p_nv_nv_n=[pvv]=\text{Minimum}.$$

$$(47)\quad \mathfrak{m}=\pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-q}}.$$

Direkte Beobachtungen.

Direkte gleich genaue Beobachtungen.

$$(48)\quad x=\frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\cdots\lambda_n}{n}=\frac{[\lambda]}{n}.$$

$$(49)\quad \begin{cases}\lambda_1=l+dl_1,\\ \lambda_2=l+dl_2,\\ \lambda_3=l+dl_3,\\ \cdots\cdots\cdots,\\ \lambda_n=l+dl_n.\end{cases}$$

$$(50)\quad x=l+\frac{dl_1+dl_2+dl_3+\cdots dl_n}{n}=l+\frac{[dl]}{n}.$$

$$(51)\quad \begin{cases}v_1=x-\lambda_1,\\ v_2=x-\lambda_2,\\ v_3=x-\lambda_3,\\ \cdots\cdots\cdots,\\ v_n=x-\lambda_n.\end{cases}$$

$$(52)\quad [v]=0.$$

$$(53)\quad \mathfrak{m}=\pm\sqrt{p}\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}.$$

$$(54)\quad m=\pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p}}=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}.$$

$$(55)\quad P=np.$$

$$(56)\quad M=\pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P}}=\pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{np}}=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}=\pm m\sqrt{\frac{1}{n}}.$$

$$(57)\quad [vv]=[\lambda\lambda]-\frac{[\lambda][\lambda]}{n}=[dl\,dl]-\frac{[dl][dl]}{n}.$$

Direkte ungleich genaue Beobachtungen.

$$(58)\quad x=\frac{p_1\lambda_1+p_2\lambda_2+p_3\lambda_3+\cdots p_n\lambda_n}{p_1+p_2+p_3+\cdots p_n}=\frac{[p\lambda]}{[p]}.$$

$$(59)\quad \begin{cases}\lambda_1=l+dl_1,\\ \lambda_2=l+dl_2,\\ \lambda_3=l+dl_3,\\ \cdots\cdots\cdots,\\ \lambda_n=l+dl_n.\end{cases}$$

(60) $x = l + \frac{p_1\,dl_1 + p_2\,dl_2 + p_3\,dl_3 + \cdots + p_n\,dl_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots p_n} = l + \frac{[p\,dl]}{[p]}.$

(61) $\begin{cases} v_1 = x - \lambda_1, \\ v_2 = x - \lambda_2, \\ v_3 = x - \lambda_3, \\ \dots\dots\dots, \\ v_n = x - \lambda_n. \end{cases}$

(62) $[pv] = 0.$

(63) $m = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}.$

(64) $\begin{cases} m_1 = \pm m\sqrt{\frac{1}{p_1}}, \\ m_2 = \pm m\sqrt{\frac{1}{p_2}}, \\ m_3 = \pm m\sqrt{\frac{1}{p_3}}, \\ \dots\dots\dots, \\ m_n = \pm m\sqrt{\frac{1}{p_n}}. \end{cases}$

(65) $P = [p].$

(66) $M = \pm m\sqrt{\frac{1}{P}} = \pm m\sqrt{\frac{1}{[p]}} = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{[p](n-1)}}.$

(67) $[pvv] = [p\lambda\lambda] - \frac{[p\lambda][p\lambda]}{[p]} = [p\,dl\,dl] - \frac{[p\,dl][p\,dl]}{[p]}.$

Berechnung des mittleren Fehlers aus Beobachtungsdifferenzen.

$\left.\begin{matrix}\lambda'_1, & \lambda'_2, & \lambda'_3, & \dots & \lambda'_n \\ \lambda''_1, & \lambda''_2, & \lambda''_3, & \dots & \lambda''_n\end{matrix}\right\}$ = Beobachtungsergebnisse,

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots \Delta_n$ = Beobachtungsdifferenzen $\lambda' - \lambda''$,

$\left.\begin{matrix} k \;\dots\dots \\ kl_1, kl_2, kl_3, \dots kl_n\end{matrix}\right\}$ = regelmäfsiger } Teil der Beobachtungsdifferenzen.

$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots \delta_n$ = zufälliger }

Die nachstehend mit * bezeichneten Formeln gelten für den Fall, dafs die Beobachtungsergebnisse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_n$ gleich genau sind; die übrigen Formeln gelten allgemein.

a_1) Der regelmäfsige Teil der Beobachtungsdifferenzen ist für alle Beobachtungsergebnisse gleich:

(68) $\begin{cases} \Delta_1 = \lambda'_1 - \lambda''_1, \\ \Delta_2 = \lambda'_2 - \lambda''_2, \\ \Delta_3 = \lambda'_3 - \lambda''_3, \\ \dots\dots\dots, \\ \Delta_n = \lambda'_n - \lambda''_n. \end{cases}$

(69)* $k = \frac{[\Delta]}{n}.$

(70) $k = \frac{[p\Delta]}{[p]}.$

(71) $\begin{cases} \delta_1 = k - \Delta_1, \\ \delta_2 = k - \Delta_2, \\ \delta_3 = k - \Delta_3, \\ \dots\dots\dots, \\ \delta_n = k - \Delta_n. \end{cases}$

(72)* $[\delta\delta] = [\Delta\Delta] - \frac{[\Delta]}{n}[\Delta] = [\Delta\Delta] - nkk.$

(73) $[p\delta\delta] = [p\Delta\Delta] - \frac{[p\Delta]}{[p]}[p\Delta] = [p\Delta\Delta] - [p]kk.$

a_2) Der regelmäfsige Teil der Beobachtungsdifferenzen $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots \Delta_n$ ist proportional den Gröfsen $l_1, l_2, l_3, \dots l_n$:

(74) $\begin{cases} \Delta_1 = \lambda'_1 - \lambda''_1, \\ \Delta_2 = \lambda'_2 - \lambda''_2, \\ \Delta_3 = \lambda'_3 - \lambda''_3, \\ \dots\dots\dots, \\ \Delta_n = \lambda'_n - \lambda''_n. \end{cases}$

(75)* $k = \frac{[l\Delta]}{[ll]}.$

(76) $k = \frac{[pl\Delta]}{[pll]}.$

(77) $\begin{cases} \delta_1 = kl_1 - \Delta_1, \\ \delta_2 = kl_2 - \Delta_2, \\ \delta_3 = kl_3 - \Delta_3, \\ \dots\dots\dots, \\ \delta_n = kl_n - \Delta_n. \end{cases}$

b_1) Der regelmäfsige Teil der Beobachtungsdifferenzen wird aus den vorliegenden Beobachtungsergebnissen berechnet:

(78)* $m = \pm\sqrt{p}\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{2(n-1)}}.$

(79)* $m = \pm m\sqrt{\frac{1}{p}} = \pm\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{2(n-1)}}.$

(80)* $m_k = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_k}} = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{2}{np}} = \pm\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n(n-1)}}.$

(81)* $m_k = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_k}} = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{2}{p[ll]}} = \pm\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{[ll](n-1)}}.$

(82) $\mathfrak{m} = \pm\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{2(n-1)}}.$

(83) $\begin{cases} m_1 = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_1}}, \\ m_2 = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_2}}, \\ m_3 = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_3}}, \\ \dots\dots\dots, \\ m_n = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_n}}. \end{cases}$

(84) $m_k = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_k}} = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{2}{[p]}} = \pm\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{[p](n-1)}}.$

(85) $m_k = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_k}} = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{2}{[pll]}} = \pm\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{[pll](n-1)}}.$

b_2) Der regelmäfsige Teil der Beobachtungsdifferenzen ist voraus bekannt:

(86)* $\mathfrak{m} = \pm\sqrt{p}\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{2n}}.$

(87)* $m = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p}} = \pm\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{2n}}.$

(88) $\mathfrak{m} = \pm\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{2n}}.$

(89) $\begin{cases} m_1 = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_1}}, \\ m_2 = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_2}}, \\ m_3 = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_3}}, \\ \dots\dots\dots, \\ m_n = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_n}}. \end{cases}$

Direkte gleich genaue Beobachtungen mehrerer Gröfsen, deren Summe einen bekannten Sollbetrag erfüllen mufs.

$x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ = wahrscheinlichste Werthe der beobachteten Gröfsen,
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots \alpha_n$ = Beobachtungsergebnisse,
v ·············· = wahrscheinlichster Werth der Verbesserungen der Beobachtungsergebnisse,
S ·············· = Sollbetrag,
Σ ·············· = Beobachtungsergebnis für den Sollbetrag,
f ·············· = Widerspruch zwischen Sollbetrag und Beobachtungsergebnis.

(90) $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots x_n = S.$

(91) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots \alpha_n = \Sigma.$

(92) $f = S - \Sigma.$

(93) $v = \frac{1}{n} f.$

(94) $\begin{cases} x_1 = \alpha_1 + v, \\ x_2 = \alpha_2 + v, \\ x_3 = \alpha_3 + v, \\ \dots\dots\dots, \\ x_n = \alpha_n + v. \end{cases}$

$$(95)\quad \mathfrak{m} = \pm f\sqrt{\frac{1}{n}p}.$$

$$(96)\quad m_\alpha = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p}} = \pm f\sqrt{\frac{1}{n}}.$$

$$(97)\quad \frac{1}{P_x} = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

$$(98)\quad M_x = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P_x}} = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \pm f\sqrt{\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)}.$$

Direkte ungleich genaue Beobachtungen mehrerer Gröfsen, deren Summe einen bestimmten Sollbetrag erfüllen mufs.

$x, y, z, \cdots\cdots$ = wahrscheinlichste Werthe der beobachteten Gröfsen,
$\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots$ = Beobachtungsergebnisse,
$v_\alpha, v_\beta, v_\gamma, \cdots\cdots$ = wahrscheinlichste Werthe der Verbesserungen der Beobachtungsergebnisse,
$S, \Sigma, f, \cdots\cdots$ = wie oben.

$$(99)\quad x + y + z \cdots = S.$$

$$(100)\quad \alpha + \beta + \gamma + \cdots = \Sigma.$$

$$(101)\quad f = S - \Sigma.$$

$$(102)\quad \begin{cases} v_\alpha = \dfrac{\frac{1}{p_\alpha}}{\left[\frac{1}{p}\right]} f, \\ v_\beta = \dfrac{\frac{1}{p_\beta}}{\left[\frac{1}{p}\right]} f, \\ v_\gamma = \dfrac{\frac{1}{p_\gamma}}{\left[\frac{1}{p}\right]} f, \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

$$(103)\quad \begin{cases} x = \alpha + v_\alpha, \\ y = \beta + v_\beta, \\ z = \gamma + v_\gamma, \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

$$(104)\quad \mathfrak{m} = \pm f\sqrt{\frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]}}.$$

$$(105)\quad \begin{cases} m_\alpha = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}}, \\ m_\beta = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_\beta}}, \\ m_\gamma = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_\gamma}}, \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

$$(106)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{P_x} = \dfrac{1}{p_\alpha}\left(1 - \dfrac{\frac{1}{p_\alpha}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right), \\ \dfrac{1}{P_y} = \dfrac{1}{p_\beta}\left(1 - \dfrac{\frac{1}{p_\beta}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right), \\ \dfrac{1}{P_z} = \dfrac{1}{p_\gamma}\left(1 - \dfrac{\frac{1}{p_\gamma}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right), \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

$$(107)\quad \begin{cases} M_x = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P_x}} = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{1}{p_\alpha}\left(1 - \dfrac{\frac{1}{p_\alpha}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right)}, \\ M_y = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P_y}} = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{1}{p_\beta}\left(1 - \dfrac{\frac{1}{p_\beta}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right)}, \\ M_z = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P_z}} = \pm \mathfrak{m}\sqrt{\dfrac{1}{p_\gamma}\left(1 - \dfrac{\frac{1}{p_\gamma}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right)}, \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

Vermittelnde Beobachtungen.

Gleichungen für die Beziehungen zwischen den wahren Werthen der beobachteten Gröfsen und der zu bestimmenden Gröfsen.

$$(108)\quad \begin{cases} (\lambda_1) = F_1((x),(y),(z),\ldots), \\ (\lambda_2) = F_2((x),(y),(z),\ldots), \\ (\lambda_3) = F_3((x),(y),(z),\ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (\lambda_n) = F_n((x),(y),(z),\ldots). \end{cases}$$

Die Anzahl q der zu bestimmenden Gröfsen ist kleiner als die Anzahl n der Gleichungen.

Fehlergleichungen.

$$(109)\quad \begin{cases} L_1 = F_1(x,y,z,\ldots), \\ L_2 = F_2(x,y,z,\ldots), \\ L_3 = F_3(x,y,z,\ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L_n = F_n(x,y,z,\ldots). \end{cases}$$

$$(110)\quad \begin{cases} v_1 = L_1 - \lambda_1, \\ v_2 = L_2 - \lambda_2, \\ v_3 = L_3 - \lambda_3, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ v_n = L_n - \lambda_n. \end{cases}$$

Wahrscheinlichste Werthe der zu bestimmenden Gröfsen.

$$(111)\quad \begin{cases} x = \mathfrak{x} + d\mathfrak{x}, \\ y = \mathfrak{y} + d\mathfrak{y}, \\ z = \mathfrak{z} + d\mathfrak{z}, \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Faktoren und Absolutglieder der umgeformten Fehlergleichungen.

$$(114)\quad \begin{cases} a_1 = \frac{\partial F_1}{\partial \mathfrak{x}}, & b_1 = \frac{\partial F_1}{\partial \mathfrak{y}}, & c_1 = \frac{\partial F_1}{\partial \mathfrak{z}}, & \ldots, \\ a_2 = \frac{\partial F_2}{\partial \mathfrak{x}}, & b_2 = \frac{\partial F_2}{\partial \mathfrak{y}}, & c_2 = \frac{\partial F_2}{\partial \mathfrak{z}}, & \ldots, \\ a_3 = \frac{\partial F_3}{\partial \mathfrak{x}}, & b_3 = \frac{\partial F_3}{\partial \mathfrak{y}}, & c_3 = \frac{\partial F_3}{\partial \mathfrak{z}}, & \ldots, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, \\ a_n = \frac{\partial F_n}{\partial \mathfrak{x}}, & b_n = \frac{\partial F_n}{\partial \mathfrak{y}}, & c_n = \frac{\partial F_n}{\partial \mathfrak{z}}, & \ldots\ldots \end{cases}$$

$$(112)\quad \begin{cases} \mathfrak{l}_1 = F_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z},\ldots), \\ \mathfrak{l}_2 = F_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z},\ldots), \\ \mathfrak{l}_3 = F_3(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z},\ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathfrak{l}_n = F_n(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z},\ldots). \end{cases}$$

$$(113)\quad \begin{cases} L_1 = \mathfrak{l}_1 + d\mathfrak{l}_1, \\ L_2 = \mathfrak{l}_2 + d\mathfrak{l}_2, \\ L_3 = \mathfrak{l}_3 + d\mathfrak{l}_3, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ L_n = \mathfrak{l}_n + d\mathfrak{l}_n. \end{cases}$$

$$(115)\quad \begin{cases} f_1 = \mathfrak{l}_1 - \lambda_1, \\ f_2 = \mathfrak{l}_2 - \lambda_2, \\ f_3 = \mathfrak{l}_3 - \lambda_3, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ f_n = \mathfrak{l}_n - \lambda_n. \end{cases}$$

Umgeformte Fehlergleichungen.

$$(116)\quad \begin{cases} d\mathfrak{l}_1 = a_1\,d\mathfrak{x} + b_1\,d\mathfrak{y} + c_1\,d\mathfrak{z} + \cdots, \\ d\mathfrak{l}_2 = a_2\,d\mathfrak{x} + b_2\,d\mathfrak{y} + c_2\,d\mathfrak{z} + \cdots, \\ d\mathfrak{l}_3 = a_3\,d\mathfrak{x} + b_3\,d\mathfrak{y} + c_3\,d\mathfrak{z} + \cdots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ d\mathfrak{l}_n = a_n\,d\mathfrak{x} + b_n\,d\mathfrak{y} + c_n\,d\mathfrak{z} + \cdots. \end{cases}$$

$$(117)\quad \begin{cases} v_1 = f_1 + d\mathfrak{l}_1, \\ v_2 = f_2 + d\mathfrak{l}_2, \\ v_3 = f_3 + d\mathfrak{l}_3, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ v_n = f_n + d\mathfrak{l}_n. \end{cases}$$

Endgleichungen.

$$(118)\quad \begin{cases} [paa]\,d\mathfrak{x} + [pab]\,d\mathfrak{y} + [pac]\,d\mathfrak{z} + \cdots + [paf] = 0, \\ [pab]\,d\mathfrak{x} + [pbb]\,d\mathfrak{y} + [pbc]\,d\mathfrak{z} + \cdots + [pbf] = 0, \\ [pac]\,d\mathfrak{x} + [pbc]\,d\mathfrak{y} + [pcc]\,d\mathfrak{z} + \cdots + [pcf] = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

(119)

$d\mathfrak{x}$	$d\mathfrak{y}$	$d\mathfrak{z}$	.....	
$[paa]$	$[pab]$	$[pac]$	.....	$d\mathfrak{x} + [paf] = 0,$
	$[pbb]$	$[pbc]$	.....	$d\mathfrak{y} + [pbf] = 0,$
		$[pcc]$	.....	$d\mathfrak{z} + [pcf] = 0,$
			.....	....

(120a)

$\mathfrak{a}_1 = [paa],$	$\mathfrak{b}_1 = [pab],$	$\mathfrak{c}_1 = [pac],$	....	$\mathfrak{f}_1 = [paf],$
	$\mathfrak{b}_2 = [pbb],$	$\mathfrak{c}_2 = [pbc],$	....	$\mathfrak{f}_2 = [pbf],$
		$\mathfrak{c}_3 = [pcc],$	....	$\mathfrak{f}_3 = [pcf],$
			....	....

$$(121)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_1\,d\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_1\,d\mathfrak{y} + \mathfrak{c}_1\,d\mathfrak{z} + \cdots + \mathfrak{f}_1 = 0, \\ \mathfrak{b}_1\,d\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_2\,d\mathfrak{y} + \mathfrak{c}_2\,d\mathfrak{z} + \cdots + \mathfrak{f}_2 = 0, \\ \mathfrak{c}_1\,d\mathfrak{x} + \mathfrak{c}_2\,d\mathfrak{y} + \mathfrak{c}_3\,d\mathfrak{z} + \cdots + \mathfrak{f}_3 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Rechenschema (124) für die Auflösung

$[paa]$		$[pab]$		$[pac]$		....	$[paf]$		$[pbb]$		$[pbc]$		....
$\mathfrak{a}_1$	—	$\mathfrak{b}_1$	—	$\mathfrak{c}_1$	—	....	$\mathfrak{f}_1$	—	$\mathfrak{b}_2$	—	$\mathfrak{c}_2$	—	....
	—	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}$	—	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}$	—	....	$-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}$	—	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1$	—	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1$	—	....
							....	....	$= \mathfrak{B}_2$	—	$= \mathfrak{C}_2$	—	....
							$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}dz$	—			$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}$	—	....
							$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}dy$	—					
							$= d\mathfrak{x}$	—					

Mittlere Fehler der Gewichtseinheit und der Beobachtungsergebnisse.

$$(125)\quad \mathfrak{m} = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-q}}.$$

$$(126)\quad m_1 = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_1}},\quad m_2 = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_2}},\quad m_3 = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_3}},\ \cdots\ m_n = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_n}}.$$

Faktoren und Absolutglieder der reduzirten Endgleichungen.

$$
(120^b)\quad \left\{
\begin{array}{l|l|l|l}
\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{b}_2 - \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1, & \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{c}_2 - \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1, & \cdots & \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{f}_2 - \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1, \\
 & \mathfrak{C}_3 = \mathfrak{c}_3 - \frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1 - \frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{C}_2, & \cdots & \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{f}_3 - \frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 - \frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2, \\
 & & \cdots & \cdots\cdots\cdots
\end{array}
\right.
$$

Reduzirte Endgleichungen.

$$
(122)\quad \left\{
\begin{array}{r}
\mathfrak{a}_1\, d\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_1\, d\mathfrak{y} + \mathfrak{c}_1\, d\mathfrak{z} + \cdots + \mathfrak{f}_1 = 0, \\
\mathfrak{B}_2\, d\mathfrak{y} + \mathfrak{C}_2\, d\mathfrak{z} + \cdots + \mathfrak{F}_2 = 0, \\
\mathfrak{C}_3\, d\mathfrak{z} + \cdots + \mathfrak{F}_3 = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
\right.
$$

$$
(123)\quad \left\{
\begin{array}{r}
\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
d\mathfrak{z} = \cdots - \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}, \\
d\mathfrak{y} = -\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\, d\mathfrak{z} \cdots - \frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}, \\
d\mathfrak{x} = -\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\, d\mathfrak{y} - \frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\, d\mathfrak{z} \cdots - \frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}.
\end{array}
\right.
$$

der Endgleichungen mit Probe (127).

$[pbf]$		$[pcc]$		....	$[pcf]$		....	Probe.			
$\mathfrak{f}_2$	—	$\mathfrak{c}_3$	—	....	$\mathfrak{f}_3$	—	....				
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	—	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1$	—	....	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	—	....	$-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	—	$\mathfrak{f}_1\, d\mathfrak{x}$	—
$= \mathfrak{F}_2$	—	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{C}_2$	—	....	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	—	....	$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	—	$\mathfrak{f}_2\, d\mathfrak{y}$	—
$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$	—	$= \mathfrak{C}_3$	—	....	$= \mathfrak{F}_3$	—	....	$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	—	$\mathfrak{f}_3\, d\mathfrak{z}$	—
....	....			....	$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}$	—	....	....	....	....	....
$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}dz$	—				....	....	....	$= \Sigma$		$= \Sigma$	
$= d\mathfrak{y}$	—				$= d\mathfrak{z}$	—	....				

Rechenproben.

$$
(127)\quad -\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 - \frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 - \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3 - \cdots = \mathfrak{f}_1\, d\mathfrak{x} + \mathfrak{f}_2\, d\mathfrak{y} + \mathfrak{f}_3\, d\mathfrak{z} + \cdots = \Sigma.
$$

(127a) $L_1, L_2, L_3, \cdots L_n$ übereinstimmend nach den Formeln **(109)** und **(113)**.

(127b) $v_1, v_2, v_3, \cdots v_n$ übereinstimmend nach den Formeln **(110)** und **(117)**.

$$
(128)\quad \left\{
\begin{array}{l}
[pav] = 0, \\
[pbv] = 0, \\
[pcv] = 0, \\
\cdots\cdots
\end{array}
\right.
\qquad\qquad (129)\quad [pvv] = [pff] + \Sigma.
$$

Bildung der reduzirten Endgleichungen aus reduzirten Fehlergleichungen.

1. Die n umgeformten Fehlergleichungen

$$\begin{array}{ll} v_1 = f_1 \pm d\mathfrak{x} + b_1\,d\mathfrak{y} + c_1\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \text{Gewicht} = p_1, \\ v_2 = f_2 \pm d\mathfrak{x} + b_2\,d\mathfrak{y} + c_2\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad " \quad = p_2, \\ v_3 = f_3 \pm d\mathfrak{x} + b_3\,d\mathfrak{y} + c_3\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad " \quad = p_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots, \\ v_n = f_n \pm d\mathfrak{x} + b_n\,d\mathfrak{y} + c_n\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad " \quad = p_n, \end{array}$$

worin $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots a_n = +1$ oder $= -1$ ist, können reduzirt werden auf die $d\mathfrak{x}$ nicht enthaltenden Fehlergleichungen:

$$(130)\left\{\begin{array}{ll} v_1 = f_1 + b_1\,d\mathfrak{y} + c_1\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \text{Gewicht} = p_1, \\ v_2 = f_2 + b_2\,d\mathfrak{y} + c_2\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad " \quad = p_2, \\ v_3 = f_3 + b_3\,d\mathfrak{y} + c_3\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad " \quad = p_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots, \\ v_n = f_n + b_n\,d\mathfrak{y} + c_n\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad " \quad = p_n, \\ v_{n+1} = [pf] + [pb]\,d\mathfrak{y} + [pc]\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad " \quad = -\frac{1}{[p]}, \end{array}\right.$$

oder, indem

$$(131)\left\{\begin{array}{l|l|l|l} F_1 = f_1 - \frac{[pf]}{[p]}, & B_1 = b_1 - \frac{[pb]}{[p]}, & C_1 = c_1 - \frac{[pc]}{[p]}, & \cdots\cdots, \\ F_2 = f_2 - \frac{[pf]}{[p]}, & B_2 = b_2 - \frac{[pb]}{[p]}, & C_2 = c_2 - \frac{[pc]}{[p]}, & \cdots\cdots, \\ F_3 = f_3 - \frac{[pf]}{[p]}, & B_3 = b_3 - \frac{[pb]}{[p]}, & C_3 = c_3 - \frac{[pc]}{[p]}, & \cdots\cdots, \\ \cdots\cdots, & \cdots\cdots, & \cdots\cdots, & \cdots\cdots, \\ F_n = f_n - \frac{[pf]}{[p]}, & B_n = b_n - \frac{[pb]}{[p]}, & C_n = c_n - \frac{[pc]}{[p]}, & \cdots\cdots \end{array}\right.$$

gebildet wird, wobei $[pF] = [pB] = [pC] = \cdots = 0$ werden mufs, auf die Fehlergleichungen:

$$(132)\left\{\begin{array}{ll} v_1 = F_1 + B_1\,d\mathfrak{y} + C_1\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \text{Gewicht} = p_1, \\ v_2 = F_2 + B_2\,d\mathfrak{y} + C_2\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad " \quad = p_2, \\ v_3 = F_3 + B_3\,d\mathfrak{y} + C_3\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad " \quad = p_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots, \\ v_n = F_n + B_n\,d\mathfrak{y} + C_n\,d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad " \quad = p_n. \end{array}\right.$$

Nachdem $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... aus den reduzirten Endgleichungen bestimmt sind, wird $d\mathfrak{x}$ erhalten nach:

$$(133)\quad d\mathfrak{x} = \mp\frac{[pf]}{[p]} \mp \frac{[pb]}{[p]}\,d\mathfrak{y} \mp \frac{[pc]}{[p]}\,d\mathfrak{z} \mp \cdots,$$

worin das $\left\{\begin{array}{l}\text{obere}\\\text{untere}\end{array}\right\}$ Vorzeichen gilt, wenn das Vorzeichen von $d\mathfrak{x}$ in den umgeformten Fehlergleichungen $\left\{\begin{array}{l}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{array}\right\}$ ist.

Um nach Formel (**129**) den richtigen Werth von $[pvv]$ zu erhalten, kann erstens dem sich bei Auflösung der reduzirten Endgleichungen nach Formel (**127**) für Σ ergebenden Betrage $-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 - \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3 - \cdots$ noch $-\frac{[pf]}{[p]}[pf]$ hinzugesetzt werden, oder es kann zweitens bei Benutzung der Formeln (**130**) der aus der $n+1$ ten Fehlergleichung entspringende Betrag $-\frac{[pf]}{[p]}[pf]$ mit in $[pff]$ aufgenommen werden, oder es kann drittens bei Benutzung der Formeln (**131**) und (**132**) $[pFF]$ statt $[pff]$ gebildet und in Formel (**129**) eingesetzt werden.

Wenn $p_1 = p_2 = p_3 = \cdots p_n = 1$ ist, so vereinfachen sich die Formeln (**130**) bis (**133**) wie folgt:

$$(134)\quad \begin{cases} \mathfrak{v}_1 = f_1 + b_1\, d\mathfrak{y} + c_1\, d\mathfrak{z} + \cdots, & \text{Gewicht} = +1, \\ \mathfrak{v}_2 = f_2 + b_2\, d\mathfrak{y} + c_2\, d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad\text{„} \quad = +1, \\ \mathfrak{v}_3 = f_3 + b_3\, d\mathfrak{y} + c_3\, d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad\text{„} \quad = +1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots, \\ \mathfrak{v}_n = f_n + b_n\, d\mathfrak{y} + c_n\, d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad\text{„} \quad = +1, \\ \mathfrak{v}_{n+1} = [f] + [b]\, d\mathfrak{y} + [c]\, d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad\text{„} \quad = -\frac{1}{n}; \end{cases}$$

$$(135)\quad \begin{cases} F_1 = f_1 - \frac{[f]}{n}, & B_1 = b_1 - \frac{[b]}{n}, & C_1 = c_1 - \frac{[c]}{n}, & \cdots\cdots, \\ F_2 = f_2 - \frac{[f]}{n}, & B_2 = b_2 - \frac{[b]}{n}, & C_2 = c_2 - \frac{[c]}{n}, & \cdots\cdots, \\ F_3 = f_3 - \frac{[f]}{n}, & B_3 = b_3 - \frac{[b]}{n}, & C_3 = c_3 - \frac{[c]}{n}, & \cdots\cdots, \\ \cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots, \\ F_n = f_n - \frac{[f]}{n}, & B_n = b_n - \frac{[b]}{n}, & C_n = c_n - \frac{[c]}{n}, & \cdots\cdots, \end{cases}$$

wo $[F] = [B] = [C] = \cdots = 0$ sein mufs;

$$(136)\quad \begin{cases} v_1 = F_1 + B_1\, d\mathfrak{y} + C_1\, d\mathfrak{z} + \cdots, & \text{Gewicht} = +1, \\ v_2 = F_2 + B_2\, d\mathfrak{y} + C_2\, d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad\text{„} \quad = +1, \\ v_3 = F_3 + B_3\, d\mathfrak{y} + C_3\, d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad\text{„} \quad = +1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ v_n = F_n + B_n\, d\mathfrak{y} + C_n\, d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad\text{„} \quad = +1. \end{cases}$$

Nachdem $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$, ... aus den reduzirten Endgleichungen bestimmt sind, wird $d\mathfrak{x}$ erhalten nach:

$$(137)\quad d\mathfrak{x} = \mp \frac{[f]}{n} \mp \frac{[b]}{n}\, d\mathfrak{y} \mp \frac{[c]}{n}\, d\mathfrak{z} \mp \cdots,$$

worin das $\left\{ \begin{matrix} \text{obere} \\ \text{untere} \end{matrix} \right\}$ Vorzeichen gilt, wenn das Vorzeichen von $d\mathfrak{x}$ in den umgeformten Fehlergleichungen $\left\{ \begin{matrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{matrix} \right\}$ ist.

Um nach Formel (**129**) in diesem Falle den richtigen Werth von $[pvv]$ zu erhalten, kann erstens dem sich bei Auflösung der reduzirten Endgleichungen nach Formel (**127**) für Σ ergebenden Betrage $-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 - \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3 - \cdots$ noch $-\frac{[f]}{n}[f]$ hinzugesetzt, oder es kann zweitens bei Benutzung der Formeln (**134**) der aus der $n+1$ten Fehlergleichung entspringende Betrag $-\frac{[f]}{n}[f]$ mit in $[pff]$ aufgenommen werden, oder es kann drittens bei Benutzung der Formeln (**135**) und (**136**) $[FF]$ statt $[ff]$ gebildet und in Formel (**129**) eingesetzt werden.

Mit den nach den Formeln (**130**) oder (**134**) erhaltenen Werthen $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$, ... $\mathfrak{v}_n$ ergeben sich die wahrscheinlichsten Werthe v_1, v_2, v_3, ... v_n der Beobachtungsfehler nach:

$$(138)\quad \begin{cases} v_1 = \mathfrak{v}_1 \pm d\mathfrak{x}, \\ v_2 = \mathfrak{v}_2 \pm d\mathfrak{x}, \\ v_3 = \mathfrak{v}_3 \pm d\mathfrak{x}, \\ \cdots\cdots\cdots, \\ v_n = \mathfrak{v}_n \pm d\mathfrak{x}. \end{cases}$$

Die Proben nach den Formeln (**128**) sind:

$$(139)\quad \begin{cases} [pv] = 0, \\ [pbv] = 0, \\ [pcv] = 0, \\ \cdots\cdots, \end{cases}$$

oder wenn sämtliche Gewichte gleich 1 sind:

$$(140)\quad \begin{cases} [v] = 0, \\ [bv] = 0, \\ [cv] = 0, \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

2. Die n umgeformten Fehlergleichungen

$$\begin{array}{ll} v_1 = f_1 + a d\mathfrak{x} + b d\mathfrak{y} + c d\mathfrak{z} + \cdots, & \text{Gewicht} = p_1, \\ v_2 = f_2 + a d\mathfrak{x} + b d\mathfrak{y} + c d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad " \quad = p_2, \\ v_3 = f_3 + a d\mathfrak{x} + b d\mathfrak{y} + c d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad " \quad = p_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots, \\ v_n = f_n + a d\mathfrak{x} + b d\mathfrak{y} + c d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad " \quad = p_n, \end{array}$$

worin $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots a_n = a$, $b_1 = b_2 = b_3 = \cdots b_n = b$, $c_1 = c_2 = c_3 = \cdots c_n = c$, $\cdots$ ist, können reduzirt werden auf die eine Fehlergleichung

$$(141) \quad v = \frac{[pf]}{[p]} + a d\mathfrak{x} + b d\mathfrak{y} + c d\mathfrak{z} + \cdots, \quad \text{Gewicht} = [p].$$

3. Die Fehlergleichung

$$v = f + a d\mathfrak{x} + b d\mathfrak{y} + c d\mathfrak{z} + \cdots, \quad \text{Gewicht} = p,$$

kann ersetzt werden durch:

$$(142) \quad qv = qf + qa d\mathfrak{x} + qb d\mathfrak{y} + qc d\mathfrak{z} + \cdots, \quad \text{Gewicht} = \frac{p}{q^2}.$$

4. Die n Fehlergleichungen

$$\begin{array}{ll} v_1 = f_1 \pm d\mathfrak{x}, & \text{Gewicht} = p_1, \\ v_2 = f_2 \pm d\mathfrak{x} + b d\mathfrak{y} + c d\mathfrak{z} + \cdots, & \quad " \quad = p_2, \\ v_3 = f_3 \pm d\mathfrak{x}, & \quad " \quad = p_3, \\ \cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots, \\ v_n = f_n \pm d\mathfrak{x}, & \quad " \quad = p_n \end{array}$$

können reduzirt werden auf die eine Fehlergleichung

$$(143) \quad v = f_2 - \frac{[pf] - p_2 f_2}{[p] - p_2} + b d\mathfrak{y} + c d\mathfrak{z} + \cdots, \quad \text{Gewicht} = p_2 - \frac{p_2^2}{[p]} = \frac{([p] - p_2) p_2}{[p]}.$$

Alsdann ist:

$$(144) \quad d\mathfrak{x} = \mp \frac{[pf]}{[p]} \mp \frac{p_2}{[p]} b d\mathfrak{y} \mp \frac{p_2}{[p]} c d\mathfrak{z} \mp \cdots,$$

worin das $\left\{ \begin{array}{c} \text{obere} \\ \text{untere} \end{array} \right\}$ Vorzeichen gilt, wenn das Vorzeichen von $d\mathfrak{x}$ in den umgeformten Fehlergleichungen $\left\{ \begin{array}{c} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right\}$ ist.

Ebenso wie bei Anwendung der Formeln (**130**) bis (**133**) mufs auch bei Anwendung der Formeln (**143**) und (**144**) dem sich bei Auflösung der reduzirten Endgleichungen nach Formel (**127**) für Σ ergebenden Betrage $-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 - \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3 - \cdots$ noch $-\frac{[pf]}{[p]}[pf]$ hinzugesetzt werden, um nach Formel (**129**) den richtigen Werth von $[pvv]$ zu erhalten.

In dem Falle, dafs $p_1 = p_2 = p_3 = \cdots p_n = 1$ ist, vereinfachen sich die Formeln (**143**) und (**144**) wie folgt:

$$(145) \quad v = f_2 - \frac{[f] - f_2}{n-1} + b d\mathfrak{y} + c d\mathfrak{z} + \cdots, \quad \text{Gewicht} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n},$$

$$(146) \quad d\mathfrak{x} = \mp \frac{[f]}{n} \mp \frac{1}{n} b d\mathfrak{y} \mp \frac{1}{n} c d\mathfrak{z} \mp \cdots,$$

worin bezüglich der Vorzeichen das zu Formel (**144**) gesagte gilt.

Der erforderliche Zusatz zu dem Σ Betrage $-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 - \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3 - \cdots$ ist hier $-\frac{[f]}{n}[f]$.

Bedingte Beobachtungen.

I, II, III, IV, ... = wahrscheinlichste Werthe der beobachteten Gröfsen.

1, 2, 3, 4, ... = Beobachtungsergebnisse.

(1), (2), (3), (4), ... = Verbesserungen der Beobachtungsergebnisse 1, 2, 3, 4, ... und wahrscheinlichste Beobachtungsfehler.

$S_a, S_b, S_c,$ .... = durch die wahrscheinlichsten Werthe der beobachteten Gröfsen zu erfüllende Sollbeträge.

$\Sigma_a, \Sigma_b, \Sigma_c,$ .... = Beobachtungsergebnisse für die Sollbeträge.

(147) Die Anzahl r der zu erfüllenden Bedingungen ist gleich der Anzahl der vorliegenden überschüssigen Bestimmungen der gesuchten Gröfsen.

(148) Die zu erfüllenden Bedingungen müssen von einander unabhängig sein, so dafs ein und dieselbe Bedingung nicht mehrfach in verschiedener Form vorkommen kann.

(149) Die diesem Grundsatze entsprechenden Bedingungen werden in jedem Falle gefunden, indem zuerst die beobachteten Gröfsen ausgewählt werden, die zur einfachen nicht versicherten Bestimmung der gesuchten Gröfsen nothwendig sind, und indem dann für jede der übrigen beobachteten Gröfsen nacheinander festgestellt wird, welche unabhängige Bedingung durch Hinzutritt derselben zu den bereits betrachteten beobachteten Gröfsen entsteht.

Hierbei werden die besten Bedingungen gefunden, wenn die Bedingungen aufgestellt werden für die beobachteten Gröfsen, die die günstigsten Bestimmungen der gesuchten Gröfsen liefern.

Bedingungsgleichungen.

$$(150) \quad \begin{cases} F_a\,(\mathrm{I, II, III, IV}, \ldots) = S_a, \\ F_b\,(\mathrm{I, II, III, IV}, \ldots) = S_b, \\ F_c\,(\mathrm{I, II, III, IV}, \ldots) = S_c, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die Anzahl q der beobachteten Gröfsen ist gröfser als die Anzahl r der Bedingungsgleichungen.

$$(151) \quad \begin{cases} F_a(1, 2, 3, 4, \ldots) = \Sigma_a, \\ F_b(1, 2, 3, 4, \ldots) = \Sigma_b, \\ F_c(1, 2, 3, 4, \ldots) = \Sigma_c, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(152) \quad \begin{cases} f_a = S_a - \Sigma_a, \\ f_b = S_b - \Sigma_b, \\ f_c = S_c - \Sigma_c, \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

$$(153) \quad \begin{cases} \mathrm{I} = 1 + (1), \\ \mathrm{II} = 2 + (2), \\ \mathrm{III} = 3 + (3), \\ \mathrm{IV} = 4 + (4), \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

$$(154) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{\partial F_a}{\partial 1}, & a_2 = \frac{\partial F_a}{\partial 2}, & a_3 = \frac{\partial F_a}{\partial 3}, & a_4 = \frac{\partial F_a}{\partial 4}, & \ldots, \\ b_1 = \frac{\partial F_b}{\partial 1}, & b_2 = \frac{\partial F_b}{\partial 2}, & b_3 = \frac{\partial F_b}{\partial 3}, & b_4 = \frac{\partial F_b}{\partial 4}, & \ldots, \\ c_1 = \frac{\partial F_c}{\partial 1}, & c_2 = \frac{\partial F_c}{\partial 2}, & c_3 = \frac{\partial F_c}{\partial 3}, & c_4 = \frac{\partial F_c}{\partial 4}, & \ldots, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots \end{cases}$$

Umgeformte Bedingungsgleichungen.

$$(155)\quad \begin{cases} a_1(1) + a_2(2) + a_3(3) + a_4(4) + \cdots\cdots = f_a, \\ b_1(1) + b_2(2) + b_3(3) + b_4(4) + \cdots\cdots = f_b, \\ c_1(1) + c_2(2) + c_3(3) + c_4(4) + \cdots\cdots = f_c, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Korrelatengleichungen.

$$(156)\quad \begin{cases} (1) = \frac{a_1}{p_1} k_a + \frac{b_1}{p_1} k_b + \frac{c_1}{p_1} k_c + \cdots\cdots, \\ (2) = \frac{a_2}{p_2} k_a + \frac{b_2}{p_2} k_b + \frac{c_2}{p_2} k_c + \cdots\cdots, \\ (3) = \frac{a_3}{p_3} k_a + \frac{b_3}{p_3} k_b + \frac{c_3}{p_3} k_c + \cdots\cdots, \\ (4) = \frac{a_4}{p_4} k_a + \frac{b_4}{p_4} k_b + \frac{c_4}{p_4} k_c + \cdots\cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Endgleichungen.

$$(157)\quad \begin{cases} \left[\frac{aa}{p}\right] k_a + \left[\frac{ab}{p}\right] k_b + \left[\frac{ac}{p}\right] k_c + \cdots\cdots = f_a, \\ \left[\frac{ab}{p}\right] k_a + \left[\frac{bb}{p}\right] k_b + \left[\frac{bc}{p}\right] k_c + \cdots\cdots = f_b, \\ \left[\frac{ac}{p}\right] k_a + \left[\frac{bc}{p}\right] k_b + \left[\frac{cc}{p}\right] k_c + \cdots\cdots = f_c, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$(158)\quad \left\{ \begin{array}{l|l|l|l|l} \mathfrak{a}_1 = \left[\frac{aa}{p}\right], & \mathfrak{b}_1 = \left[\frac{ab}{p}\right], & \mathfrak{c}_1 = \left[\frac{ac}{p}\right], & \cdots\cdots, & \mathfrak{f}_1 = -f_a, \\ & \mathfrak{b}_2 = \left[\frac{bb}{p}\right], & \mathfrak{c}_2 = \left[\frac{bc}{p}\right], & \cdots\cdots, & \mathfrak{f}_2 = -f_b, \\ & & \mathfrak{c}_3 = \left[\frac{cc}{p}\right], & \cdots\cdots, & \mathfrak{f}_3 = -f_c, \\ & & & \cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots \end{array} \right.$$

$$(159)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_1 k_a + \mathfrak{b}_1 k_b + \mathfrak{c}_1 k_c + \cdots\cdots \mathfrak{f}_1 = 0, \\ \mathfrak{b}_1 k_a + \mathfrak{b}_2 k_b + \mathfrak{c}_2 k_c + \cdots\cdots \mathfrak{f}_2 = 0, \\ \mathfrak{c}_1 k_a + \mathfrak{c}_2 k_b + \mathfrak{c}_3 k_c + \cdots\cdots \mathfrak{f}_3 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Die Auflösung der Endgleichungen erfolgt wie bei den vermittelnden Beobachtungen.

Rechenproben.

(160) $[p(n)(n)] = [kf] = -[k\mathfrak{f}]$.

(161) $$= \frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 + \frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 + \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3 + \cdots$$

(162) $$= p_1(1)(1) + p_2(2)(2) + p_3(3)(3) + p_4(4)(4) + \cdots\cdots$$

(163) Die umgeformten Bedingungsgleichungen **(155)** und die Bedingungsgleichungen **(150)** müssen durch die Zahlenwerthe der Verbesserungen (1), (2), (3), (4), ..., und der wahrscheinlichsten Werthe I, II, III, IV, ... der beobachteten Gröfsen erfüllt werden.

Mittlere Fehler.

$$\text{(164)}\quad \mathfrak{m} = \pm\sqrt{\frac{[p(\mathrm{n})(\mathrm{n})]}{r}}.$$

$$\text{(165)}\quad m_1 = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_1}},\ m_2 = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_2}},\ m_3 = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_3}},\ m_4 = \pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{p_4}},\ \cdots$$

Bildung der reduzirten Endgleichungen aus reduzirten Bedingungs- und Korrelatengleichungen.

Die Bedingungsgleichungen

$$\begin{cases} (1) + (2) + (3) + (4) + \cdots = f_a, \\ b_1(1) + b_2(2) + b_3(3) + b_4(4) + \cdots = f_b, \\ c_1(1) + c_2(2) + c_3(3) + c_4(4) + \cdots = f_c, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

und die Korrelatengleichungen

$$\begin{cases} (1) = \frac{1}{p_1}k_a + \frac{b_1}{p_1}k_b + \frac{c_1}{p_1}k_c + \cdots, \\ (2) = \frac{1}{p_2}k_a + \frac{b_2}{p_2}k_b + \frac{c_2}{p_2}k_c + \cdots, \\ (3) = \frac{1}{p_3}k_a + \frac{b_3}{p_3}k_b + \frac{c_3}{p_3}k_c + \cdots, \\ (4) = \frac{1}{p_4}k_a + \frac{b_4}{p_4}k_b + \frac{c_4}{p_4}k_c + \cdots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

worin $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \cdots = +1$ ist, können reduzirt werden auf die Bedingungsgleichungen

$$\text{(166)}\begin{cases} b_1((1)) + b_2((2)) + b_3((3)) + b_4((4)) + \cdots + \left[\frac{b}{p}\right]((\mathrm{n}+1)) = f_b - \frac{\left[\frac{b}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a, \\ c_1((1)) + c_2((2)) + c_3((3)) + c_4((4)) + \cdots + \left[\frac{c}{p}\right]((\mathrm{n}+1)) = f_c - \frac{\left[\frac{c}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

und die k_a nicht enthaltenden Korrelatengleichungen

$$\text{(167)}\begin{cases} ((1)) = \frac{b_1}{p_1}k_b + \frac{c_1}{p_1}k_c + \cdots, \\ ((2)) = \frac{b_2}{p_2}k_b + \frac{c_2}{p_2}k_c + \cdots, \\ ((3)) = \frac{b_3}{p_3}k_b + \frac{c_3}{p_3}k_c + \cdots, \\ ((4)) = \frac{b_4}{p_4}k_b + \frac{c_4}{p_4}k_c + \cdots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ ((\mathrm{n}+1)) = -\frac{\left[\frac{b}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}k_b - \frac{\left[\frac{c}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}k_c - \cdots \end{cases}$$

Dann ist:

$$(168)\quad k_a = -\frac{\left[\frac{b}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}k_b - \frac{\left[\frac{c}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]}k_c - \cdots + \frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a = ((n+1)) + \frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]}f_a$$

und:

$$(169)\quad \begin{cases} (1) = ((1)) + \frac{1}{p_1}k_a, \\ (2) = ((2)) + \frac{1}{p_2}k_a, \\ (3) = ((3)) + \frac{1}{p_3}k_a, \\ (4) = ((4)) + \frac{1}{p_4}k_a, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Die Formeln (**166**) bis (**169**) vereinfachen sich, wenn die Gewichte p_1, p_2, p_3, p_4, ... sämtlich gleich 1 sind, wie folgt:

$$(170)\quad \begin{cases} b_1((1)) + b_2((2)) + b_3((3)) + b_4((4)) + \cdots + [b]((n+1)) = f_b - \frac{[b]}{n}f_a, \\ c_1((1)) + c_2((2)) + c_3((3)) + c_4((4)) + \cdots + [c]((n+1)) = f_c - \frac{[c]}{n}f_a, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$(171)\quad \begin{cases} ((1)) = b_1 k_b + c_1 k_c + \cdots, \\ ((2)) = b_2 k_b + c_2 k_c + \cdots, \\ ((3)) = b_3 k_b + c_3 k_c + \cdots, \\ ((4)) = b_4 k_b + c_4 k_c + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots, \\ ((n+1)) = -\frac{[b]}{n}k_b - \frac{[c]}{n}k_c - \cdots \end{cases}$$

$$(172)\quad k_a = -\frac{[b]}{n}k_b - \frac{[c]}{n}k_c - \cdots + \frac{1}{n}f_a = ((n+1)) + \frac{1}{n}f_a.$$

$$(173)\quad \begin{cases} (1) = ((1)) + k_a, \\ (2) = ((2)) + k_a, \\ (3) = ((3)) + k_a, \\ (4) = ((4)) + k_a, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Spezielle Regeln für die Berechnung der Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen.

(**174**) In Polygonnetzen ist die Anzahl r der zu erfüllenden Bedingungen, wenn n_p neu zu bestimmende Knotenpunkte durch n_z Züge mit einander verbunden sind,:

$$r = n_z - n_p + 1,$$

(**175**) und wenn das Netz aufserdem durch n_a Züge mit gegebenen Anschlufspunkten verbunden ist, so dafs im ganzen $N_z = n_z + n_a$ Züge vorhanden sind,:

$$r = N_z - n_p.$$

Die Regeln (**174**) und (**175**) können in allen Fällen angewendet werden, wo Gröfsen aus den beobachteten Unterschieden zwischen denselben zu bestimmen

sind, also beispielsweise auch wo Richtungen (= Knotenpunkte) aus den auf einem Punkte beobachteten Winkeln (= Zügen) zu bestimmen sind.

In **Dreiecksnetzen**, woraus rückwärts eingeschnittene Punkte und die auf diesen beobachteten Winkel oder Richtungen ausgeschieden sind, ist die Gesamtanzahl r der zu erfüllenden Bedingungen:

(176) wenn zur gegenseitigen Festlegung von n_p Punkten n_w Winkel vorliegen,:

$$r = n_w - 2\,n_p + 4,$$

(177) wenn zur gegenseitigen Festlegung von n_p Punkten n_r Richtungen auf n_{st} Standpunkten vorliegen,:

$$r = n_r - 2n_p - n_{st} + 4,$$

(178) wenn das Netz aufserdem noch an n_a Dreiecksseiten angeschlossen ist, deren Neigung oder Richtung gegeben und unverändert beizubehalten ist, gleich der sich nach (**176**) oder (**177**) ergebenden Anzahl plus $n_a - 1$,

(179) und wenn das Netz aufserdem noch an s_a Dreiecksseiten angeschlossen ist, deren Länge gegeben und unverändert beizubehalten ist, gleich der sich nach (**176**) oder (**177**) und (**179**) ergebenden Anzahl plus $s_a - 1$.

Bei Abzählung der beobachteten Winkel oder Richtungen werden Anschlufswinkel oder Anschlufsrichtungen nicht mitgezählt, wenn die betreffenden Anschlufsseiten nicht dem eigentlichen Dreiecksnetze angehören.

(180) Im einzelnen ist die Anzahl r_I der zu erfüllenden Bedingungsgleichungen I. Klasse oder Stationswinkelbedingungen, wenn n_w Winkel zur Bestimmung von n_r Richtungen auf n_{st} Standpunkten vorliegen,:

$$r_I = n_w - n_r + n_{st},$$

ferner die Anzahl r_{II} der Bedingungen II. Klasse oder der Netzwinkelbedingungen,

(181) wenn n_{st} Standpunkte durch n_l Linien verbunden sind, an deren beiden Enden die Winkel bestimmt sind,:

$$r_{II} = n_l - n_{st} + 1,$$

(182) wenn das Netz aufserdem an n_a Dreiecksseiten angeschlossen ist, deren Neigungen gegeben und unverändert beizubehalten sind,:

$$r_{II} = n_l - n_{st} + n_a,$$

endlich die Anzahl r_{III} der Bedingungen III. Klasse oder der Seitenbedingungen,

(183) wenn n_p Dreieckspunkte durch n_s Dreiecksseiten verbunden sind,:

$$r_{III} = n_s - 2n_p + 3,$$

(184) wenn aufserdem die Längen für s_a Dreiecksseiten des Dreiecksnetzes gegeben und unverändert beizubehalten sind,:

$$r_{III} = n_s - 2n_p + s_a + 2.$$

(185) In **Liniennetzen** ist die Anzahl r der zu erfüllenden Bedingungen, wenn zur Bestimmung von n_p Punkten n_s Strecken gemessen sind und n_{sg} von diesen Strecken in n_g geraden Linien liegen, die gerade bleiben sollen,:

$$r = n_s - 2\,n_p + 3 + n_{sg} - n_g.$$

Bedingte vermittelnde Beobachtungen.

1. Verfahren.

Umgeformte Fehlergleichungen.

$$(186)\quad \begin{cases} v_1 = a_1\, d\mathfrak{x} + b_1\, d\mathfrak{y} + c_1\, d\mathfrak{z} + \cdots + f_1, \\ v_2 = a_2\, d\mathfrak{x} + b_2\, d\mathfrak{y} + c_2\, d\mathfrak{z} + \cdots + f_2, \\ v_3 = a_3\, d\mathfrak{x} + b_3\, d\mathfrak{y} + c_3\, d\mathfrak{z} + \cdots + f_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ v_n = a_n\, d\mathfrak{x} + b_n\, d\mathfrak{y} + c_n\, d\mathfrak{z} + \cdots + f_n. \end{cases}$$

Die Anzahl n der Gleichungen ist größer als die Anzahl q der zu bestimmenden Größen.

Umgeformte Bedingungsgleichungen.

$$(187)\quad \begin{cases} A_1\, d\mathfrak{x} + A_2\, d\mathfrak{y} + A_3\, d\mathfrak{z} + \cdots = f_A, \\ B_1\, d\mathfrak{x} + B_2\, d\mathfrak{y} + B_3\, d\mathfrak{z} + \cdots = f_B, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Die Anzahl q der zu bestimmenden Größen ist größer als die Anzahl r der Bedingungsgleichungen, es ist also auch $n > q > r$.

Endgleichungen.

$$(188\,\text{a})\quad \begin{cases} [paa]\, d\mathfrak{x} + [pab]\, d\mathfrak{y} + [pac]\, d\mathfrak{z} + \cdots - A_1 k_A - B_1 k_B - \cdots + [paf] = 0, \\ [pab]\, d\mathfrak{x} + [pbb]\, d\mathfrak{y} + [pbc]\, d\mathfrak{z} + \cdots - A_2 k_A - B_2 k_B - \cdots + [pbf] = 0, \\ [pac]\, d\mathfrak{x} + [pbc]\, d\mathfrak{y} + [pcc]\, d\mathfrak{z} + \cdots - A_3 k_A - B_3 k_B - \cdots + [pcf] = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$(188\,\text{b})\quad \begin{cases} -A_1\, d\mathfrak{x} - A_2\, d\mathfrak{y} - A_3\, d\mathfrak{z} - \cdots\cdots\cdots\cdots + f_A = 0, \\ -B_1\, d\mathfrak{x} - B_2\, d\mathfrak{y} - B_3\, d\mathfrak{z} - \cdots\cdots\cdots\cdots + f_B = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$(189)\quad \begin{cases} x = \mathfrak{x} + d\mathfrak{x}, \\ y = \mathfrak{y} + d\mathfrak{y}, \\ z = \mathfrak{z} + d\mathfrak{z}, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$(190)\quad [pvv] = [pff] + [paf]\, d\mathfrak{x} + [pbf]\, d\mathfrak{y} + [pcf]\, d\mathfrak{z} + \cdots + k_A f_A + k_B f_B + \cdots$$

$$(191)\quad \mathfrak{m} = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n - q + r}}.$$

2. Verfahren.

$$(192)\quad \begin{cases} d\mathfrak{x} = d\mathfrak{x}_0 + (1), \\ d\mathfrak{y} = d\mathfrak{y}_0 + (2), \\ d\mathfrak{z} = d\mathfrak{z}_0 + (3), \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Umgeformte Fehlergleichungen.

$$(193)\quad \begin{cases} v_{01} = a_1\, d\mathfrak{x}_0 + b_1\, d\mathfrak{y}_0 + c_1\, d\mathfrak{z}_0 + \cdots f_1, \\ v_{02} = a_2\, d\mathfrak{x}_0 + b_2\, d\mathfrak{y}_0 + c_2\, d\mathfrak{z}_0 + \cdots f_2, \\ v_{03} = a_3\, d\mathfrak{x}_0 + b_3\, d\mathfrak{y}_0 + c_3\, d\mathfrak{z}_0 + \cdots f_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ v_{0n} = a_n\, d\mathfrak{x}_0 + b_n\, d\mathfrak{y}_0 + c_n\, d\mathfrak{z}_0 + \cdots f_n. \end{cases}$$

Endgleichungen.

$$(194)\quad \begin{cases} [paa]\,d\mathfrak{x}_0 + [pab]\,d\mathfrak{y}_0 + [pac]\,d\mathfrak{z}_0 + \cdots [paf] = 0, \\ [pab]\,d\mathfrak{x}_0 + [pbb]\,d\mathfrak{y}_0 + [pbc]\,d\mathfrak{z}_0 + \cdots [pbf] = 0, \\ [pac]\,d\mathfrak{x}_0 + [pbc]\,d\mathfrak{y}_0 + [pcc]\,d\mathfrak{z}_0 + \cdots [pcf] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(195)\quad \begin{cases} x_0 = \mathfrak{x} + d\mathfrak{x}_0, \\ y_0 = \mathfrak{y} + d\mathfrak{y}_0, \\ z_0 = \mathfrak{z} + d\mathfrak{z}_0, \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(196)\quad [p v_0 v_0] = [pff] - \frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 - \frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 - \frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3 - \cdots$$

$$= [pff] + \mathfrak{f}_1\,d\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{f}_2\,d\mathfrak{y}_0 + \mathfrak{f}_3\,d\mathfrak{z}_0 + \cdots$$

$$(197)\quad \mathfrak{m}_1 = \pm\sqrt{\frac{[p v_0 v_0]}{n-q}}.$$

Bedingungsgleichungen.

$$(198)\quad \begin{cases} F_A(x, y, z, \ldots) = S_A, \\ F_B(x, y, z, \ldots) = S_B, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(199)\quad \begin{cases} F_A(x_0, y_0, z_0, \ldots) = \Sigma_a, \\ F_B(x_0, y_0, z_0, \ldots) = \Sigma_b, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases} \qquad (200)\quad \begin{cases} f_a = S_A - \Sigma_a, \\ f_b = S_B - \Sigma_b, \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(201)\quad \begin{cases} A_1 = \frac{\partial F_A}{\partial x_0}, & A_2 = \frac{\partial F_A}{\partial y_0}, & A_3 = \frac{\partial F_A}{\partial z_0}, & \ldots, \\ B_1 = \frac{\partial F_B}{\partial x_0}, & B_2 = \frac{\partial F_B}{\partial y_0}, & B_3 = \frac{\partial F_B}{\partial z_0}, & \ldots, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots \end{cases}$$

$$(202)\quad \begin{cases} x = x_0 + (1), \\ y = y_0 + (2), \\ z = z_0 + (3), \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Umgeformte Bedingungsgleichungen.

$$(203)\quad \begin{cases} A_1\,(1) + A_2\,(2) + A_3\,(3) + \cdots = f_a, \\ B_1\,(1) + B_2\,(2) + B_3\,(3) + \cdots = f_b, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(204)\quad \begin{cases} [paa]\,Q_{11} + [pab]\,Q_{12} + [pac]\,Q_{13} + \cdots = 1, \\ [pab]\,Q_{11} + [pbb]\,Q_{12} + [pbc]\,Q_{13} + \cdots = 0, \\ [pac]\,Q_{11} + [pbc]\,Q_{12} + [pcc]\,Q_{13} + \cdots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ [paa]\,Q_{21} + [pab]\,Q_{22} + [pac]\,Q_{23} + \cdots = 0, \\ [pab]\,Q_{21} + [pbb]\,Q_{22} + [pbc]\,Q_{23} + \cdots = 1, \\ [pac]\,Q_{21} + [pbc]\,Q_{22} + [pcc]\,Q_{23} + \cdots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ [paa]\,Q_{31} + [pab]\,Q_{32} + [pac]\,Q_{33} + \cdots = 0, \\ [pab]\,Q_{31} + [pbb]\,Q_{32} + [pbc]\,Q_{33} + \cdots = 0, \\ [pac]\,Q_{31} + [pbc]\,Q_{32} + [pcc]\,Q_{33} + \cdots = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

u. s. w.

Die Auflösung der Gleichungen (**204**) erfolgt nach Schema (**219**).

Koeffizienten $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$, ...

$$(205)\quad \begin{cases} (\mathfrak{A}_1) = +A_1 Q_{11} + A_2 Q_{12} + A_3 Q_{13} + \cdots, \\ (\mathfrak{A}_2) = +A_1 Q_{21} + A_2 Q_{22} + A_3 Q_{23} + \cdots, \\ (\mathfrak{A}_3) = +A_1 Q_{31} + A_2 Q_{32} + A_3 Q_{33} + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ (\mathfrak{B}_1) = +B_1 Q_{11} + B_2 Q_{12} + B_3 Q_{13} + \cdots, \\ (\mathfrak{B}_2) = +B_1 Q_{21} + B_2 Q_{22} + B_3 Q_{23} + \cdots, \\ (\mathfrak{B}_3) = +B_1 Q_{31} + B_2 Q_{32} + B_3 Q_{33} + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

Korrelatengleichungen.

$$(206)\quad \begin{cases} (1) = (\mathfrak{A}_1) k_A + (\mathfrak{B}_1) k_B + \cdots, \\ (2) = (\mathfrak{A}_2) k_A + (\mathfrak{B}_2) k_B + \cdots, \\ (3) = (\mathfrak{A}_3) k_A + (\mathfrak{B}_3) k_B + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

oder

$$(207)\quad \begin{cases} [1] = +A_1 k_A + B_1 k_B + \cdots, \\ [2] = +A_2 k_A + B_2 k_B + \cdots, \\ [3] = +A_3 k_A + B_3 k_B + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$(208)\quad \begin{cases} (1) = [1] Q_{11} + [2] Q_{12} + [3] Q_{13} + \cdots, \\ (2) = [1] Q_{21} + [2] Q_{22} + [3] Q_{23} + \cdots, \\ (3) = [1] Q_{31} + [2] Q_{32} + [3] Q_{33} + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Endgleichungen.

$$(209)\quad \begin{cases} [A(\mathfrak{A})] k_A + [A(\mathfrak{B})] k_B + \cdots = f_a, \\ [B(\mathfrak{A})] k_A + [B(\mathfrak{B})] k_B + \cdots = f_b, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$(210)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_1 = [A(\mathfrak{A})], & \mathfrak{b}_1 = [A(\mathfrak{B})] = [B(\mathfrak{A})], & \cdots, & \mathfrak{f}_1 = -f_a, \\ & \mathfrak{b}_2 = [B(\mathfrak{B})], & \cdots, & \mathfrak{f}_2 = -f_b, \\ & & & \cdots\cdots, \end{cases}$$

$$(211)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_1 k_A + \mathfrak{b}_1 k_B + \cdots \mathfrak{f}_1 = 0, \\ \mathfrak{b}_1 k_A + \mathfrak{b}_2 k_B + \cdots \mathfrak{f}_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$(212)\quad \begin{aligned} [kf] &= -[k\mathfrak{f}] \\ &= +\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1 + \frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2 + \cdots \\ &= +(1)[1] + (2)[2] + (3)[3] + \cdots \end{aligned}$$

$$(213)\quad \mathfrak{m}_2 = \pm\sqrt{\frac{[kf]}{r}}.$$

$$(214)\quad [pvv] = [pv_0v_0] + [kf].$$

$$(215)\quad \mathfrak{m} = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-q+r}} = \pm\sqrt{\frac{[pv_0v_0] + [kf]}{n-q+r}}.$$

Gewichte und mittlere Fehler der wahrscheinlichsten Werthe der zu bestimmenden Gröſsen und von Funktionen derselben.

1. Für vermittelnde Beobachtungen.

Gewichte und mittlere Fehler der wahrscheinlichsten Werthe der zu bestimmenden Gröſsen.

Endgleichungen.

$$(216)\quad \begin{cases} [paa]\,d\mathfrak{x}+[pab]\,d\mathfrak{y}+[pac]\,d\mathfrak{z}+\cdots[paf]=0, \\ [pab]\,d\mathfrak{x}+[pbb]\,d\mathfrak{y}+[pbc]\,d\mathfrak{z}+\cdots[pbf]=0, \\ [pac]\,d\mathfrak{x}+[pbc]\,d\mathfrak{y}+[pcc]\,d\mathfrak{z}+\cdots[pcf]=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$(217\,a)\quad \begin{cases} [paa]\,Q_{11}+[pab]\,Q_{12}+[pac]\,Q_{13}+\cdots=1, \\ [pab]\,Q_{11}+[pbb]\,Q_{12}+[pbc]\,Q_{13}+\cdots=0, \\ [pac]\,Q_{11}+[pbc]\,Q_{12}+[pcc]\,Q_{13}+\cdots=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \end{cases}$$

$$(217\,b)\quad \begin{cases} [paa]\,Q_{21}+[pab]\,Q_{22}+[pac]\,Q_{23}+\cdots=0, \\ [pab]\,Q_{21}+[pbb]\,Q_{22}+[pbc]\,Q_{23}+\cdots=1, \\ [pac]\,Q_{21}+[pbc]\,Q_{22}+[pcc]\,Q_{23}+\cdots=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \end{cases}$$

$$(217\,c)\quad \begin{cases} [paa]\,Q_{31}+[pab]\,Q_{32}+[pac]\,Q_{33}+\cdots=0, \\ [pab]\,Q_{31}+[pbb]\,Q_{32}+[pbc]\,Q_{33}+\cdots=0, \\ [pac]\,Q_{31}+[pbc]\,Q_{32}+[pcc]\,Q_{33}+\cdots=1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Auflösung der Gleichungen (217 a).

$$(218\,a)\quad \begin{cases} \mathfrak{f}_1=-1, \quad \mathfrak{f}_2=0, \quad \mathfrak{f}_3=0, \quad \ldots, \\ \mathfrak{F}_2=-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1, \quad \mathfrak{F}_3=-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2, \quad \ldots \\ \cdots\cdots, \\ Q_{13}=-\cdots-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}, \\ Q_{12}=-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{13}-\cdots-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}, \\ Q_{11}=-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_{12}-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_{13}-\cdots-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}, \\ \quad=+\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1+\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2+\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3+\cdots \text{(Probe).} \end{cases}$$

Auflösung der Gleichungen (217 b).

$$(218\,b)\quad \begin{cases} \mathfrak{f}_1=0, \quad \mathfrak{f}_2=-1, \quad \mathfrak{f}_3=0, \quad \ldots, \\ \mathfrak{F}_2=-1, \quad \mathfrak{F}_3=-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2, \quad \ldots; \\ \cdots\cdots, \\ Q_{23}=-\cdots-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}, \\ Q_{22}=-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{23}-\cdots-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}, \\ \quad=+\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2+\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3+\cdots \text{(Probe).} \end{cases}$$

Auflösung der Gleichungen (**217**c).

$$
(\mathbf{218}\,c)\quad \begin{cases} \mathfrak{f}_1=0, \quad \mathfrak{f}_2=0, \quad \mathfrak{f}_3=-1, \quad \ldots., \\ \qquad\qquad \mathfrak{F}_2=0, \quad \mathfrak{F}_3=-1, \quad \ldots.; \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots., \\ \qquad Q_{33}=-\ldots.-\dfrac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}, \\ \qquad\quad =+\dfrac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3+\cdots\text{(Probe).} \end{cases}
$$

u. s. w.

(**219**) Schema für die Auflösung der Gleichungen (**217**).

$\mathfrak{f}_1=-1$	$\mathfrak{f}_2=0$	$\mathfrak{f}_3=0$	....	Probe.	$\mathfrak{f}_2=-1$	$\mathfrak{f}_3=0$	....	Probe.	$\mathfrak{f}_3=-1$	....	Probe.	....
	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	....	$+\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{f}_1$	$\mathfrak{F}_2=-1$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	....	$+\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	$\mathfrak{F}_3=-1$	....	$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	....
$-\frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{a}_1}$	$=\mathfrak{F}_2$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	....	$+\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{F}_2$	$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$	$=\mathfrak{F}_3$	....	$+\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}$	....	....	....
....	$-\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{B}_2}$	$=\mathfrak{F}_3$	....	$+\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{F}_3$	....	$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}$	....	....	....	....		
$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_{13}$	....	$-\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{C}_3}$	....	....	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{23}$	....	....		$=Q_{33}$	....	$=Q_{33}$	
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}Q_{12}$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}Q_{13}$	....	....		$=Q_{22}$	$=Q_{23}$	....	$=Q_{22}$				
$=Q_{11}$	$=Q_{12}$	$=Q_{13}$	....	$=Q_{11}$								

$$
(\mathbf{220})\quad \frac{1}{P_x}=Q_{11}, \quad\Big|\quad \frac{1}{P_y}=Q_{22}, \quad\Big|\quad \frac{1}{P_z}=Q_{33}, \quad\Big|\quad \ldots.
$$

$$
(\mathbf{221})\quad M_x=\pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P_x}}, \quad\Big|\quad M_y=\pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P_y}}, \quad\Big|\quad M_z=\pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P_z}}, \quad\Big|\quad \ldots.
$$

Gewicht und mittlerer Fehler einer Funktion der wahrscheinlichsten Werthe der zu bestimmenden Gröfsen.

$$
(\mathbf{222})\quad L=\varphi(x, y, z, \ldots.).
$$

$$
(\mathbf{223})\quad l_1=\frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{x}}, \quad\Big|\quad l_2=\frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{y}}, \quad\Big|\quad l_3=\frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{z}}, \quad\Big|\quad \ldots.
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{224})\quad \frac{1}{P_L}=l_1 l_1 Q_{11}&+2 l_1 l_2 Q_{12}+2 l_1 l_3 Q_{13}+\cdots \\
&+\ l_2 l_2 Q_{22}+2 l_2 l_3 Q_{23}+\cdots \\
&\qquad\qquad +\ l_3 l_3 Q_{33}+\cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +\cdots
\end{aligned}
$$

$$
(\mathbf{225})\quad \begin{cases} [paa]\,Q_1+[pab]\,Q_2+[pac]\,Q_3+\cdots=l_1, \\ [pab]\,Q_1+[pbb]\,Q_2+[pbc]\,Q_3+\cdots=l_2, \\ [pac]\,Q_1+[pbc]\,Q_2+[pcc]\,Q_3+\cdots=l_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}
$$

$$(226)\quad L_2 = l_2 - \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1} l_1, \quad L_3 = l_3 - \frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1} l_1 - \frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2} \mathfrak{L}_2, \ldots\ldots$$

$$(227)\quad \frac{1}{P_L} = + l_1 Q_1 + l_2 Q_2 + l_3 Q_3 + \cdots\cdots = [lQ],$$

$$= + \frac{l_1}{\mathfrak{a}_1} l_1 + \frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2} \mathfrak{L}_2 + \frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3} \mathfrak{L}_3 + \cdots\cdots$$

$$(228)\quad M_L = \pm \mathfrak{m} \sqrt{\frac{1}{P_L}}.$$

(229) Schema für die Auflösung der Gleichungen (**225**) und für die Gewichtsberechnung.

l_1	l_2	l_3	....	Gewicht P_L.	
	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1} l_1$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1} l_1$	....	$+\frac{l_1}{\mathfrak{a}_1} l_1$	$+l_1 Q_1$
$+\frac{l_1}{\mathfrak{a}_1}$	$=\mathfrak{L}_2$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2} \mathfrak{L}_2$	....	$+\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2} \mathfrak{L}_2$	$+l_2 Q_2$
....	$+\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{C}_2}$	$=\mathfrak{L}_3$	....	$+\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3} \mathfrak{L}_3$	$+l_3 Q_3$
$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1} Q_3$	....	$+\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}$	....	....	....
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1} Q_2$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2} Q_3$	....	....	$=\frac{1}{P_L}=$	
$=Q_1$	$=Q_2$	$=Q_3$	....		

2. Für bedingte Beobachtungen.

Gewicht und mittlerer Fehler einer Funktion der wahrscheinlichsten Werthe der beobachteten Gröfsen.

$$(230)\quad L = \varphi(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}, \ldots).$$

$$(231)\quad l_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial 1}, \quad \Big| \quad l_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial 2}, \quad \Big| \quad l_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial 3}, \quad \Big| \quad l_4 = \frac{\partial \varphi}{\partial 4}, \quad \Big| \quad \ldots\ldots$$

$$(232)\quad \begin{cases} \left[\frac{aa}{p}\right] r_a + \left[\frac{ab}{p}\right] r_b + \left[\frac{ac}{p}\right] r_c + \cdots \left[\frac{al}{p}\right] = 0, \\ \left[\frac{ab}{p}\right] r_a + \left[\frac{bb}{p}\right] r_b + \left[\frac{bc}{p}\right] r_c + \cdots \left[\frac{bl}{p}\right] = 0, \\ \left[\frac{ac}{p}\right] r_a + \left[\frac{bc}{p}\right] r_b + \left[\frac{cc}{p}\right] r_c + \cdots \left[\frac{cl}{p}\right] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(233)\quad \begin{cases} L_1 = l_1 + a_1 r_a + b_1 r_b + c_1 r_c + \cdots, \\ L_2 = l_2 + a_2 r_a + b_2 r_b + c_2 r_c + \cdots, \\ L_3 = l_3 + a_3 r_a + b_3 r_b + c_3 r_c + \cdots, \\ L_4 = l_4 + a_4 r_a + b_4 r_b + c_4 r_c + \cdots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(234\text{a})\quad\left\{\begin{array}{l|l|l|l|l}
\mathfrak{a}_1=\left[\frac{aa}{p}\right], & \mathfrak{b}_1=\left[\frac{ab}{p}\right], & \mathfrak{c}_1=\left[\frac{ac}{p}\right], & \ldots., & \mathfrak{l}_1=\left[\frac{al}{p}\right], \\
 & \mathfrak{b}_2=\left[\frac{bb}{p}\right], & \mathfrak{c}_2=\left[\frac{bc}{p}\right], & \ldots., & \mathfrak{l}_2=\left[\frac{bl}{p}\right], \\
 & & \mathfrak{c}_3=\left[\frac{cc}{p}\right], & \ldots., & \mathfrak{l}_3=\left[\frac{cl}{p}\right], \\
 & & & \ldots., & \ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

$$(234\text{b})\quad\left\{\begin{array}{l|l|l|l}
\mathfrak{B}_2=\mathfrak{b}_2-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1, & \mathfrak{C}_2=\mathfrak{c}_2-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{c}_1}\mathfrak{c}_1, & \ldots., & \mathfrak{L}_2=\mathfrak{l}_2-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1, \\
 & \mathfrak{C}_3=\mathfrak{c}_3-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{C}_2, & \ldots., & \mathfrak{L}_3=\mathfrak{l}_3-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2, \\
 & & \ldots., & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

$$(235)\quad \frac{1}{P_L}=\left[\frac{LL}{p}\right]=\frac{L_1L_1}{p_1}+\frac{L_2L_2}{p_2}+\frac{L_3L_3}{p_3}+\frac{L_4L_4}{p_4}+\cdots$$
$$=\left[\frac{ll}{p}\right]+\mathfrak{l}_1 r_a+\mathfrak{l}_2 r_b+\mathfrak{l}_3 r_c+\cdots$$
$$=\left[\frac{ll}{p}\right]-\frac{\mathfrak{l}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1-\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2-\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3+\cdots.$$

$$(236)\quad M_L=\pm\mathfrak{m}\sqrt{\frac{1}{P_L}}.$$

(237) Schema für die Auflösung der Gleichungen (232) und für die Gewichtsberechnung.

$\left[\frac{al}{p}\right]$.	$\left[\frac{bl}{p}\right]$.	$\left[\frac{cl}{p}\right]$.	....	Gewicht P_L.	
$\mathfrak{l}_1$	$\mathfrak{l}_2$	$\mathfrak{l}_3$	....	$\left[\frac{ll}{p}\right]$	$\left[\frac{ll}{p}\right]$
	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	....	$-\frac{\mathfrak{l}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	$+\mathfrak{l}_1 r_a$
$-\frac{\mathfrak{l}_1}{\mathfrak{a}_1}$	$=\mathfrak{L}_2$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	....	$-\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	$+\mathfrak{l}_2 r_b$
....	$-\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}$	$=\mathfrak{L}_3$	....	$-\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3$	$+\mathfrak{l}_3 r_c$
$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}r_c$	....	$-\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}$	....	....	....
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}r_b$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}r_c$	....	....	$=\frac{1}{P_L}=$	
$=r_a$	$=r_b$	$=r_c$	....		

Gewichte und mittlere Fehler der wahrscheinlichsten Werthe der beobachteten Gröfsen.

Für die Gewichte P_I, P_{II}, P_{III}, P_{IV}, ... der wahrscheinlichsten Werthe I, II, III, IV, ... der beobachteten Gröfsen wird

$$(238)\quad\left\{\begin{array}{llllll}
\text{für I:} & l_1=1, & l_2=0, & l_3=0, & l_4=0, & \ldots., \\
\text{,, II:} & l_1=0, & l_2=1, & l_3=0, & l_4=0, & \ldots., \\
\text{,, III:} & l_1=0, & l_2=0, & l_3=1, & l_4=0, & \ldots., \\
\text{,, IV:} & l_1=0, & l_2=0, & l_3=0, & l_4=1, & \ldots., \\
\ldots.: & \ldots., & \ldots., & \ldots., & \ldots., & \ldots.,
\end{array}\right.$$

und ferner

$$(239)\left\{\begin{array}{llllll} \text{für I:} & \left[\frac{ll}{p}\right]=\frac{1}{p_1}, & \left[\frac{al}{p}\right]=\frac{a_1}{p_1}, & \left[\frac{bl}{p}\right]=\frac{b_1}{p_1}, & \left[\frac{cl}{p}\right]=\frac{c_1}{p_1}, & \ldots, \\ \text{„ II:} & \left[\frac{ll}{p}\right]=\frac{1}{p_2}, & \left[\frac{al}{p}\right]=\frac{a_2}{p_2}, & \left[\frac{bl}{p}\right]=\frac{b_2}{p_2}, & \left[\frac{cl}{p}\right]=\frac{c_2}{p_2}, & \ldots, \\ \text{„ III:} & \left[\frac{ll}{p}\right]=\frac{1}{p_3}, & \left[\frac{al}{p}\right]=\frac{a_3}{p_3}, & \left[\frac{bl}{p}\right]=\frac{b_3}{p_3}, & \left[\frac{cl}{p}\right]=\frac{c_3}{p_3}, & \ldots, \\ \text{„ IV:} & \left[\frac{ll}{p}\right]=\frac{1}{p_4}, & \left[\frac{al}{p}\right]=\frac{a_4}{p_4}, & \left[\frac{bl}{p}\right]=\frac{b_4}{p_4}, & \left[\frac{cl}{p}\right]=\frac{c_4}{p_4}, & \ldots, \\ \ldots: & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}\right.$$

Im Uebrigen finden die Formeln (**232**) bis (**237**) unverändert Anwendung.

3. Für bedingte vermittelnde Beobachtungen.

Gewicht und mittlerer Fehler einer Funktion der wahrscheinlichsten Werthe der zu bestimmenden Grössen.

1. Verfahren.

$$(240)\quad L=\varphi(x,\,y,\,z,\,\ldots).$$

$$(241)\quad l_1=\frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{x}},\;\Big|\;l_2=\frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{y}},\;\Big|\;l_3=\frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{z}},\;\Big|\;\ldots$$

$$(242)\left\{\begin{array}{l} [A(\mathfrak{A})]\,r_A+[A(\mathfrak{B})]\,r_B+\cdots[(\mathfrak{A})l]=0, \\ [A(\mathfrak{B})]\,r_A+[B(\mathfrak{B})]\,r_B+\cdots[(\mathfrak{B})l]=0, \\ \ldots\ldots \end{array}\right.$$

Auflösung der Gleichungen (**242**) nach Schema (**251**) mit Weglassung von $[lq]$ in den beiden letzten Spalten.

$$(243)\left\{\begin{array}{l} L_1=l_1+A_1r_A+B_1r_B+\cdots, \\ L_2=l_2+A_2r_A+B_2r_B+\cdots, \\ L_3=l_3+A_3r_A+B_3r_B+\cdots, \\ \ldots\ldots \end{array}\right.$$

Weiter nach den Formeln (**224**) bis (**228**) und Schema (**229**), indem L_1, L_2, L_3, ... für l_1, l_2, l_3, ... genommen werden.

2. Verfahren.

$$(240)\quad L=\varphi(x,\,y,\,z,\,\ldots).$$

$$(241)\quad l_1=\frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{x}},\;\Big|\;l_2=\frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{y}},\;\Big|\;l_3=\frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{z}},\;\Big|\;\ldots$$

$$(244)\left\{\begin{array}{l} [paa]\,q_1+[pab]\,q_2+[pac]\,q_3+\cdots=l_1, \\ [pab]\,q_1+[pbb]\,q_2+[pbc]\,q_3+\cdots=l_2, \\ [pac]\,q_1+[pbc]\,q_2+[pcc]\,q_3+\cdots=l_3, \\ \ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$(245)\left\{\begin{array}{l|l|l|l|l} \mathfrak{a}_1=[paa], & \mathfrak{b}_1=[pab], & \mathfrak{c}_1=[pac], & \ldots, & l_1, \\ & \mathfrak{b}_2=[pbb], & \mathfrak{c}_2=[pbc], & \ldots, & l_2, \\ & & \mathfrak{c}_3=[pcc], & \ldots, & l_3, \\ & & & \ldots, & \ldots, \\ \mathfrak{B}_2=\mathfrak{b}_2-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1, & \mathfrak{C}_2=\mathfrak{c}_2-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1, & \ldots, & \mathfrak{L}_2=l_2-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}l_1, & \\ & \mathfrak{C}_3=\mathfrak{c}_3-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{c}_1-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{C}_2, & \ldots, & \mathfrak{L}_3=l_3-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1}l_1-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2, & \\ & & \ldots, & \ldots\ldots & \end{array}\right.$$

$$(246)\quad [lq]=+l_1q_1+l_2q_2+l_3q_3+\cdots$$
$$=+\frac{l_1}{\mathfrak{a}_1}l_1+\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2+\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3+\cdots$$

(247) Schema für die Auflösung der Gleichungen (**244**) und für die Berechnung von $[lq]$.

l_1	l_2	l_3	....	$[lq]$.	
	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1} l_1$	$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1} l_1$	....	$+\frac{l_1}{\mathfrak{a}_1} l_1$	$+l_1 q_1$
$+\frac{l_1}{\mathfrak{a}_1}$	$=\mathfrak{L}_2$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{C}_2$	....	$+\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	$+l_2 q_2$
....	$+\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{C}_2}$	$=\mathfrak{L}_3$	....	$+\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}\mathfrak{L}_3$	$+l_3 q_3$
$-\frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1} q_3$	....	$+\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{C}_3}$	....	....	....
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1} q_2$	$-\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2} q_3$	....	....	$=[lq]=$	
$=q_1$	$=q_2$	$=q_3$	....		

$$(242)\quad \begin{cases} [A(\mathfrak{A})]\,r_A + [A(\mathfrak{B})]\,r_B + \cdots\cdot [(\mathfrak{A})\,l] = 0, \\ [A(\mathfrak{B})]\,r_A + [B(\mathfrak{B})]\,r_B + \cdots\cdot [(\mathfrak{B})\,l] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(248)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_1 = [A(\mathfrak{A})], \;\Big|\; \mathfrak{b}_1 = [A(\mathfrak{B})], \;\Big|\; \ldots, \;\Big|\; \mathfrak{l}_1 = [(\mathfrak{A})\,l], \\ \qquad\qquad\qquad\quad \mathfrak{b}_2 = [B(\mathfrak{B})], \;\Big|\; \ldots, \;\Big|\; \mathfrak{l}_2 = [(\mathfrak{B})\,l], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots, \;\Big|\; \ldots\ldots\ldots, \\ \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{b}_2 - \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b}_1, \;\Big|\; \ldots, \;\Big|\; \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{l}_2 - \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \ldots, \;\Big|\; \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(249)\quad \frac{1}{P_L} = [lq] + \mathfrak{l}_1 r_A + \mathfrak{l}_2 r_B + \cdots\cdot,$$
$$= [lq] - \frac{\mathfrak{l}_1}{\mathfrak{a}_1} l_1 - \frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2 - \cdots\cdot\cdot$$

$$(250)\quad M_L = \pm\, \mathrm{m} \sqrt{\frac{1}{P_L}}\,.$$

(251) Schema zur Auflösung der Gleichungen (**242**) und zur Gewichtsberechnung.

$[(\mathfrak{A})\,l]$	$[(\mathfrak{B})\,l]$	....	Gewicht P_L.	
$\mathfrak{l}_1$	$\mathfrak{l}_2$	....	$[lq]$	$[lq]$
	$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	....	$-\frac{\mathfrak{l}_1}{\mathfrak{a}_1}\mathfrak{l}_1$	$+\mathfrak{l}_1 r_A$
$-\frac{\mathfrak{l}_1}{\mathfrak{a}_1}$	$=\mathfrak{L}_2$	....	$-\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{L}_2$	$+\mathfrak{l}_2 r_B$
....	$-\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{B}_2}$	....	....	....
$-\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1} r_B$	....	....	$=\frac{1}{P_L}=$	
$=r_A$	$=r_B$	....		

